4. Tracer les réponses fréquentielles d'un système

Pour obtenir le diagramme de Bode d'un système, on peut utiliser la commande *bode*

```
>>bode(H) ; grid on
```

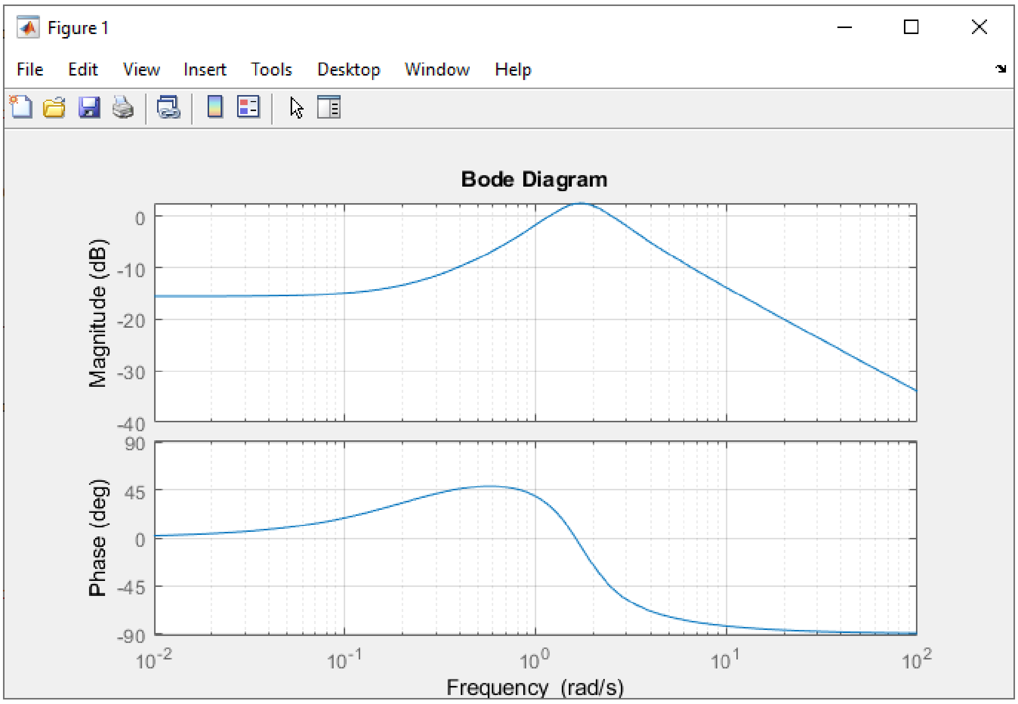


Figure 407 : diagramme de Bode d'un système

Pour obtenir le diagramme de Black-Nichols d'un système, on peut utiliser la commande *nichols*

```
>>nichols(H) ; grid on
```

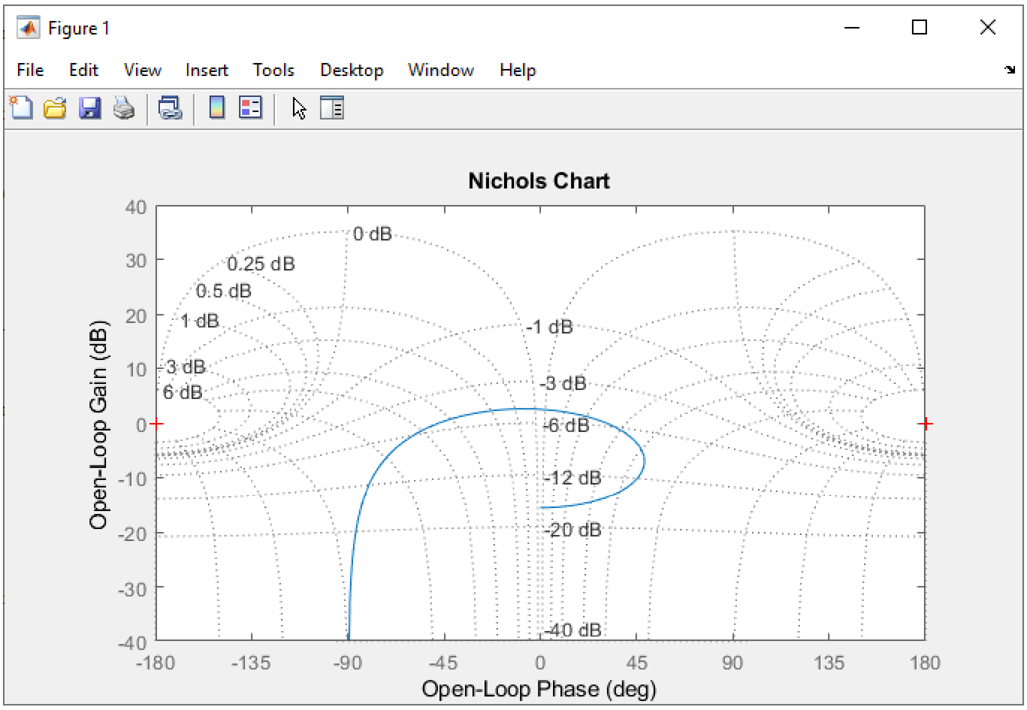


Figure 408 : diagramme de Black-Nichols d'un système

Pour obtenir le diagramme de Nyquist d'un système, on peut utiliser la commande *nyquist*
>>nyquist(H) ; grid on

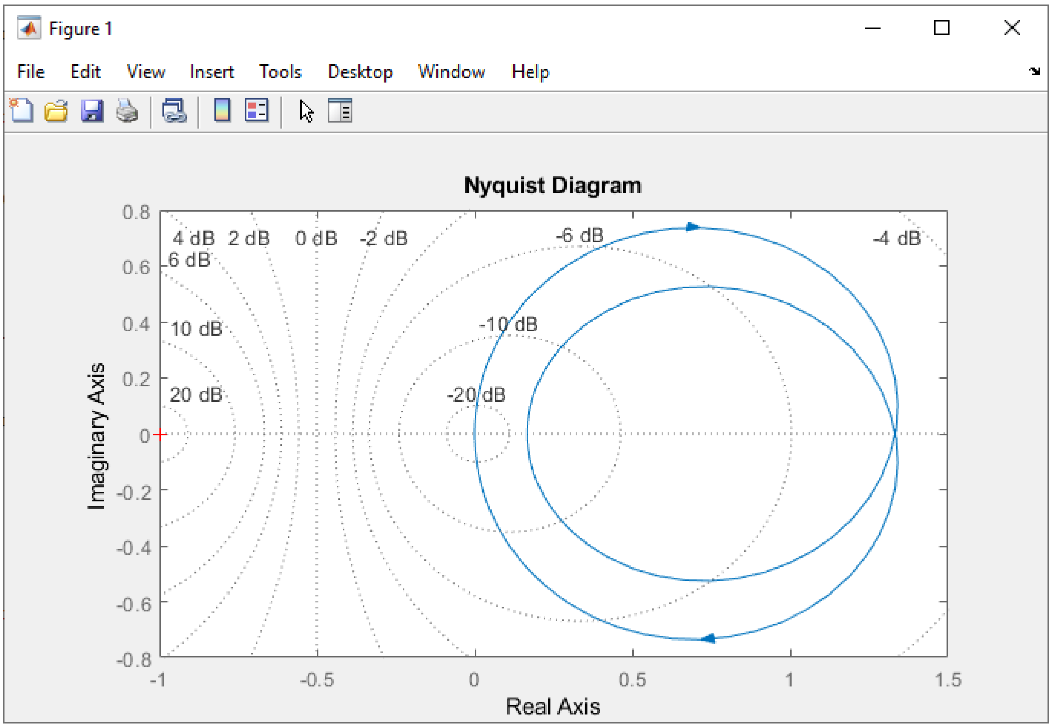


Figure 409 : diagramme de Nyquist d'un système

On peut également tracer deux diagrammes de Bode sur le même graphique.
>>bode(H,G) ; grid on

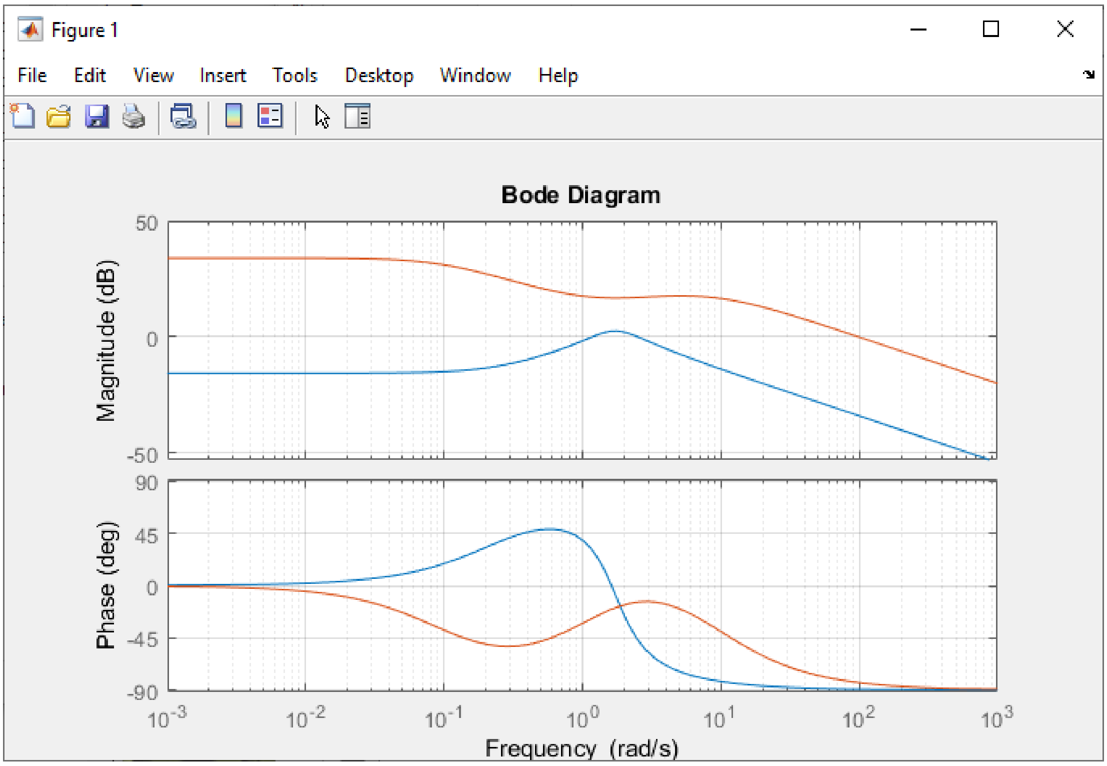


Figure 410 : tracé de deux diagrammes de Bode sur le même graphique

5. Evaluer les marges de gain et de phase

Il est possible d'obtenir automatiquement les marges de gain et de phase d'une fonction de transfert en bloucle ouverte avec la commande *margin* qui affiche un diagramme de Bode en donnant les informations numériques et graphiques sur les marges de gain et de phase.

```
>>margin(H) ; grid on ;
```

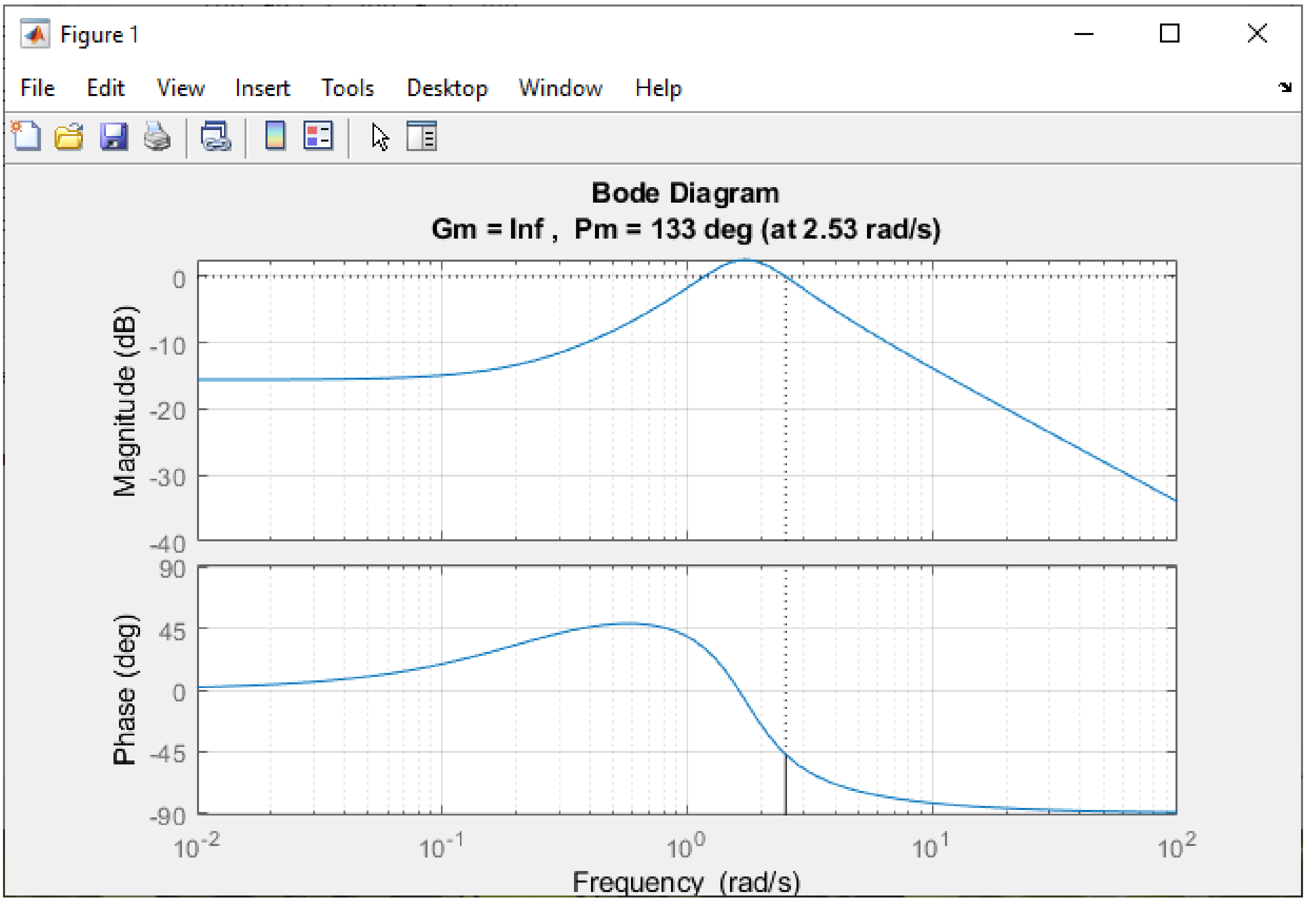


Figure 411 : diagramme de Bode avec indication des marges de gain et de phase

Il est également possible de stocker dans des variables les valeurs des marges de gain et de phase et les différentes pulsations auxquelles elles sont évaluées.

```
>>[gm,pm,wcg,wcp]=margin(H)
gm =
  Inf

pm =
 132.6226

wcg =
  NaN

wcp =

   2.5255
```

6. Tableau récapitulatif des commandes utiles sur les fonctions de transfert

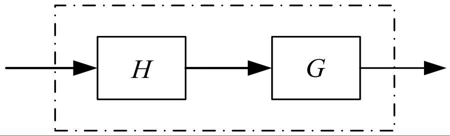
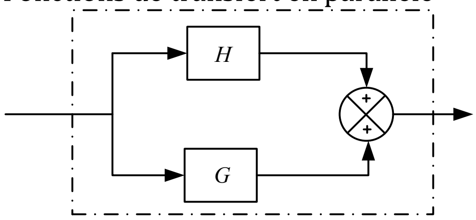
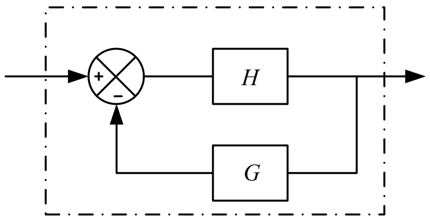
Commandes utiles	
Fonctions	Commandes
Création d'une variable symbolique	syms x
Résolution d'une équation algébrique	solve(equation,x)
Factoriser une expression	factor (x^3-4*x^2-28*x-32)
Développer une expression	expand ((x-8)*(x+2)^2)
Dériver une fonction	diff (f,t)
Intégrer une fonction	int (f,t)
Résolution d'une équation différentielle	dsolve(equation)
Calculer une intégrale définie	int(f,t,-pi/3,pi)
Calculer la transformée de Laplace d'une fonction	laplace(sin(w+t))
Calculer la transformée inverse de Laplace d'une fonction	ilaplace(3/(2+s)-5/(3*s)^2)
Décomposer en éléments simples une fraction rationnelle	[r p k]=residue (a,b)
Création d'une fonction de transfert à partir de la définition des coefficients des polynômes	H=tf([4 1],[2 3 6])
Création d'une fonction de transfert à partir de la connaissance du gain, des pôles et des zéros	G=zpk([-1,-2],[-0.1,-4,-10],100)
Indiquer que s est la variable de Laplace	s=tf('s')
Création directe d'une fonction de transfert après utilisation de la commande « s=tf('s') »	G=100*((s+1)*(s+2))/((s+0.1)*(s+4)*(s+10))
Création de la fonction de transfert d'un correcteur PID	pid(Kp,Ki,Kd)
Fonctions de transfert en série 	series(H,G)
Fonctions de transfert en parallèle 	parallel(H,G)
Fonction de transfert en boucle fermée 	feedback(H,G)
Inverser une fonction de transfert	inv(H)
Obtenir les pôles d'une fonction de transfert	pole(H)
Obtenir les zéros d'une fonction de transfert	zero(H)
Réponse indicielle	step(H)
Réponse impulsionnelle	impulse(H)

Diagramme de bode	bode(H)
Diagramme de Black-Nichols	nichols(H)
Diagramme de Nyquist	nyquist(H)
Tracé multiple de diagrammes	bode(H,G) ou nichols(H,G)…
Diagramme de bode avec marge de gain et de phase	margin(H)
Récupérer dans des variables les valeurs des marges de gain et de phase et les pulsations correspondantes	[gm,pm,wcg,wcp]=margin(H)

Pour obtenir des informations complémentaires sur une commande, vous pouvez utiliser l'aide de **MATLAB** en utilisant la commande doc.

```
>>doc bode
```
permet d'ouvrir la fenêtre d'aide de la commande « bode »

Chapitre 6 : Prise en main de Simulink

I. Introduction

Ce chapitre a pour objectif de présenter au travers d'un exemple une modélisation effectuée avec **Simulink** et de montrer les communications possibles entre l'environnement **MATLAB** et l'environnement **Simulink**.

II. Régulation en température d'un four

L'étude porte sur l'asservissement en température d'un four industriel.

Une résistance chauffante permet de chauffer l'enceinte du four. Un capteur informe la carte de commande de la température à l'intérieur du four. Cette mesure est comparée à la consigne de température pour former un écart. Un correcteur proportionnel et intégral impose une tension de commande à la résistance.

A. Ouverture du modèle

Ouvrir le fichier ***four_0.slx*** pour visualiser le schéma bloc de la Figure 413 et explorer les différents blocs du modèle. Ce modèle **Simulink** représente l'asservissement en température d'un four. Les éléments modélisés par les blocs sont indiqués sur la Figure 413.

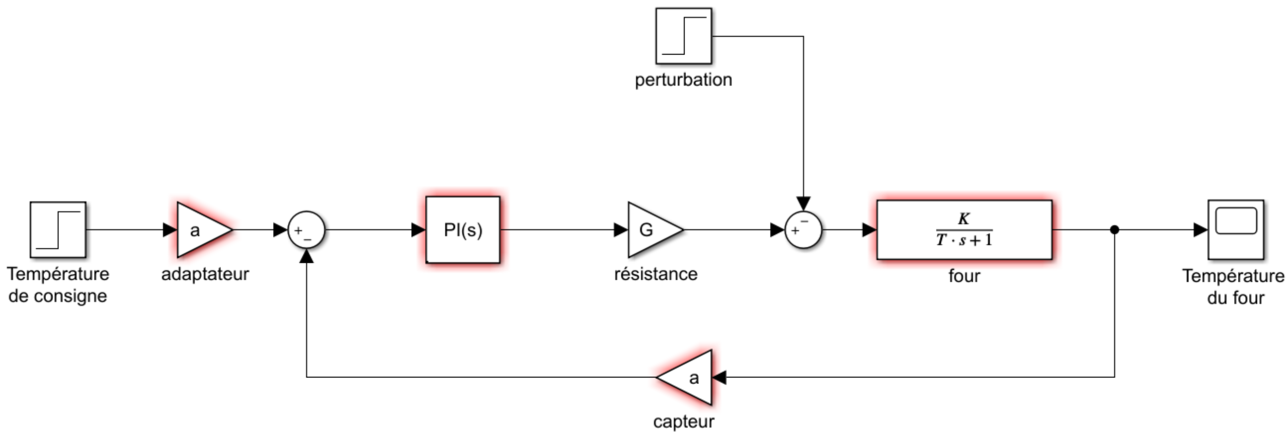


Figure 412 : ouverture du modèle Simulink du four

Nous constatons que certains blocs apparaissent encadrés en rouge. Cela signifie qu'ils sont paramétrés avec des variables qui ne sont pas encore définies dans le Workspace. Le modèle ne peut donc pas être exécuté pour l'instant sans générer un message d'erreur. Lorsque vous construisez un modèle Simulink, vous pouvez paramétrer les blocs directement avec des valeurs numériques ou au travers de variables que vous définirez dans le Workspace, soit directement dans la fenêtre de commande soit via l'éxécution d'un script. Il est très utile de regrouper la valeur de toutes les grandeurs physiques du système dans un script unique. L'exécution du script permettra la création de toutes les variables dans le **Workspace** de **MATLAB**. Il sera alors possible de lancer la simulation dans Simulink.

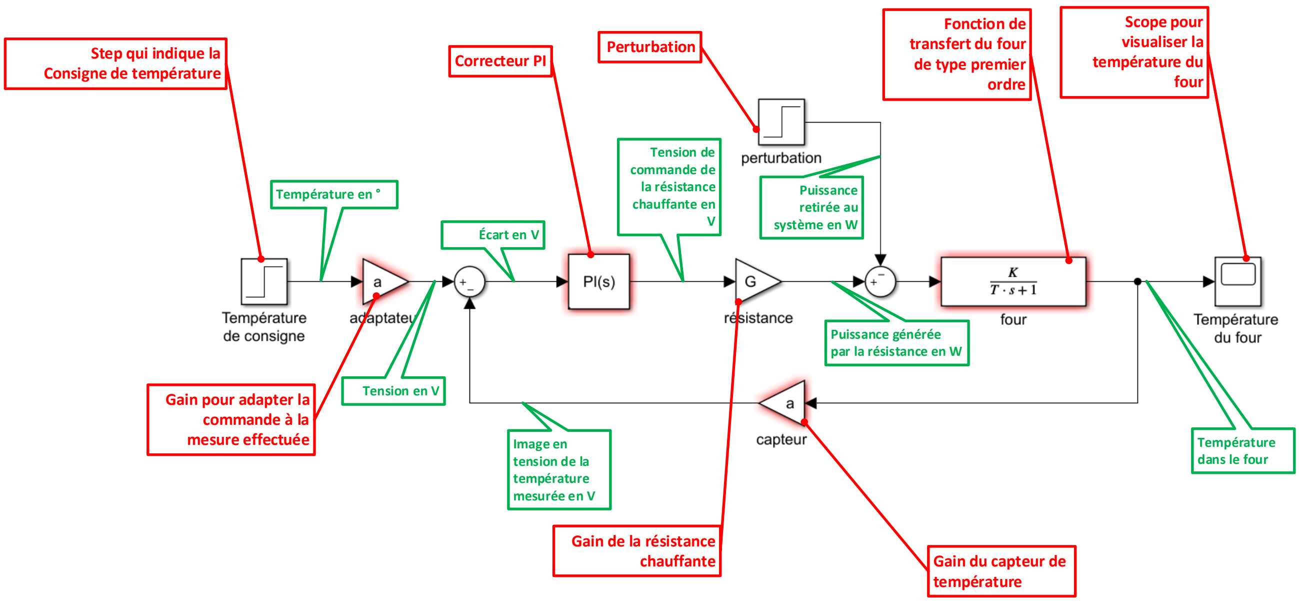
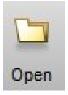


Figure 413 : modélisation de l'asservissement en température d'un four

B. Ouverture du script contenant la définition des variables

Ouvrir le script ***parametres_four.m***, en cliquant sur **Open script** 

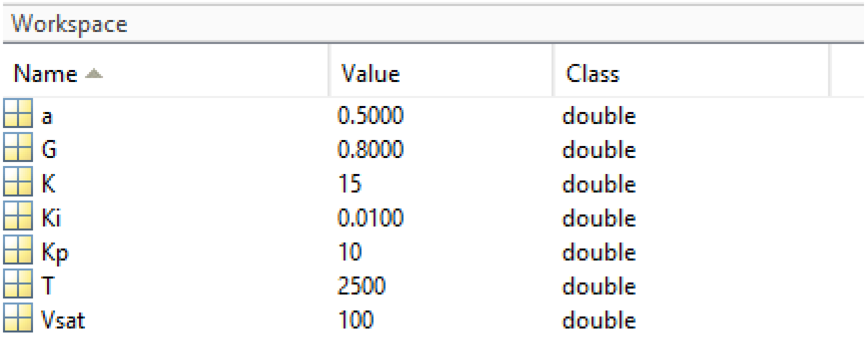

```
%gain du capteur
a=0.5;
%tension maxi aux bornes de la résistance
Vsat=100;
%gain de la resistance chauffante
G=0.8;
%paramètres de la fonction de transfert du four
K=15;
T=2500;
%paramètres du correcteur
Kp=10;
Ki=0.01;
```

Figure 414 : script contenant les paramètres de la simulation

Exécuter le script, en cliquant sur **Run** 

dans la barre de commande.

Nous constatons que les variables ont été créés et sont visible dans le Workspace de **MATLAB** (Figure 415)


Workspace

Name	Value	Class
a	0.5000	double
G	0.8000	double
K	15	double
Ki	0.0100	double
Kp	10	double
T	2500	double
Vsat	100	double

Figure 415 : visualisation des variables créées dans le Workspace

La simulation peut maintenant être lancée.

C. Lancement de la simulation

Lancer la simulation du modèle Simulink et visualiser la variation de la température à l'intérieur du four (Figure 416).

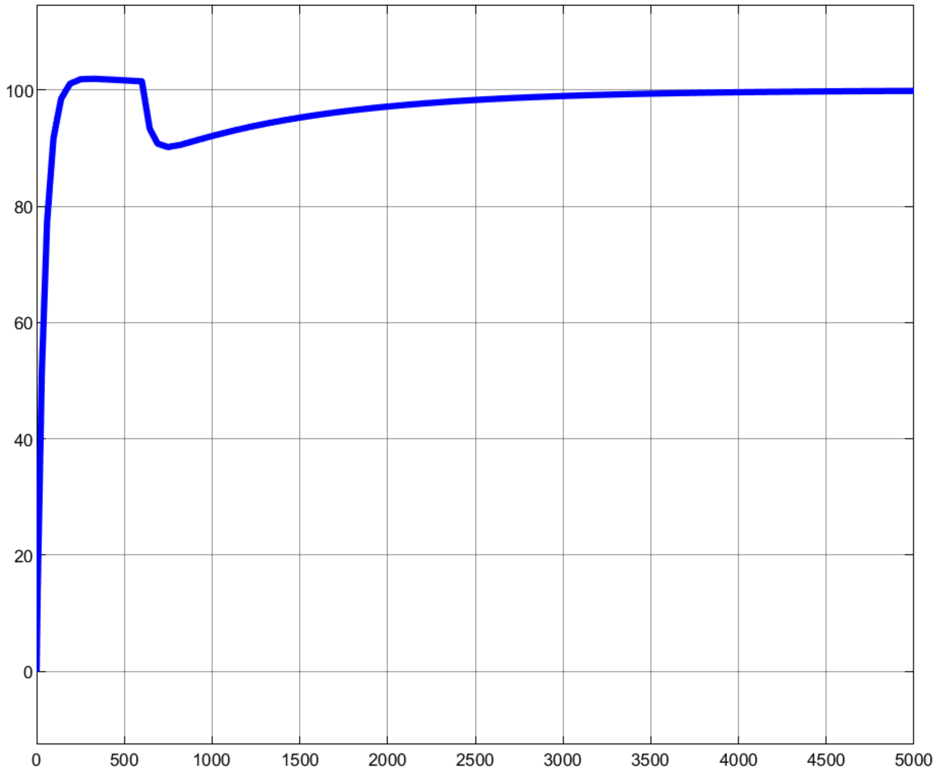


Figure 416 : réponse en température du four

Une consigne de 100° est imposée à l'entrée du modèle. Une perturbation est visible à l'instant t=600 s et se caractérise par une chute de la température. Le correcteur proportionnel et intégral permet de rétablir la température du four au niveau de la consigne.

D. Tracer un diagramme de Bode avec Simulink

Il existe de nombreuses méthodes pour tracer un diagramme de Bode à partir d'un schéma bloc réalisé avec Simulink. La plus simple consiste à placer des **points de linéarisation** sur le schéma bloc et d'utiliser le bloc **Bode Plot** de la bibliothèque **Simulink Control Design**. Il existe différents types de points de linéarisation, nous allons voir comment les choisir pour obtenir un diagramme de Bode en boucle ouverte et en boucle fermée.
Avant de commencer il est préférable de donner un nom aux signaux du schéma bloc qui interviendront dans les fonctions de transfert à tracer.
Nommer les signaux conformément à la Figure 417 :

- Entrée
- Sortie
- Ecart
- Retour

Pour nommer un signal **cliquer avec le bouton droit** sur le signal puis choisir **Properties**. La boite de dialogue **Signal Properties** s'ouvre. Le nom du signal est à spécifier dans **Signal Name**.

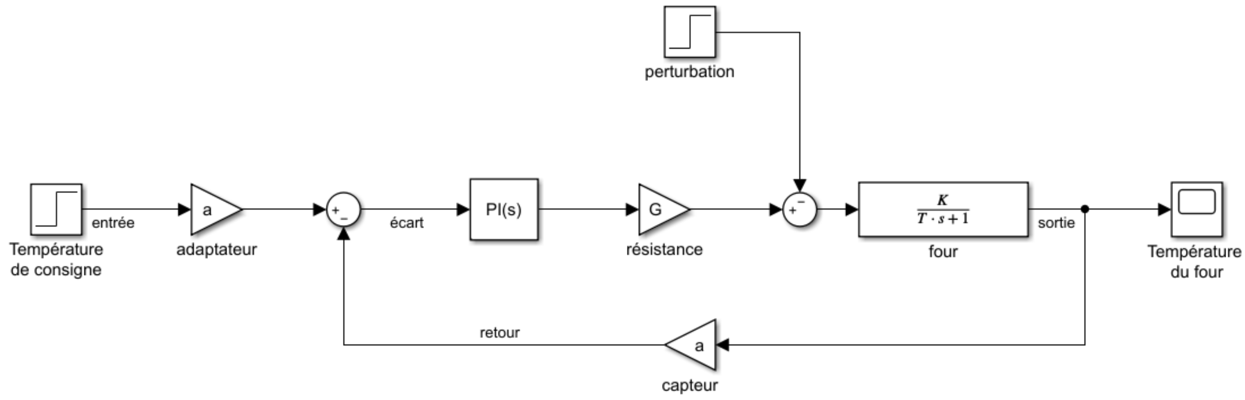


Figure 417 : nommer un signal Simulink

1. Tracer un diagramme de Bode en boucle ouverte

Pour tracer un diagramme de Bode en boucle ouverte, il faut placer deux points de linéarisation sur les signaux d'entrée et de sortie de la boucle ouverte. Pour cela il faudra choisir des points de linéarisation de type :

- **Open loop input** (pour l'entrée de la boucle ouverte)
- **Open loop output** (pour la sortie de la boucle ouverte)

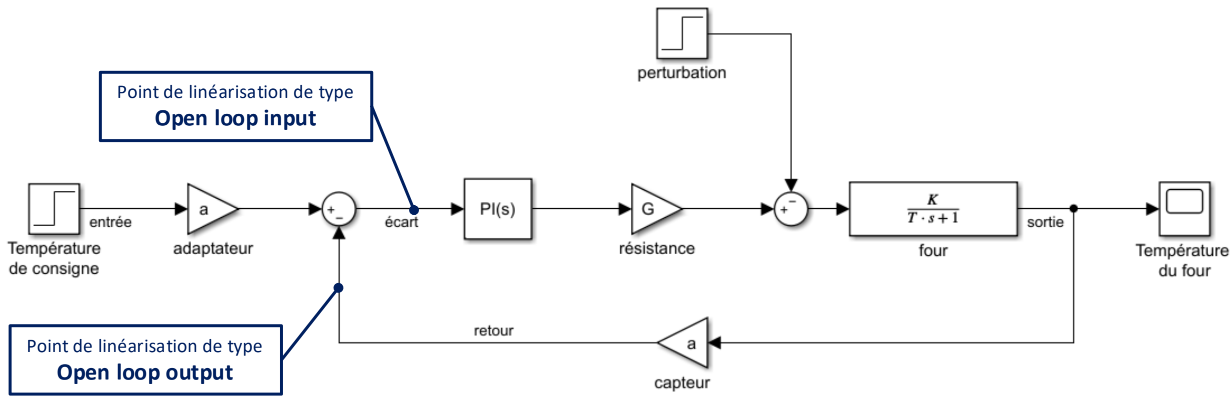


Figure 418 : placement des points de linéarisation pour tracer un diagramme de Bode en boucle ouverte

Pour placer un point de linéarisation de type **open loop input** sur le signal « **écart** », il faut **cliquer avec le bouton droit** sur le signal « **écart** », puis choisir **Linear Analysis point/open loop Input.**

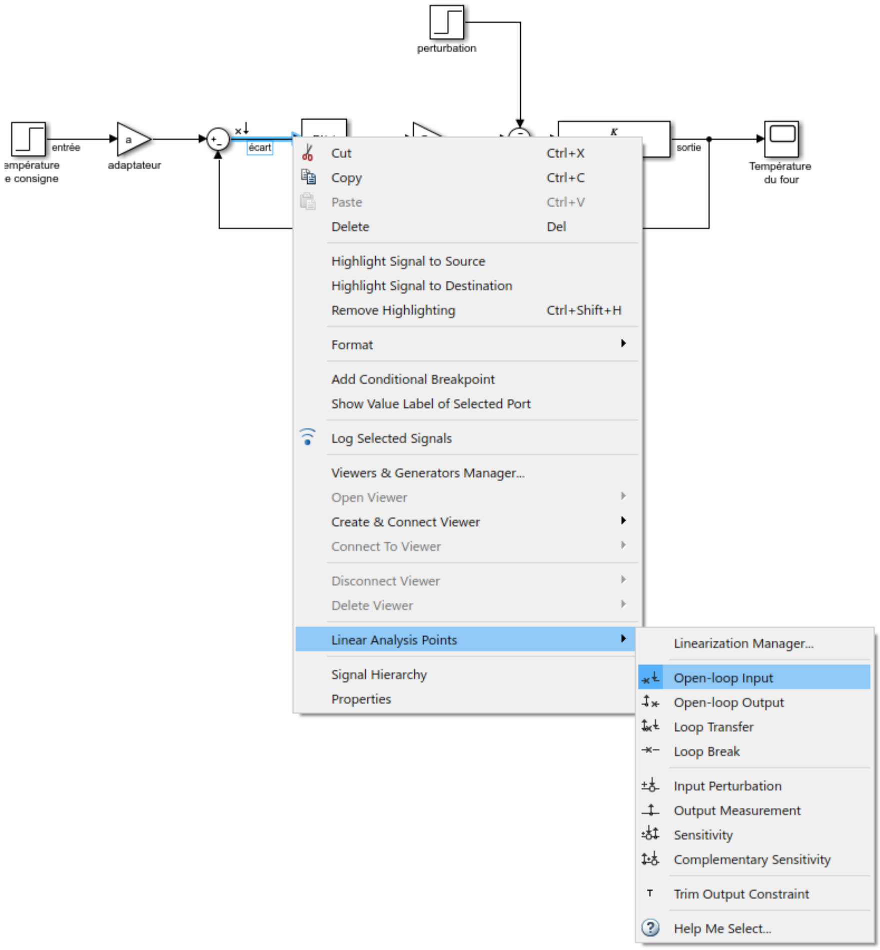


Figure 419 : placement d'un point de linéarisation de type « Open loop input »

Pour placer un point de linéarisation de type **open loop output** sur le signal « **retour** », il faut **cliquer avec le bouton droit** sur le signal « **retour** », puis choisir **Linear Analysis point/open loop Output.**

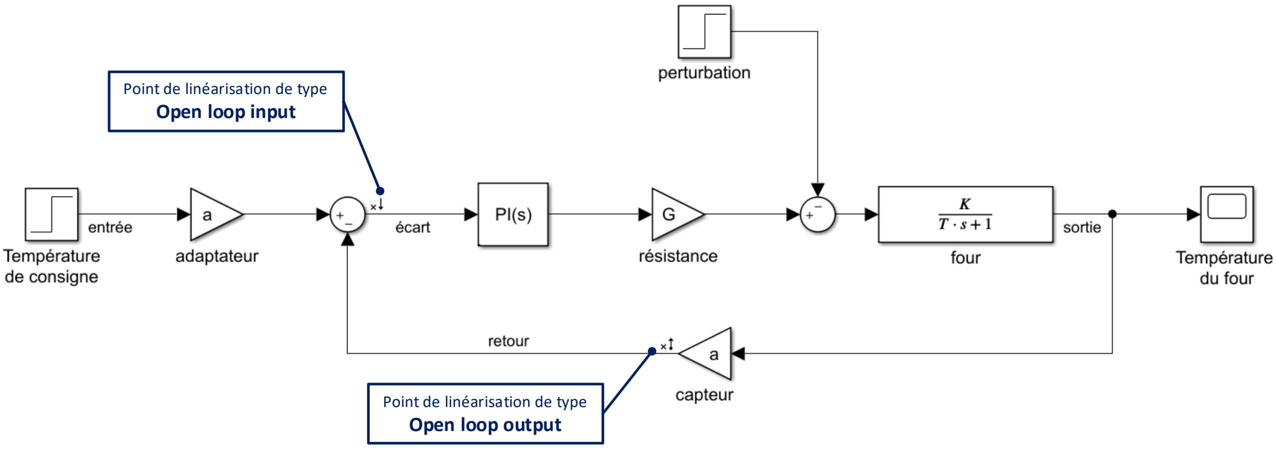
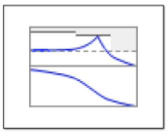


Figure 420 : représentation des points de linéarisation

Fonction du composant	Représentation	Bibliothèque
Tracer d'un diagramme de Bode		Simulink/Simulink Control Design/Linear Analysis Plot

Insérer dans votre modèle un bloc **Bode Plot**, renommer ce bloc « **boucle ouverte** ».

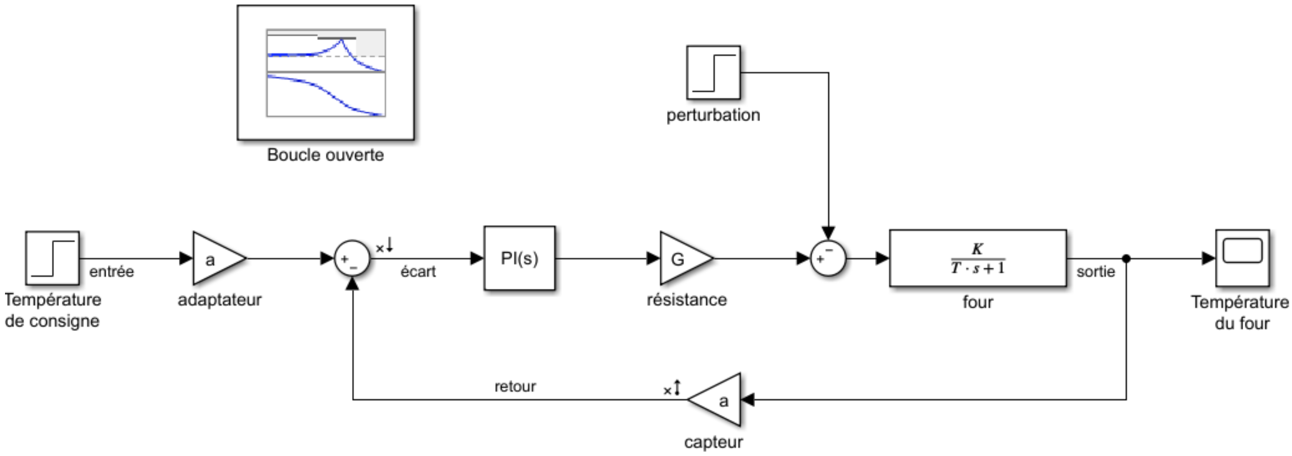


Figure 421 : insertion d'un bloc Bode Plot

Double cliquer sur le bloc pour l'ouvrir.

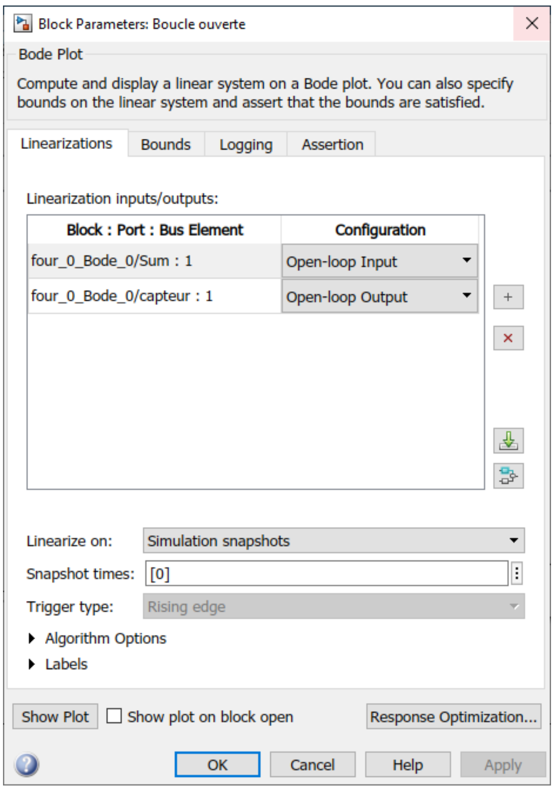


Figure 422 : fenêtre de paramétrage du bloc Bode Plot

Par défaut les deux points de linéarisation créés apparaissent.
Cliquer sur **Show Plot** pour faire apparaître la fenêtre de tracé.

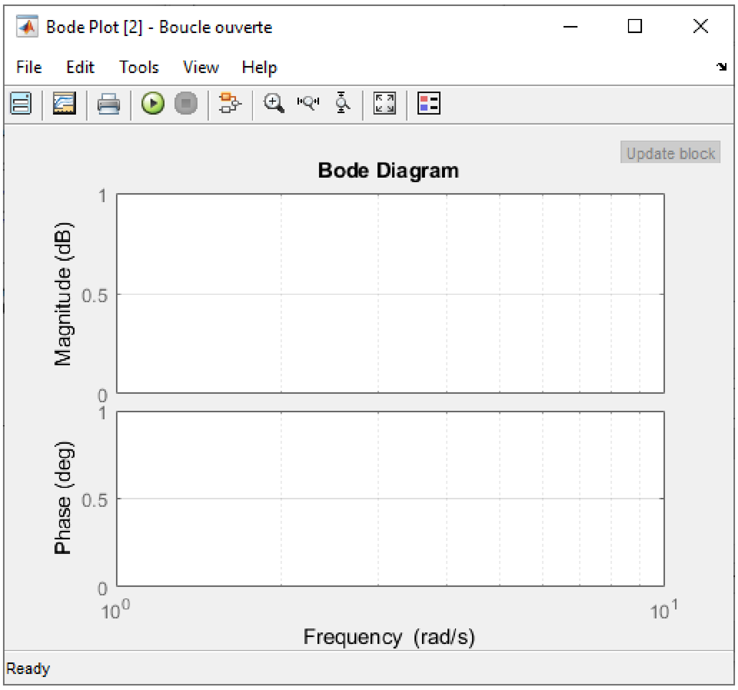


Figure 423 : fenêtre de tracé du diagramme de Bode

Cliquer sur Run  pour linéariser le modèle. Le diagramme de Bode se trace automatiquement.

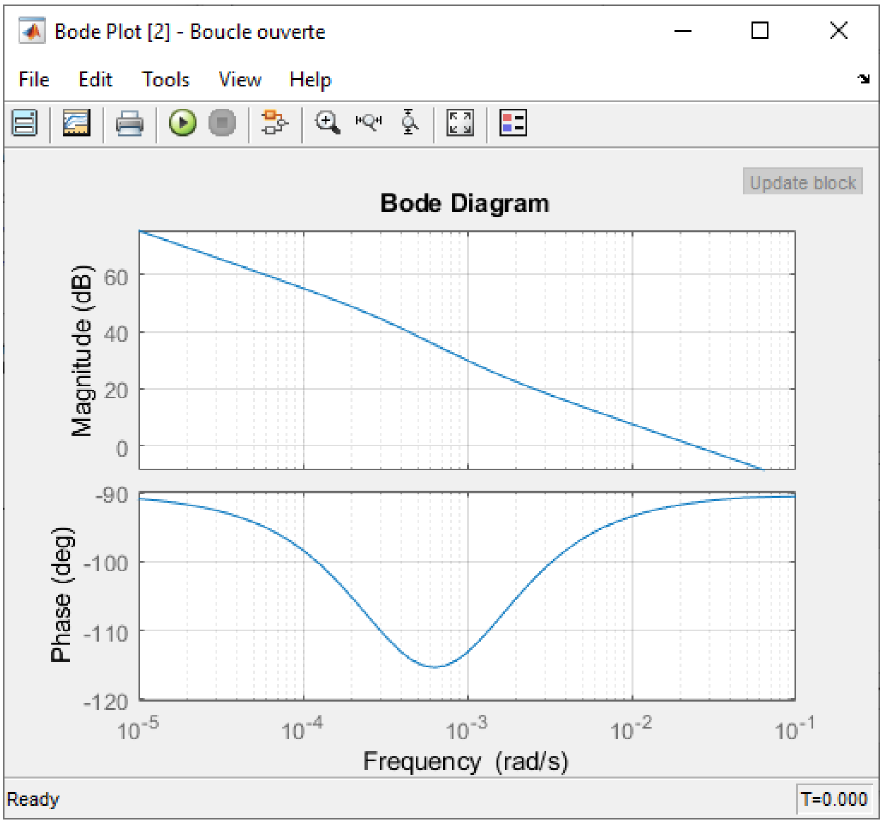


Figure 424 : diagramme de Bode de la boucle ouverte

2. Tracer un diagramme de Bode en boucle fermée

Pour tracer un diagramme de Bode en boucle fermée, il faut placer deux points de linéarisation sur les signaux d'entrée et de sortie de la boucle fermée. Pour cela il faudra choisir des points de linéarisation de type :

- **Input Perturbation** (pour l'entrée de la boucle fermée)
- **Output Measurement** (pour la sortie de la boucle fermée)

Pour placer un point de linéarisation de type **Input Perturbation** sur le signal « **entrée** », il faut **cliquer avec le bouton droit** sur le signal « **entrée** », puis choisir **Linear Analysis point/Input Perturbation.**

Pour placer un point de linéarisation de type **Output Measurement** sur le signal « **sortie** », il faut **cliquer avec le bouton droit** sur le signal « **sortie** », puis choisir **Linear Analysis point/Output Measurement.**

Les différents points de linéarisation apparaissent sur la Figure 425.

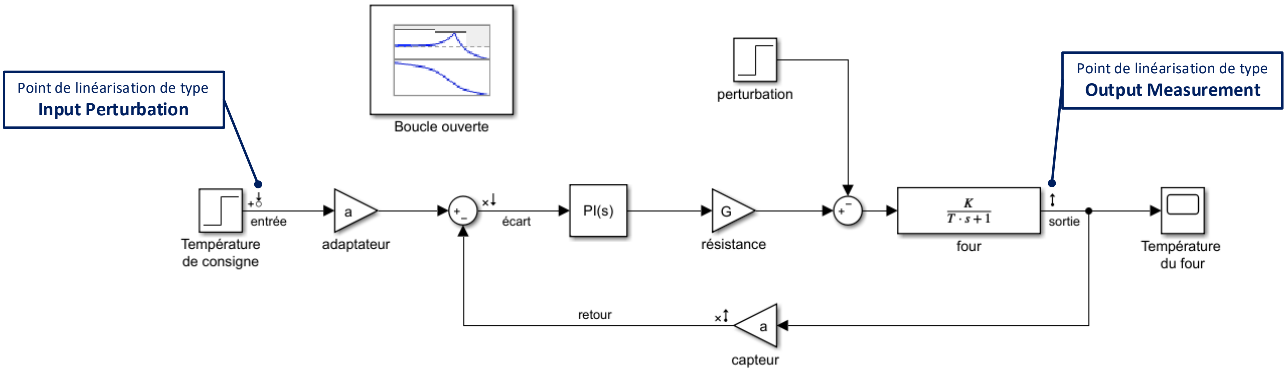


Figure 425: représentation des points de linéarisation

Insérer dans votre modèle un second bloc **Bode Plot**, **renommer** ce bloc « **boucle fermée** ».

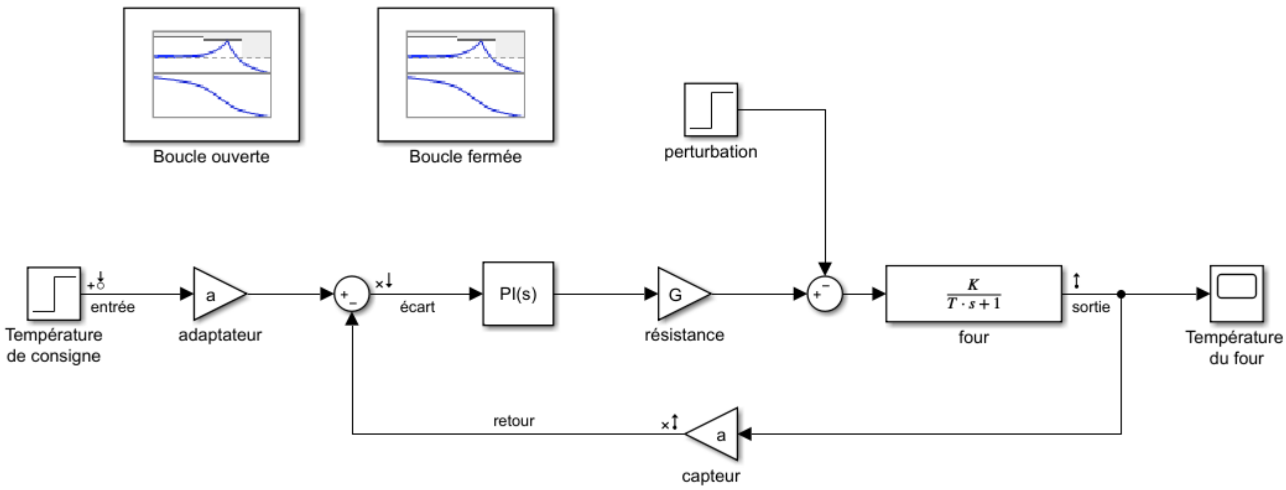


Figure 426 : insertion d'un second bloc Bode plot

Double cliquer sur le bloc pour l'ouvrir.

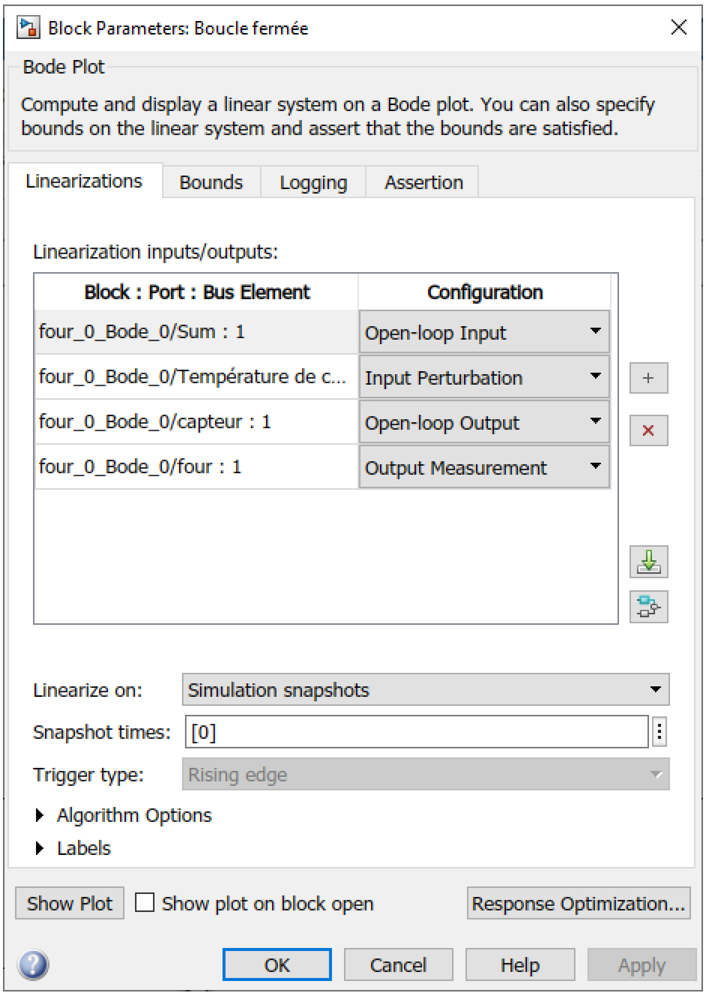


Figure 427: fenêtre de paramétrage du bloc Bode Plot

Par défaut les quatre points de linéarisation créés apparaissent.
Il suffit de garder les deux points de linéarisation correspondant à la boucle fermée et de supprimer les deux points de linéarisation correspondant à la boucle ouverte.
Pour cela, sélectionner les points de linéarisation à supprimer et utiliser le bouton **Delete Selected Linearization I/Os**  pour obtenir la configuration de Figure 428.

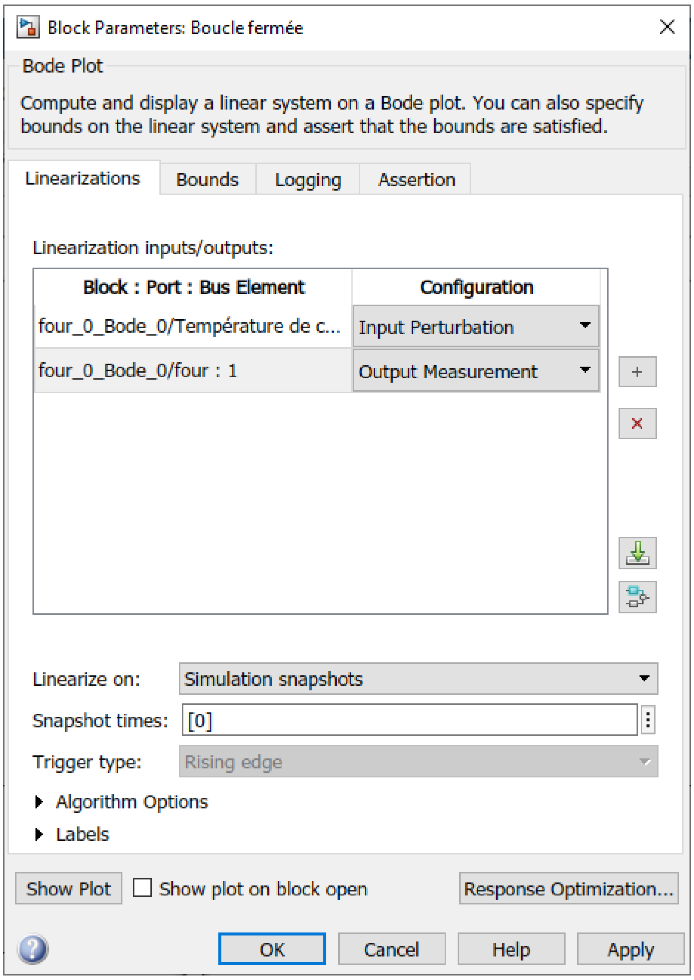


Figure 428 : paramétrage des points de linéarisation pour la boucle fermée

Cliquer sur **Show Plot** puis **cliquer** sur **Run**  pour faire apparaître le diagramme de Bode

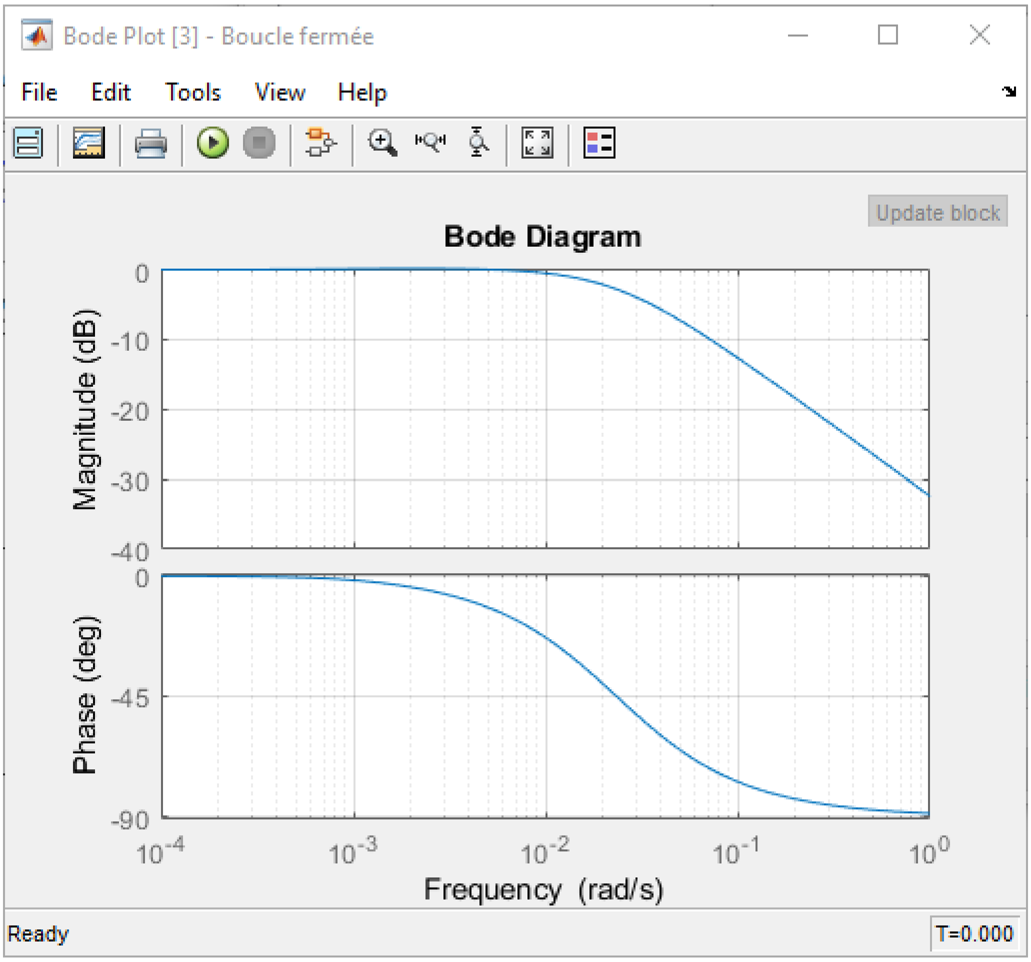
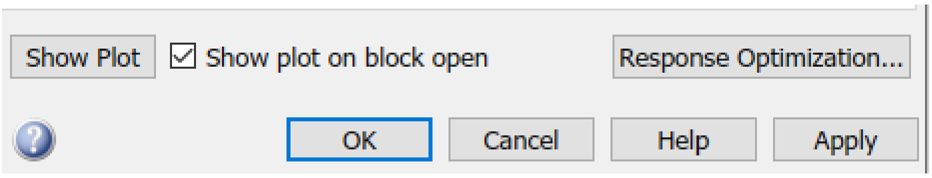


Figure 429 : diagramme de Bode de la boucle fermée

Si l'on souhaite ouvrir la fenêtre graphique du diagramme de Bode par un double clic sur le bloc **Bode Plot**, il suffit de cocher la case **Show plot on block open.**



Nous disposons alors du modèle Simulink que l'on peut modifier facilement et visualiser très rapidement l'allure des diagrammes de Bode. A chaque modification du modèle, il faudra relancer la linéarisation du modèle pour obtenir le nouveau diagramme de Bode.

E. Tracer d'un diagramme de Black-Nichols

La méthode est rigoureusement la même que pour tracer un diagramme de Bode, en utilisant le bloc **Nichols Plot**.

Le fichier contenant le modèle complet est disponible sous le nom ***four_0_Bode_Nichols.slx***

F. Ajout et paramétrage d'une saturation

Nous allons ajouter un saturateur pour tenir compte de la limite de 100 V représentant la tension maximale de commande de la résistance.
Les non-linéarités (seuil, hysteresis…) de la bibliothèque Simulink se trouvent dans **Simulink/Discontinuities.**

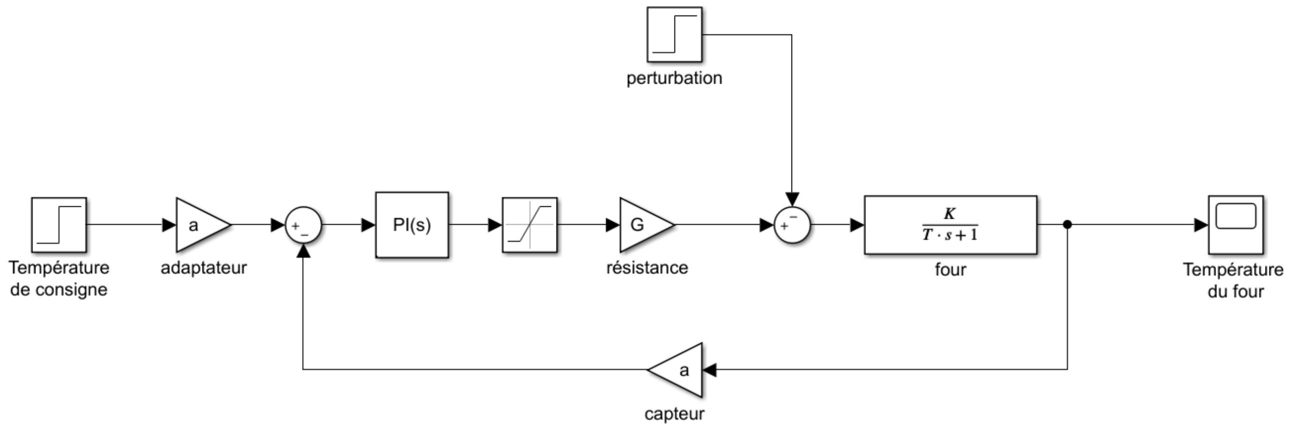
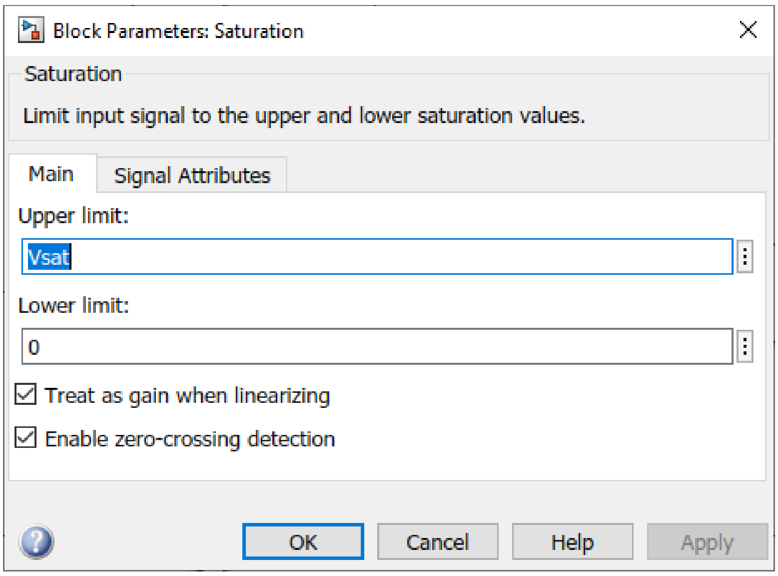


Figure 430 : asservissement en température d'un four avec saturation

Paramétrage

Saturation		Simulink/Discontinuities

Ce composant permet de limiter la sortie du bloc entre deux valeurs mini et maxi de saturation
Ici la valeur maximale est donnée par la variable Vsat, la valeur mini étant laissée à 0.



Lancer la simulation et visualiser la réponse obtenue avec la saturation.

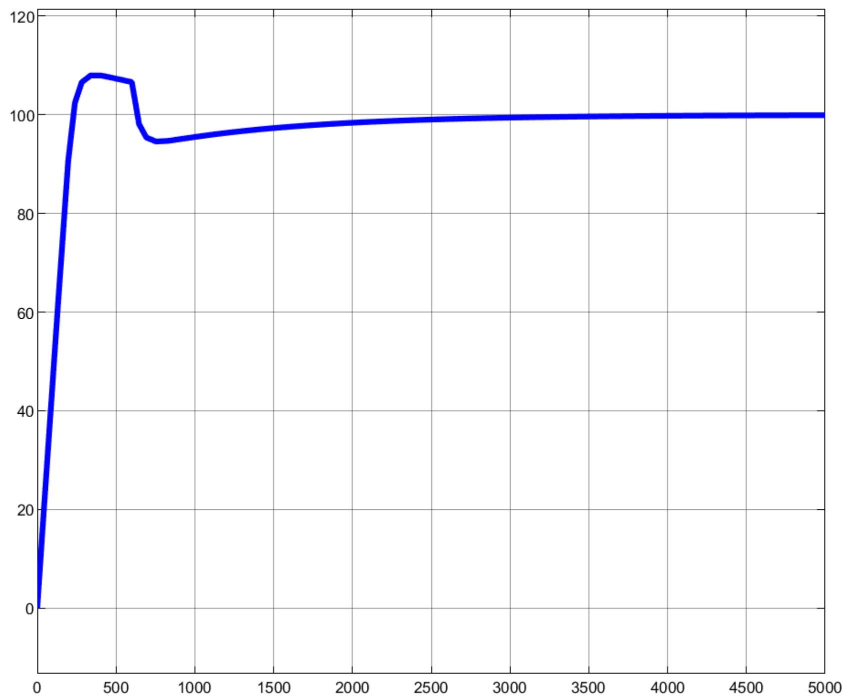
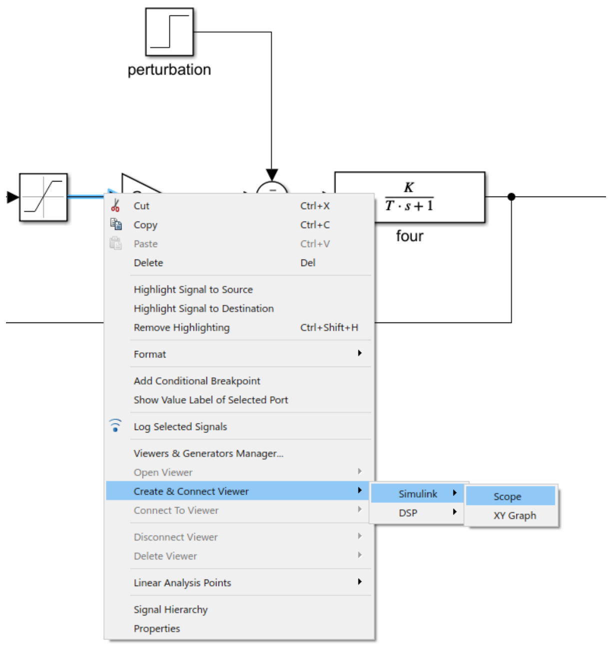


Figure 431 : réponse en température de four avec saturation

Nous constatons que la saturation ralentit le système, le temps de réponse à 5% est plus élevé.
Pour visualiser la tension en sortie de saturateur il est possible de placer un scope classique. Cependant afin de visualiser des signaux sans avoir à surcharger la modélisation MATLAB propose d'autre mode de visualisation en plaçant un scope directement sur un signal.

Pour cela **cliquer droit** sur le fil du signal puis sélectionner **Create&connect Viewer/Simulink/Scope**



Un petit scope apparaît sur le signal en sortie de saturateur.

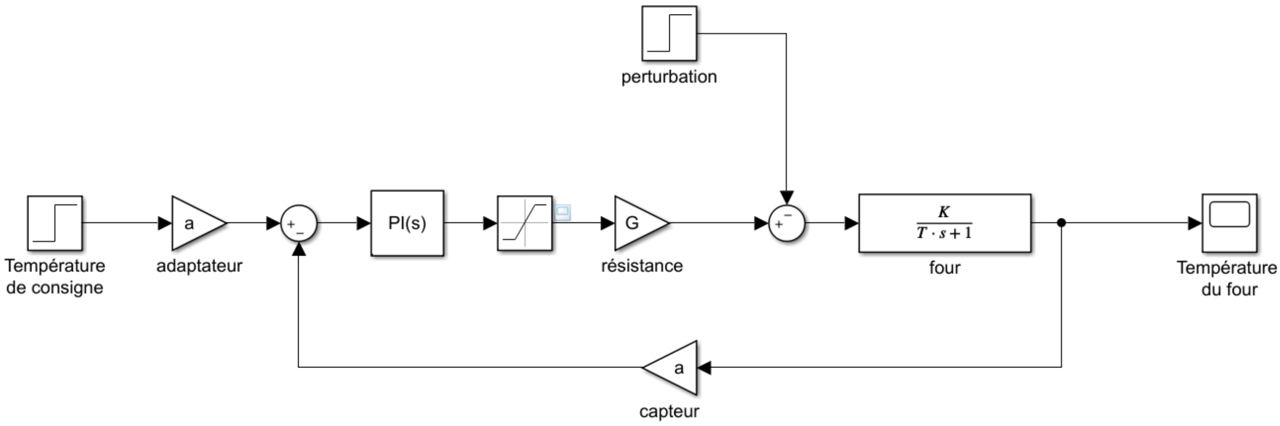


Figure 432 : mise en place d'un scope sur un signal

Relancer la simulation et double cliquer sur le scope du saturateur pour visualiser la tension en sortie du bloc.

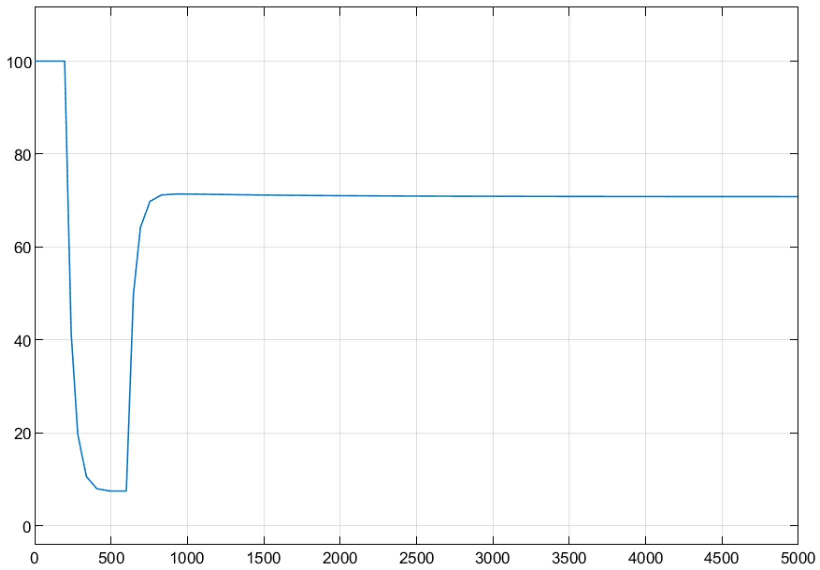


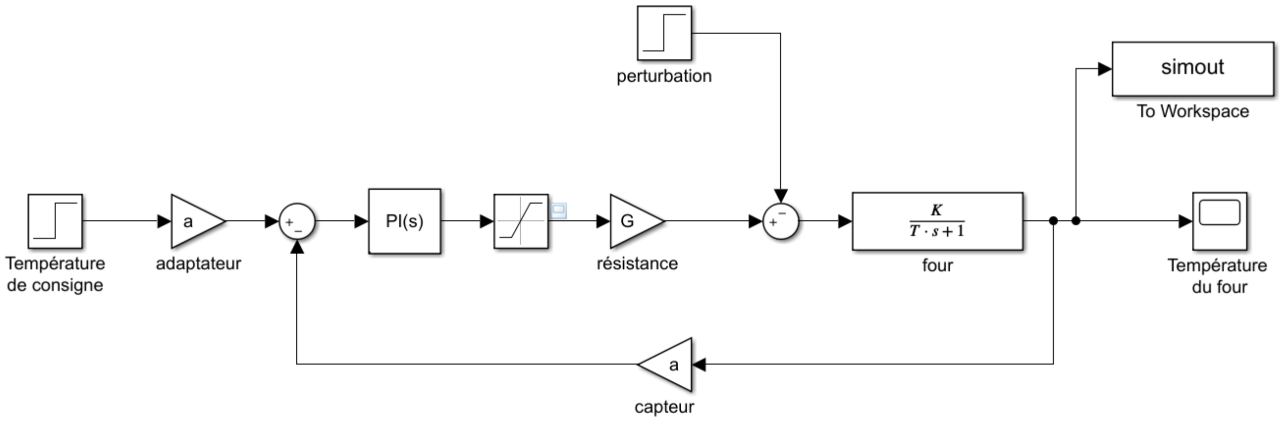
Figure 433 : visualisation de la tension en sortie de saturateur

Nous constatons que la tension sature à 100 V durant environ 200 s ce qui explique le ralentissement du système.

G. Exportation des variables de la simulation vers le Workspace

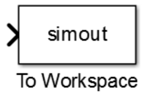
Il est très souvent utile d'exporter des variables qui contiennent le résultat de simulation vers le **Workspace**. Cela permet d'utiliser toutes les fonctions de **MATLAB** pour la présentation des résultats.

Nous souhaitons tracer un réseau de courbes permettant de voir l'influence du gain **Kcor** du correcteur proportionnel sur la température du four. Il faudra pour cela créer une variable **Tf** correspondant à la température du four et exporter cette variable vers le Workspace à l'aide d'un bloc **To Workspace** que l'on trouve dans la bibliothèque **Simulink/Sinks**.



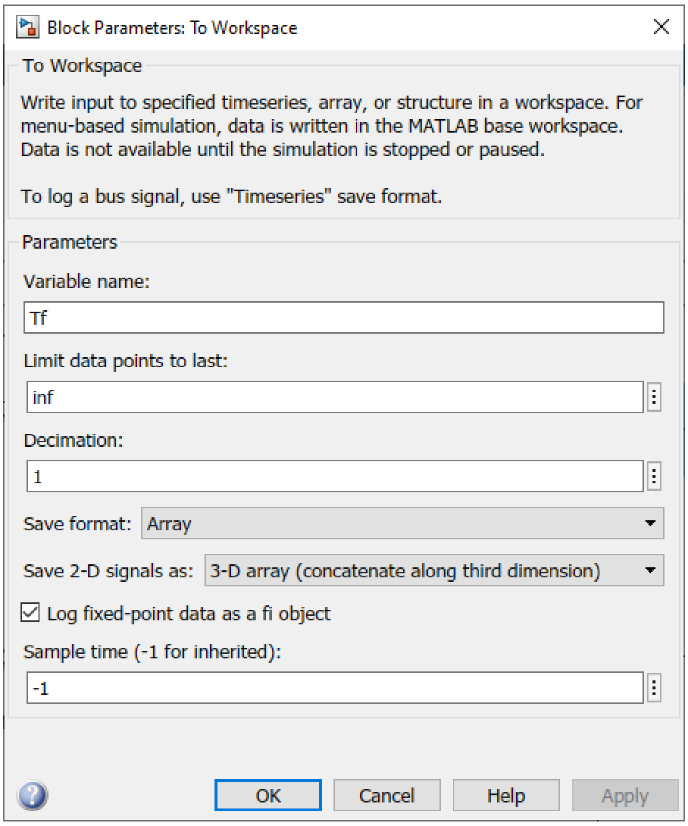
Paramétrage

Exportation de variables vers le Workspace



Simulink/Sinks

Ce composant permet de créer une variable pour un signal **Simulink** et de l'exporter vers le Workspace de **MATLAB**. Il suffit de spécifier le nom de la variable (ici **Tf**) et son format. Pour exporter la variable sous la forme d'un simple vecteur il faut choisir le format **Array**.



Pour pouvoir tracer ensuite la variable **Tf** en fonction du temps, il faudra un second vecteur représentant les abscisses et qui sera constitué des différentes valeurs du temps correspondants aux pas de calcul du solveur. Cette variable est générée automatiquement par Simulink et exporter vers le Workspace. Cette variable est nommée par défaut **tout**.

Pour modifier le nom de cette variable **tout**, **cliquer** sur la configuration du solveur de Simulink  et choisir l'onglet **Data Import/Export** dans la partie gauche de la fenêtre. Remplacer **tout** par **t**.

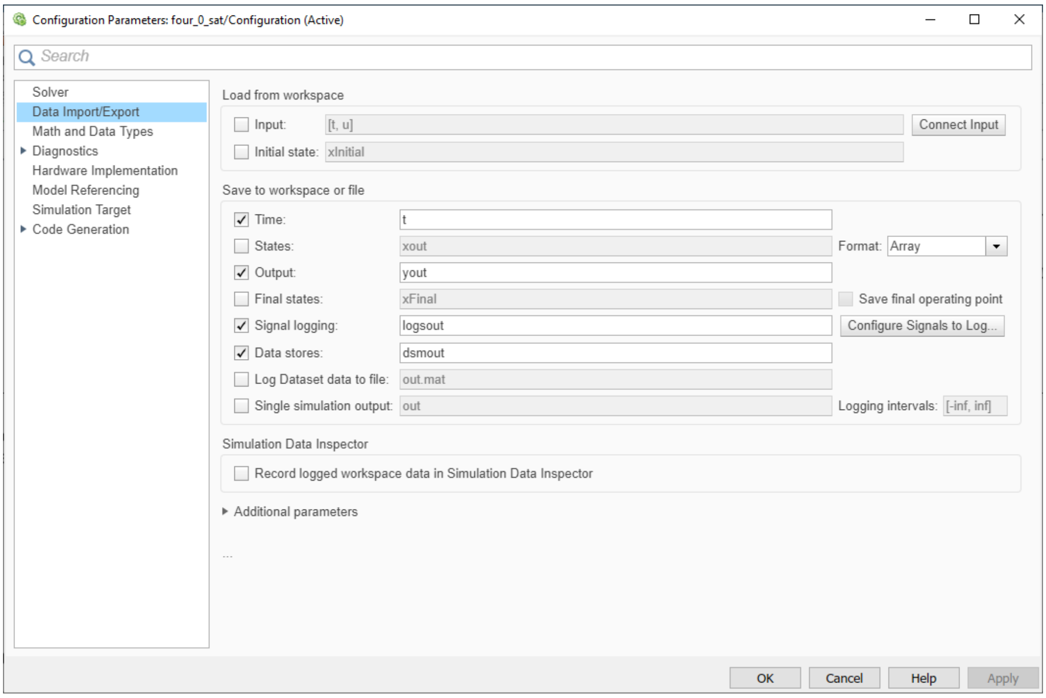


Figure 434 : fenêtre de paramétrage de l'exportation des données vers le Workspace

Enregistrer le modèle sous le nom ***four_export_name.slx***

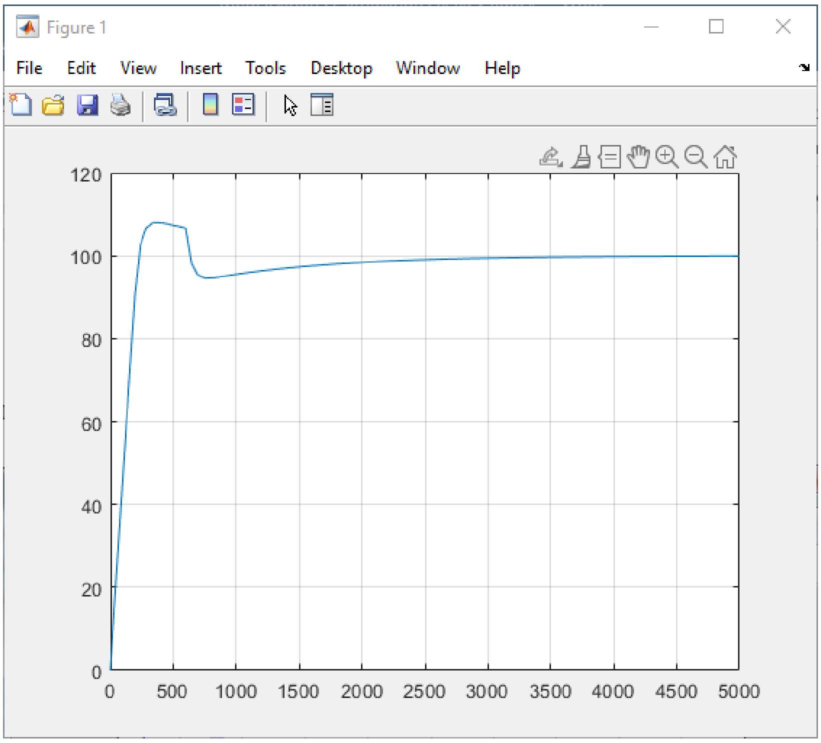
Si nécessaire, le modèle complet est disponible dans le fichier ***four_export.slx.***

Lancer la simulation.

Observer le Workspace de **MATLAB** et vérifier la création des variables t et Tf.

Dans la fenêtre de commande de MATLAB taper la commande suivante :
>>plot(t,Tf) ;grid on ;

La courbe représentant la température en fonction du temps apparaît.



1. Ecriture d'un script pour tracer une série de courbes

La commande ***sim*** permet de lancer une simulation d'un modèle Simulink à partie d'une ligne de commande. Nous allons l'utiliser pour écrire un script permettant de visualiser l'influence du gain du correcteur proportionnel.

Taper le script suivant**, enregistrer le** et **exécuter le**.

```
close all;
figure;
hold all;
grid on;
% pour Kp variant de 1 à 10 avec un pas de 1 (valeur par défaut du pas)
% exécute la simulation du fichier simulink four_import
% trace la température en fonction du temps
for Kp=1:10
    sim('four_export');
    plot(t,Tf,'LineWidth',2);
end
```

Figure 435 : script pour tracer une série de courbes

Le script est disponible dans le fichier ***script_courbes_Kcor.slx.***

Vous devez obtenir le résultat suivant.

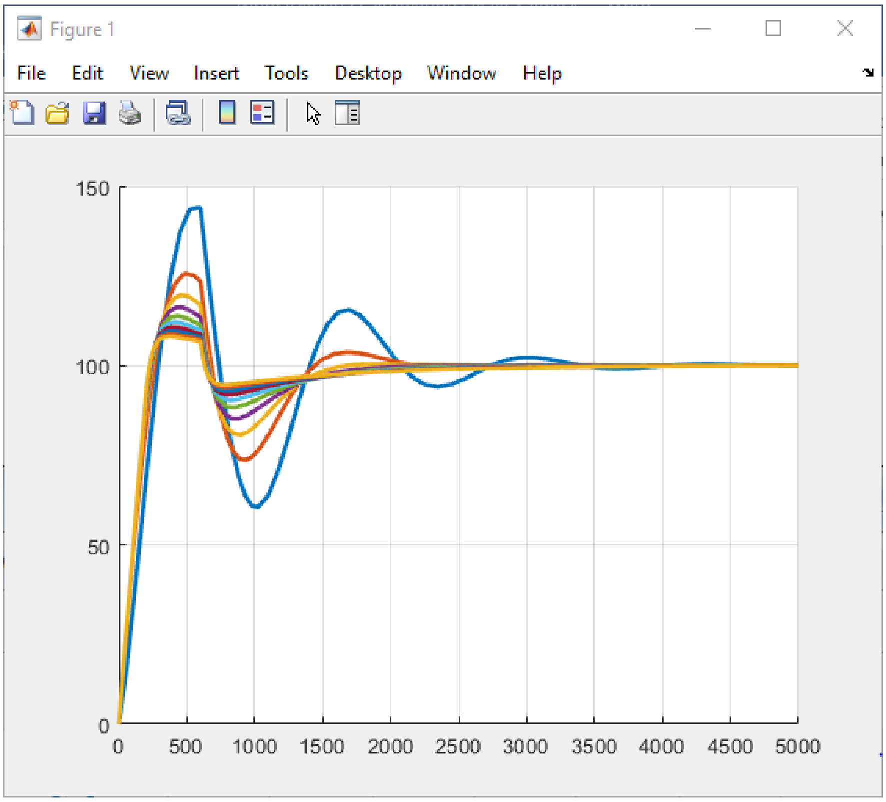


Figure 436 : influence de la correction proportionnelle sur la température du four

H. Linéarisation d'un modèle Simulink à partir d'un script

Il est souvent utile de linéariser un modèle Simulink à partir d'un script pour pouvoir exploiter les résultats.

Ouvrir le fichier **four_linearisation.slx.** Ce modèle contient le modèle du four avec les deux points de linéarisation permettant de définir la fonction de transfert en boucle ouverte (Figure 437).

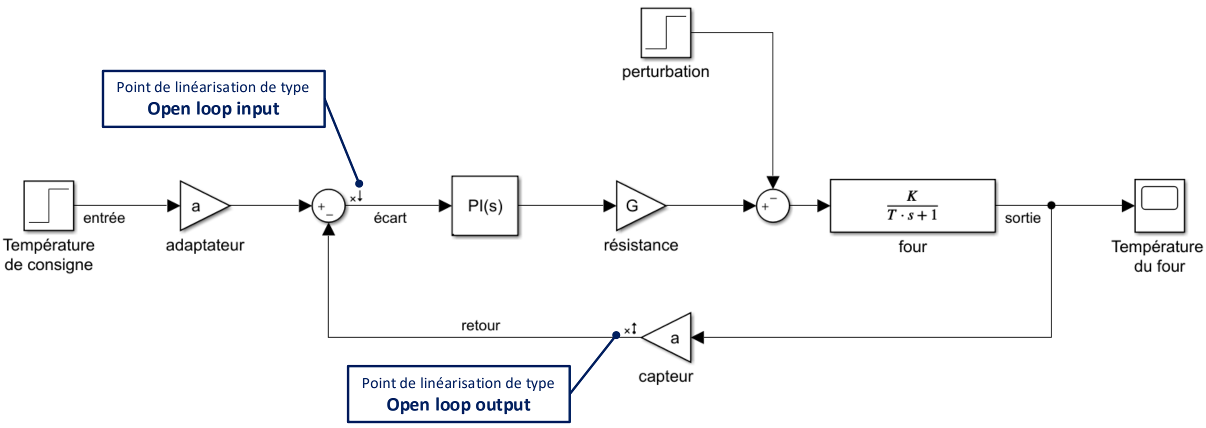


Figure 437 : modèle du four pour la linéarisation

Il est possible à partir du script de la Figure 438 de tracer le diagramme de Bode en boucle ouverte du schéma bloc Simulink (**linearisation_schema_bloc.slx**).

```
% affectation dans une variable du nom du fichier contenant le schéma bloc
% à linéariser
model = 'four_linearisation';
% récupération des points de linéarisation
io = getlinio(model);

% création de la fonction de transfert à partir des points de linéarisation
FTBO = tf(linearize(model,io));

% tracé du diagramme de BOde en boucle ouverte
bode(FTBO);
grid on;
```

Figure 438 : script permettant de linéariser un modèle Simulink

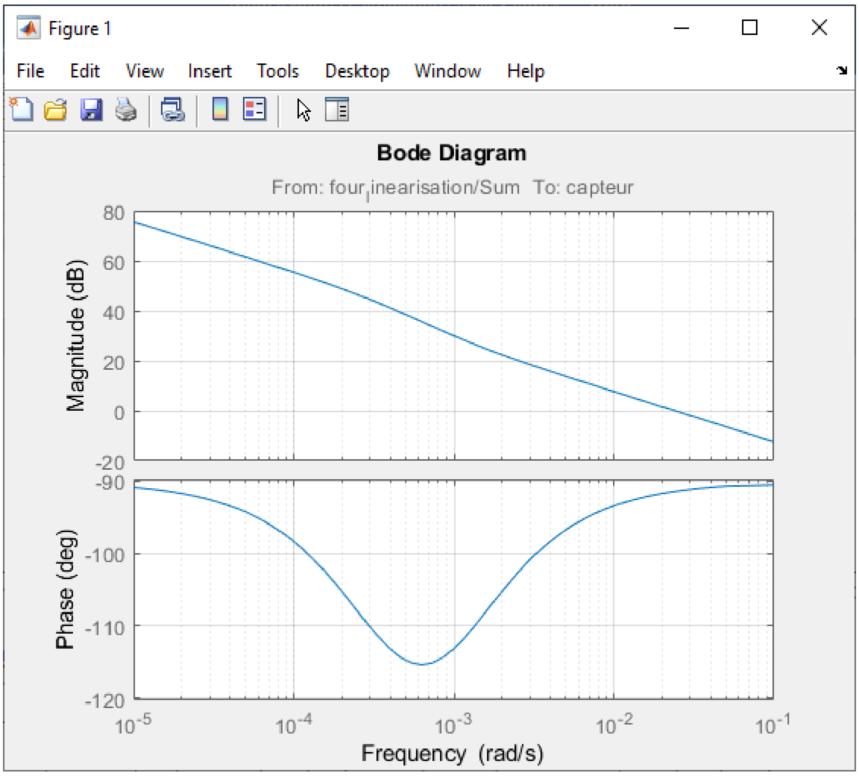


Figure 439 : diagramme de Bode obtenu en linéarisant le modèle Simulink

Le script de la Figure 440 permet de tracer une série de diagramme de Bode en faisant varier le gain du correcteur proportionnel (**linearisation_schema_bloc_courbes_Kcor.slx**).

```
% affectation dans une variable du nom du fichier contenant le schéma bloc
% à linéariser
model = 'four_linearisation';

for Kp=1:10

% récupération des points de linéarisation
io = getlinio(model);

% création de la fonction de transfert à partir des points de linéarisation
FTBO = tf(linearize(model,io));

% tracé du diagramme de BOde en boucle ouverte
bode(FTBO);hold on;
end
```

Figure 440 : script permettant de tracer une série de diagrammes de Bode en faisant varier le gain proportionnel du correcteur.

Le résultat de l'exécution du script est visible sur la Figure 441.

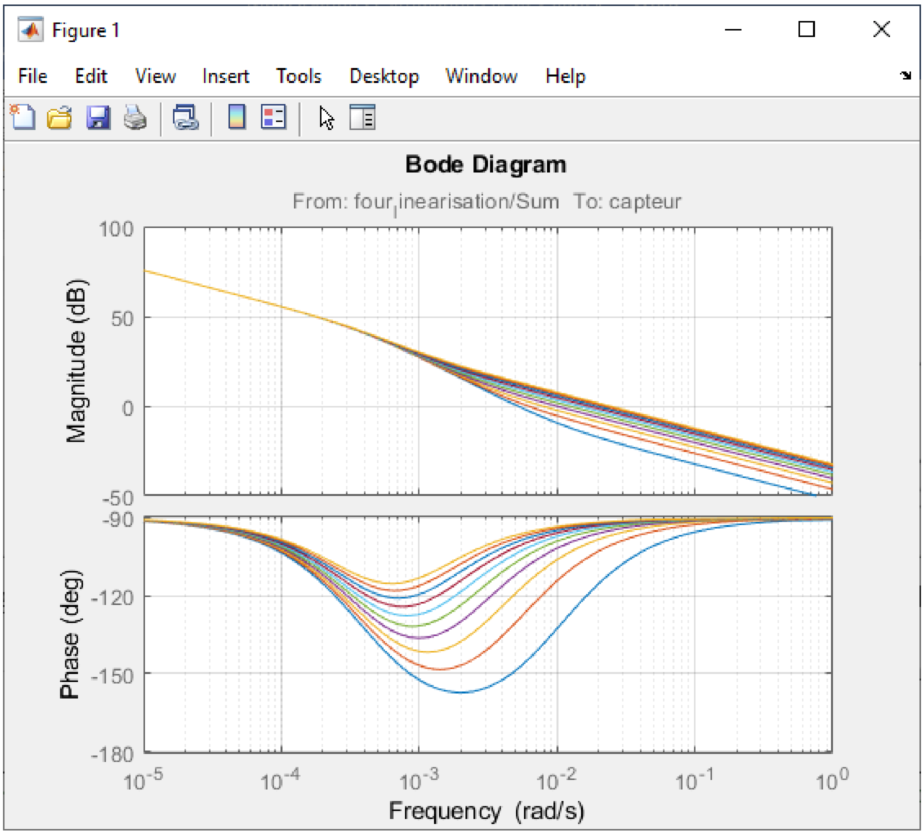


Figure 441 : diagrammes de Bode obtenus en faisant varier le gain du correcteur proportionnel

Chapitre 7 : Prise en main de Stateflow

I. Introduction à Stateflow

Stateflow est le module de MATLAB permettant de modéliser les comportements séquentiels des systèmes sous la forme de machines à états. Une machine à état est constituée « d'états » qui représentent les différents modes du système et de « transitions » qui traduisent les conditions de passage d'un état à un autre. Lors de l'activation d'un état, des actions peuvent être effectuées par le système, elles sont alors indiquées dans l'état correspondant.

A. Modélisation d'une machine à état avec Stateflow

Nous allons créer un diagramme d'état élémentaire pour modéliser la logique de la boucle de cap du pilote hydraulique de bateau.

Le système reçoit deux variables d'entrée :

- **mes_cap** : cap réel du bateau mesuré à l'aide d'un compas
- **cons_cap** : consigne de cap du bateau

Le système renvoie une variable de sortie. :

- **cons_barre** : consigne angulaire de la barre du bateau

Afin de ne pas solliciter la batterie du pilote en permanence, la correction de cap ne se fera qu'à partir du moment ou l'erreur de cap atteint un seuil de 1°.

Le graphe d'état comporte 3 états distincts :

Etat « Pause »
Le système est dans cet état si l'erreur de cap est inférieure à 0.1°. Le pilote hydraulique maintient la consigne de barre à 0° tant que l'erreur de cap ne dépasse pas 0.1°. En cas de dépassement de ce seuil, le système entre dans l'état « Temporisation ».

Etat « Temporisation »
Le système entre dans cet état si l'erreur de cap a dépassé le seuil de 0.1°. Si l'erreur de cap se maintient pendant 20s au-dessus de 0.1°, le système passe dans l'état « correction de cap ». Si durant ces 20s, l'erreur de cap repasse sous le seuil de 0.1°, le système retourne dans l'état « Pause ».

Etat «Correction de cap »
Le pilote hydraulique corrige le cap du bateau, la consigne de barre est obtenue à partir de l'erreur de cap. Le système sort de l'état « Correction de cap » et entre dans l'état « Pause » quand l'erreur de cap redevient inférieure à 0.05°.

B. Construction du diagramme d'état

1. Ouverture du modèle

Ouvrir le modèle ***pilote_hydraulique_stateflow_0.slx***.
Ce modèle contient la modélisation du pilote hydraulique de bateau à l'exception du diagramme d'état qui gère la boucle de cap.

Double cliquer sur le sous-système « chaine d'information » et observer le diagramme à compléter sur la Figure 442.

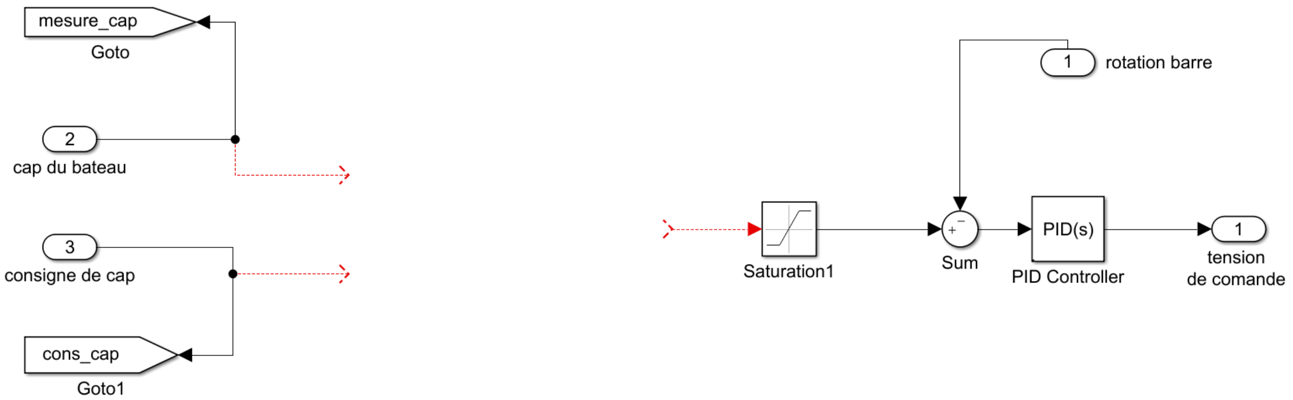


Figure 442 : boucle de cap sans le diagramme d'état

On observe sur le modèle que la boucle de cap ne comporte pas de logique de commande, nous allons modéliser cette logique de commande à l'aide d'un diagramme d'états.

2. Insertion d'un « chart »

Le composant qui permet de construire un diagramme d'état s'appelle un « chart ». C'est lui qui va contenir les états et les transitions.
Insérer un nouveau « chart » à partir de la bibliothèque **Stateflow** (Figure 443).

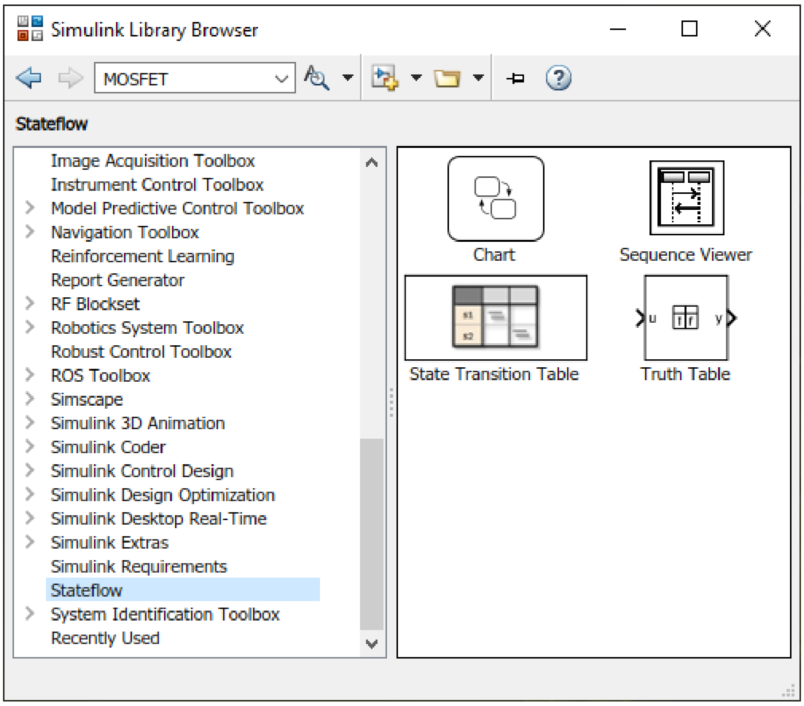
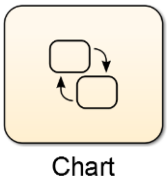


Figure 443 : bibliothèque Statflow

Fonction du composant	Représentation	Bibliothèque
Chart		Statflow

Positionner et **redimensionner** le chart pour obtenir la configuration de la Figure 444.

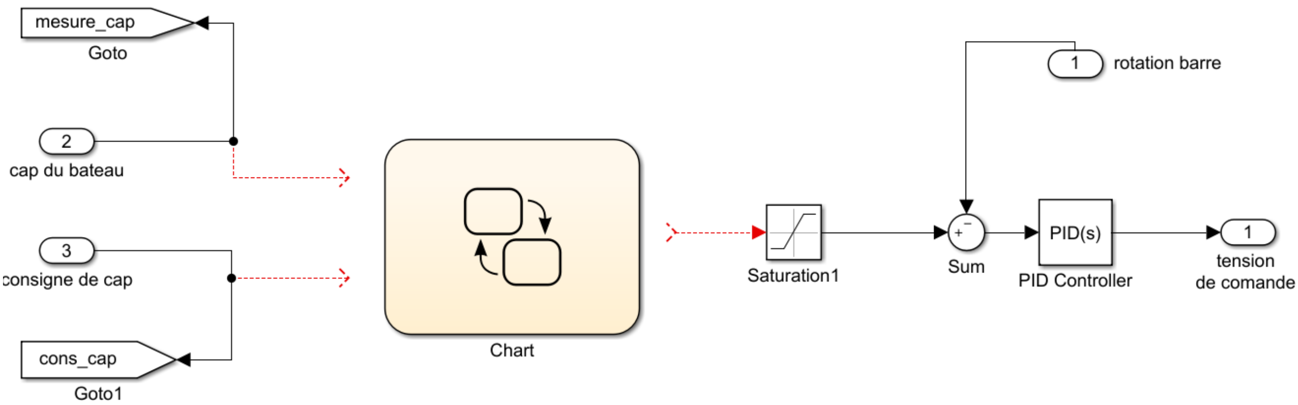


Figure 444 : positionnement d'un chart dans un modèle Simulink

On remarque que pour l'instant le « chart » ne possède aucune entrée/sortie. Elles seront définies ultérieurement.

C. Création d'un diagramme d'état élémentaire

Double cliquer sur le « chart » pour ouvrir l'environnement **Stateflow**.
La barre de commande **Stateflow** apparait à gauche de la fenêtre avec en particulier les commandes qui permettent de créer un état et une « transition par défaut ».

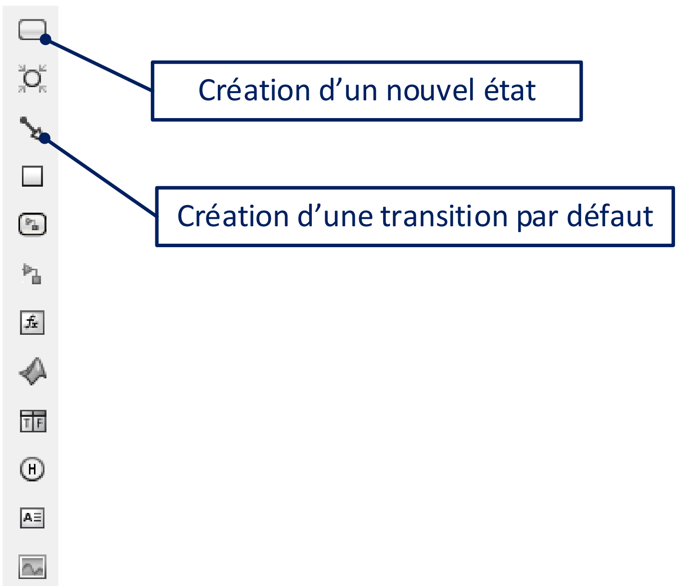


Figure 445 : commande de création d'un état et d'une « transition par défaut »

A partie de l'onglet MODELING, cliquer sur **Symbols Pane** afin de faire apparaitre la fenêtre du **Symbols Pane**.

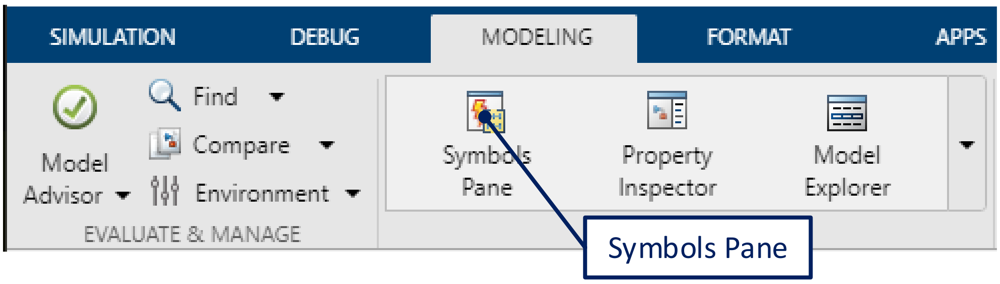


Figure 446 : ouverture de la fenêtre Symbols

La fenêtre **Symbols** apparaît alors sur la partie droite de l'écran. Cette fenêtre permettra de visualiser la nature des variables utilisées dans la conception du graphe d'état avec Stateflow.

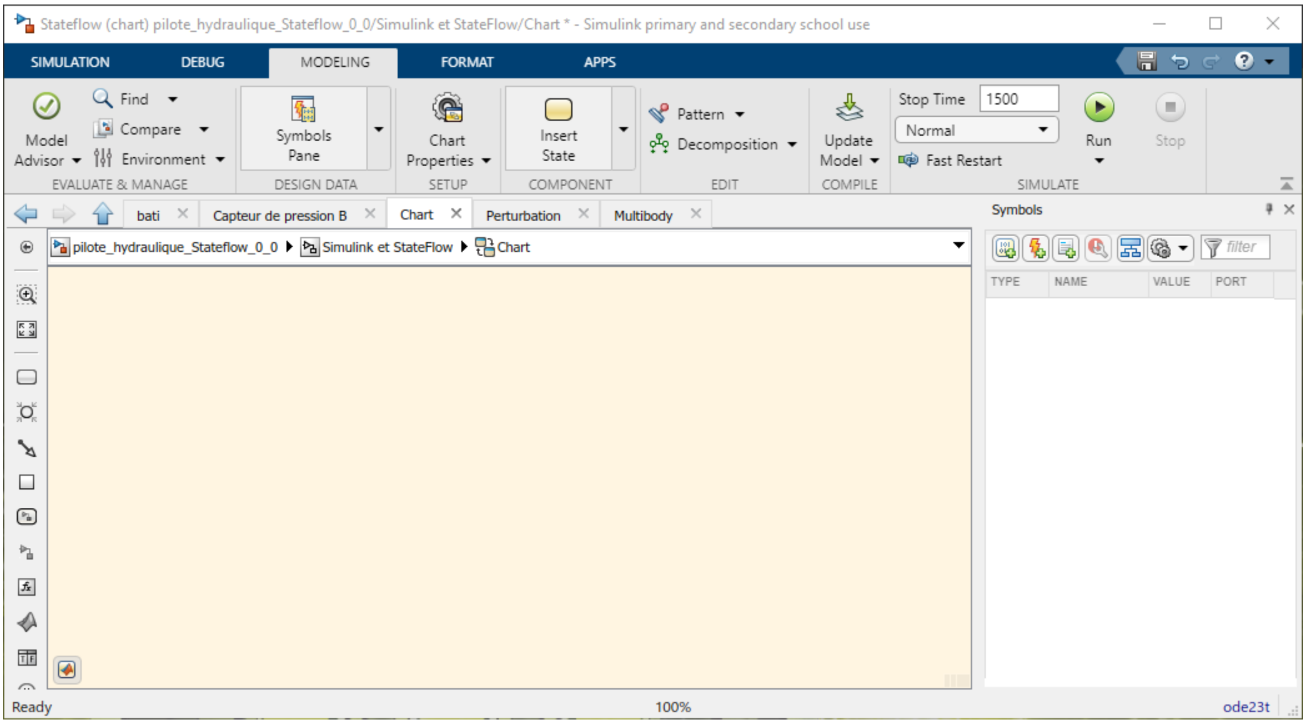


Figure 447 : environnement de travail de Stateflow

1. Création des états

Il est maintenant possible de créer les états pour programmer la logique du système.
A l'aide de la commande de création d'un nouvel état, placer et nommer les trois états conformément à la Figure 448. Pour cela **cliquer** avec le bouton gauche de la souris sur la commande de création d'un nouvel état et faire glisser l'état dans la fenêtre de travail. Lors de la création du premier état, une transition par défaut est automatiquement ajoutée.

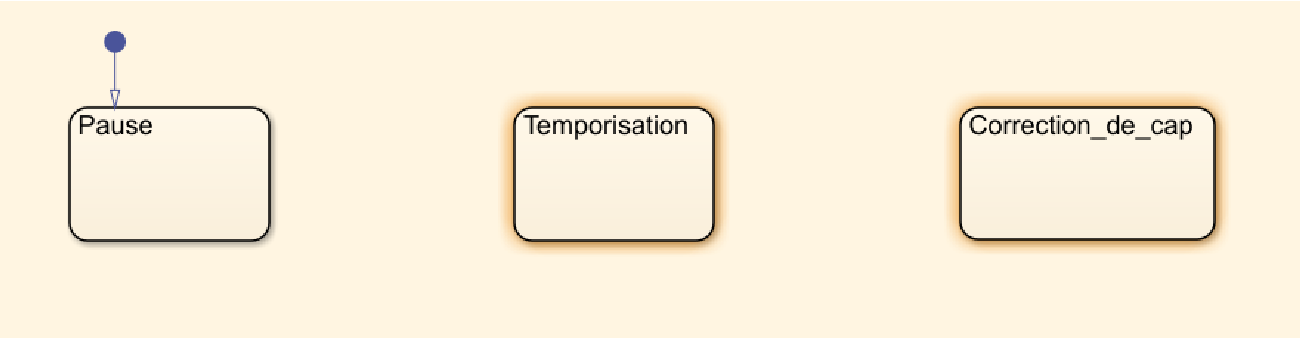


Figure 448 : création des états du système

Dans cet exemple, nous allons commencer par travailler avec des états **exclusifs**, c'est-à-dire qu'à chaque pas de temps, un seul état pourra être actif. Nous verrons par la suite qu'il est également possible de créer des états **parallèles** qui pourront être activés simultanément.

2. Création d'une transition par défaut

Placer une transition par défaut sur l'état « Pause ». La transition par défaut permet d'activer un état en début de simulation. La présence d'une **transition par défaut** dans le diagramme est **indispensable**.

Figure 449 : création d'une transition par défaut

3. Création des transitions

Pour créer une transition, déplacez le curseur de souris sur le bord de l'état de départ de la transition. Lorsqu'il prend la forme d'une croix, cliquer avec le bouton gauche et glisser avec le curseur jusqu'à l'état destination de la transition.
Créer les transitions pour obtenir la configuration de la Figure 450
Les transitions sont munies de poignées invisibles qui permettent de leur donner la forme souhaitée. Pour les déformer, cliquer avec le bouton gauche de la souris sur la transition et utiliser le glisser déposer.

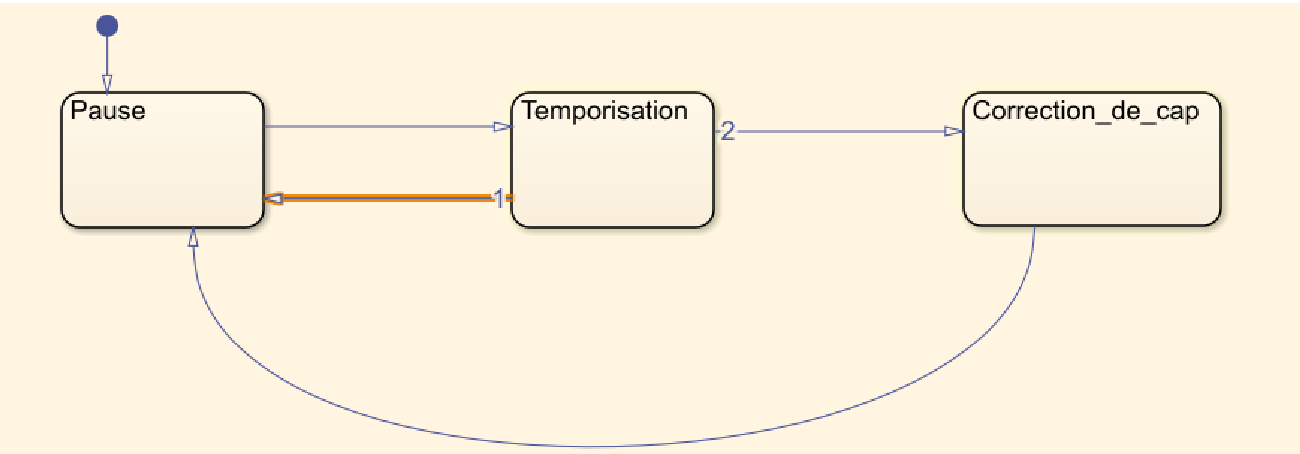


Figure 450 : création des transitions entre les états

4. Création des actions dans les états

Il faut maintenant affecter à chacun des états les actions à imposer au système.
Pour cela il faut utiliser un mot clé d'action qui déterminera le moment où l'action sera exécutée.

Les mots clés usuels sont :

- **entry** (ou **en**) : l'action sera exécutée uniquement lors de l'activation de l'état
- **exit** (ou **ex**) : l'action sera exécutée uniquement lors de la désactivation de l'état
- **during** (ou **du**) : l'action sera exécutée à chaque pas de temps tant que l'état est actif.

Si aucun mot clé n'est spécifié, par défaut l'action sera de type **entry,during** et sera exécutée à la fois lors de l'activation de l'état et à chaque pas de temps tant que l'état est actif.
Compléter les actions des états conformément à la Figure 451.

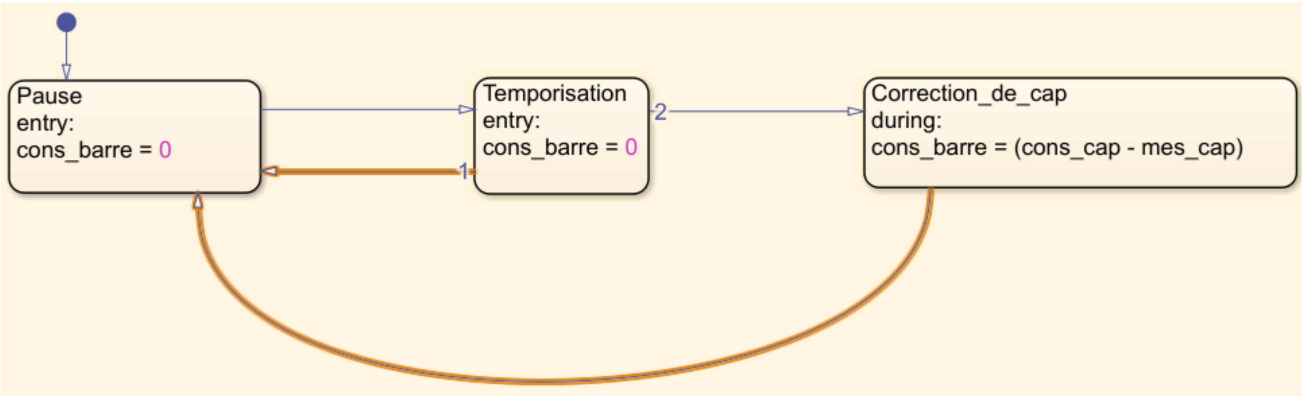
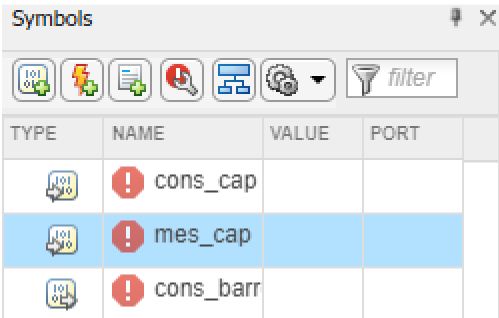


Figure 451 : affectation des actions dans les états

Pour l'état « **Pause** » et « **Temporisation** », l'utilisation du mot clé **entry** impose l'action cons_cap=0, uniquement à l'activation de l'état. La variable **cons_barre** reste à 0 et ne varie pas quand ces états sont actifs. Par contre lorsque le système est dans l'état « **Correction_de_cap** », la variable **cons_barre** doit être modifiée continuellement lors de l'évolution du cap du bateau d'où la nécessité d'utiliser le mot clé **during**.



5. Création des étiquettes de transitions

Il faut maintenant définir les conditions qui permettront de passer d'un état à un autre. Les étiquettes de transitions représentent des conditions logiques qui doivent être vérifiées pour permettre le passage d'un état à un autre.

Les informations présentes dans l'étiquette de transition peuvent être de différentes natures (Figure 452).

Une condition	[ ]
Un évènement	⚡
Une action de condition	{ }
Un commentaire	**% commentaires**

Figure 452 : nature des informations d'une étiquette de transition

Pour créer une étiquette de transition, double cliquer sur la transition pour faire apparaître le menu ⚡ [ ] { } vous permettant de sélectionner la nature de l'information que vous souhaitez indiquer dans la transition. Cliquer alors sur [ ] puisque nous allons saisir des **conditions** sur chacune des transitions.

Pour déplacer une étiquette de transition, utiliser un simple glisser déposer avec le bouton gauche de la souris.

Créer les étiquettes des transitions conformément à la Figure 453.

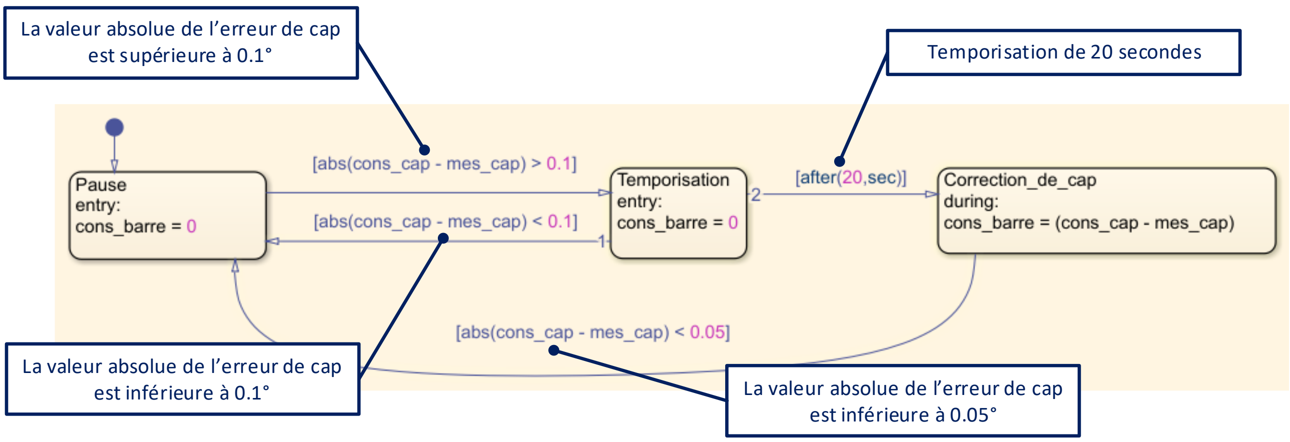


Figure 453 : écriture des étiquettes de transitions dans un diagramme d'états

Les étiquettes de transitions offrent d'autres possibilités qui sont décrites page 368.

6. Définitions des variables d'entrée et de sortie du diagramme d'état

Si nous retournons dans le sous-système représentant la chaîne d'information, nous remarquons que le chart ne dispose pas d'entrée et de sortie pour être connecté avec le système.

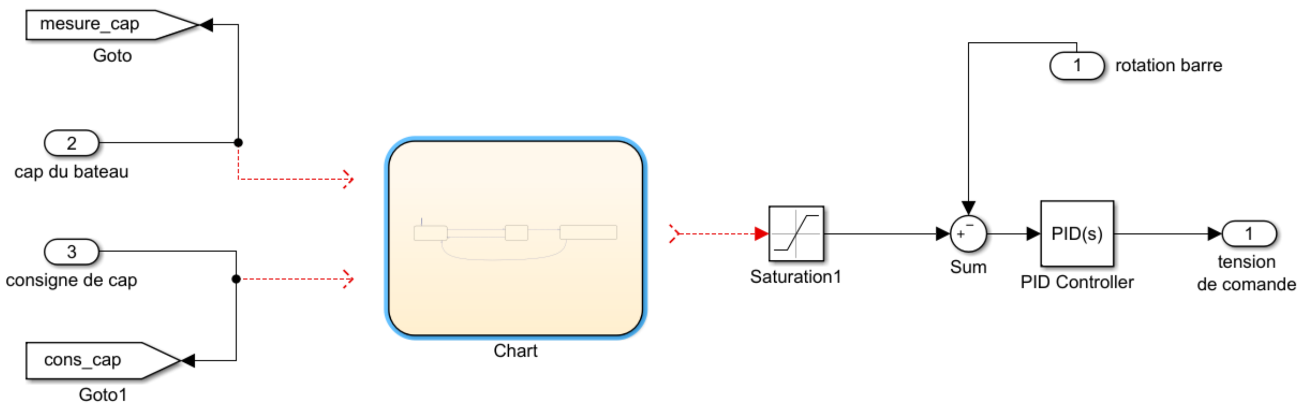


Figure 454 : chart non connecté avec le modèle

Nous pouvons également constater que la fenêtre Symbols montre que la configuration des entrées et sorties de notre système de commande n'est pas encore totalement définie.

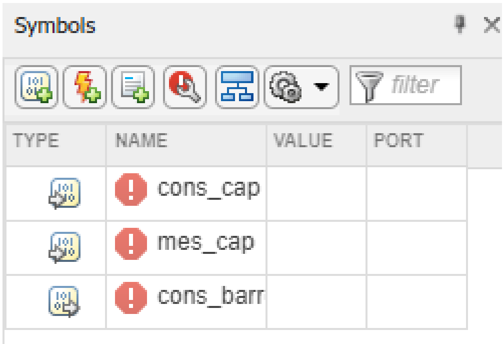


Figure 455 : fenêtre Symbols avec paramétrage incomplet des entrées/sorties

Il existe plusieurs moyens de créer les variables d'entrée et de sortie. Le plus simple est de lancer la simulation, **Stateflow** proposera automatiquement une affectation pour les entrées et les sorties du chart en fonction de la logique qui vient d'être programmée.

Lancer la simulation du modèle.
Un message d'erreur apparaît indiquant que la simulation est impossible et la fenêtre du **Symbol Wizard** s'ouvre en proposant une affectation des variables par défaut.
Vérifier que les affectations proposées par défaut correspondent bien à la logique de commande du système. Si nécessaire, il est possible de modifier les affectations à l'aide des menus déroulants.

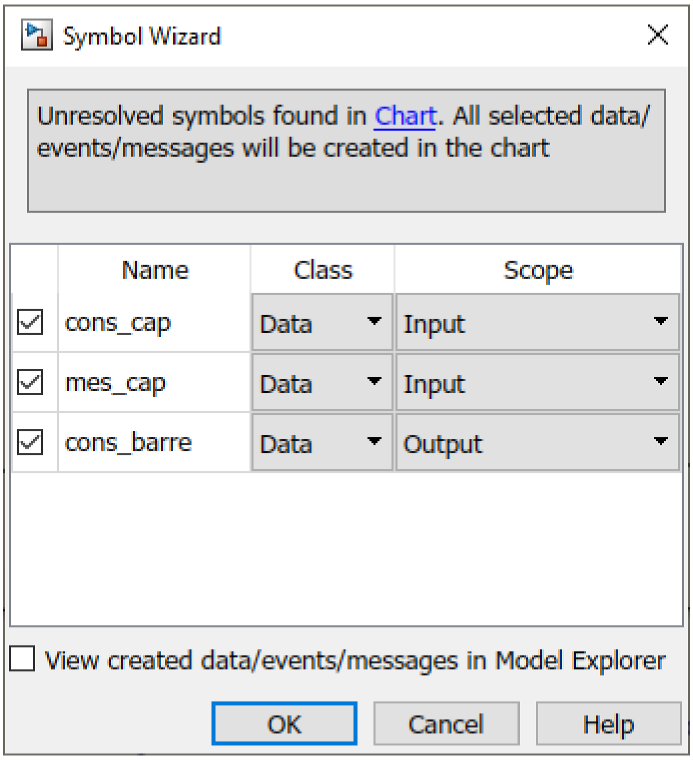


Figure 456 : affectation des variables du diagramme à l'aide du Symbol Wizard

Nous constatons que la fenêtre Symbols indique maintenant que la configuration des entrées et des sorties du modèle Stateflow est finalisée. Cette fenêtre permet de créer rapidement une variable supplémentaire ou un évènement (Figure 457).

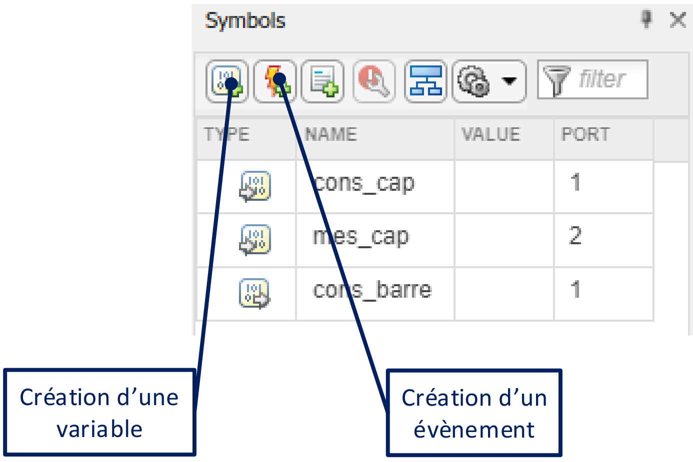


Figure 457 : la fenêtre Symbols

De manière générale, il est également possible de visualiser en détail, les variables du modèle, à l'aide de la fenêtre du **Model Explore.** Il est possible d'ouvrir le **Model Explorer** (Figure 458) pour modifier les caractéristiques d'une variable en cliquant sur  dans la barre de commande principale (onglet MODELING). L'arborescence située sur la partie gauche de la fenêtre permet de naviguer dans le système.

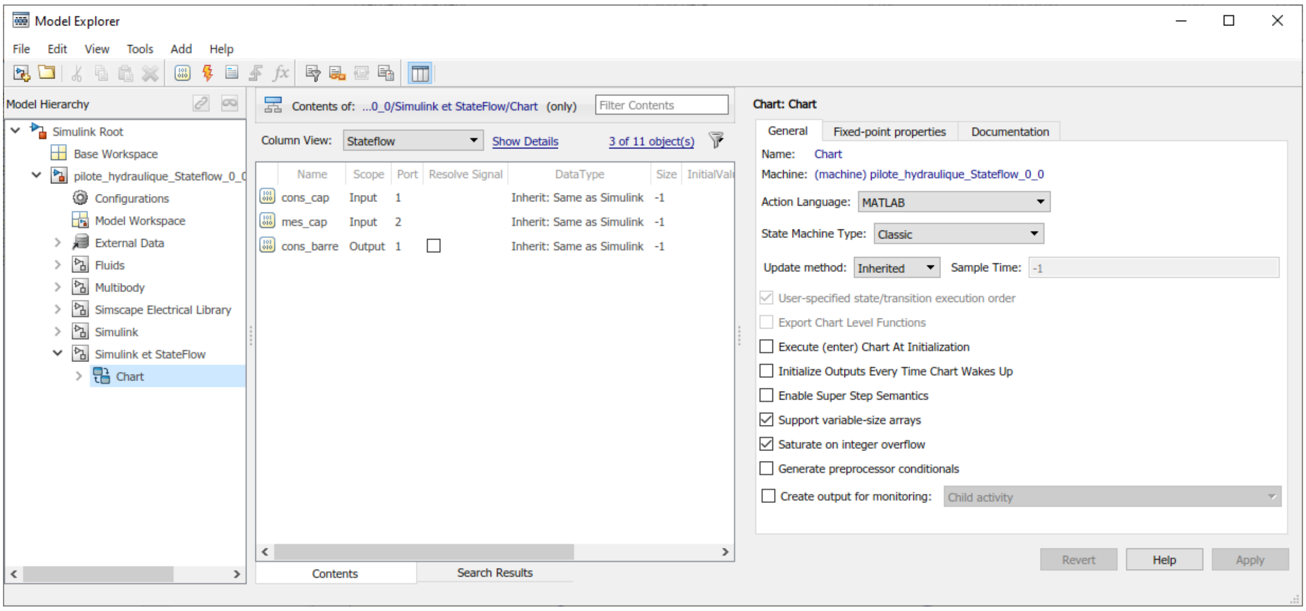


Figure 458 : visualisation des variables dans le Model Explorer

Il est possible de modifier les caractéristiques des différentes variables. Vous pouvez également revenir à tout moment dans le **Model Explorer** pour modifier les caractéristiques d'une variable en cliquant sur  dans la barre de commande principale.

Revenir dans le sous-système représentant la chaîne d'information pour visualiser les connexions qui apparaissent sur le Chart. Une prévisualisation du digramme d'état est visible par défaut dans le Mask du sous-système.

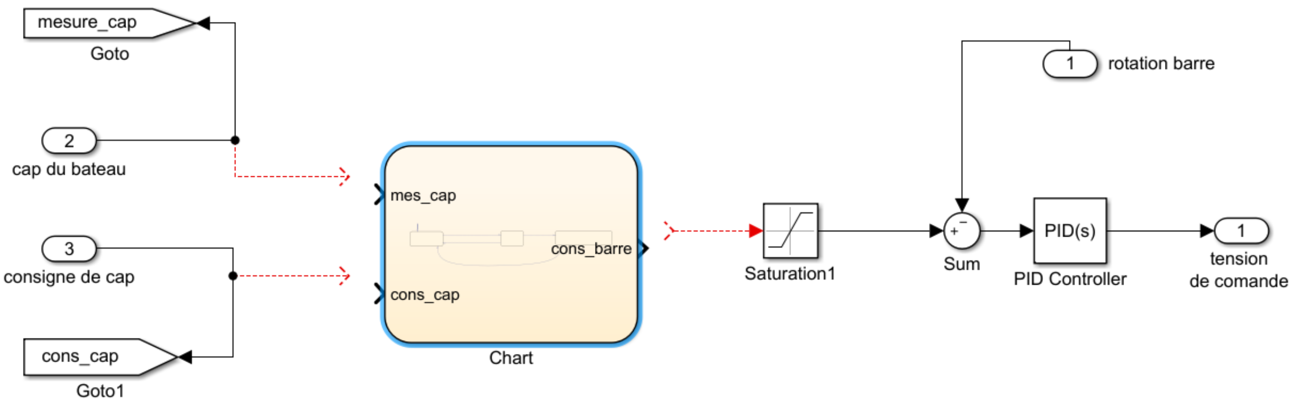


Figure 459 : chart avant connexion avec le système

Les connexions étant créées automatiquement, elles peuvent se positionner différemment sur le chart. Vérifiez que la consigne de cap sera bien reliée à cons_cap et que la mesure de cap sera bien reliée à mes_cap.
Si les connexions sont inversées, elles peuvent être modifiées dans la fenêtre **Symbols** Figure 460.

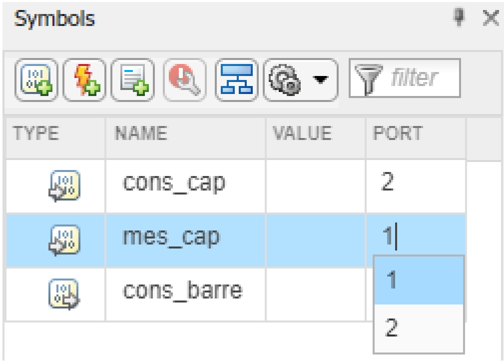


Figure 460 : inversions de la position des ports

Cette opération peut également être réalisée à l'aide du **Model Explorer** ou l'on peut également indiquer les bons numéros de port comme indiqué sur la Figure 461.

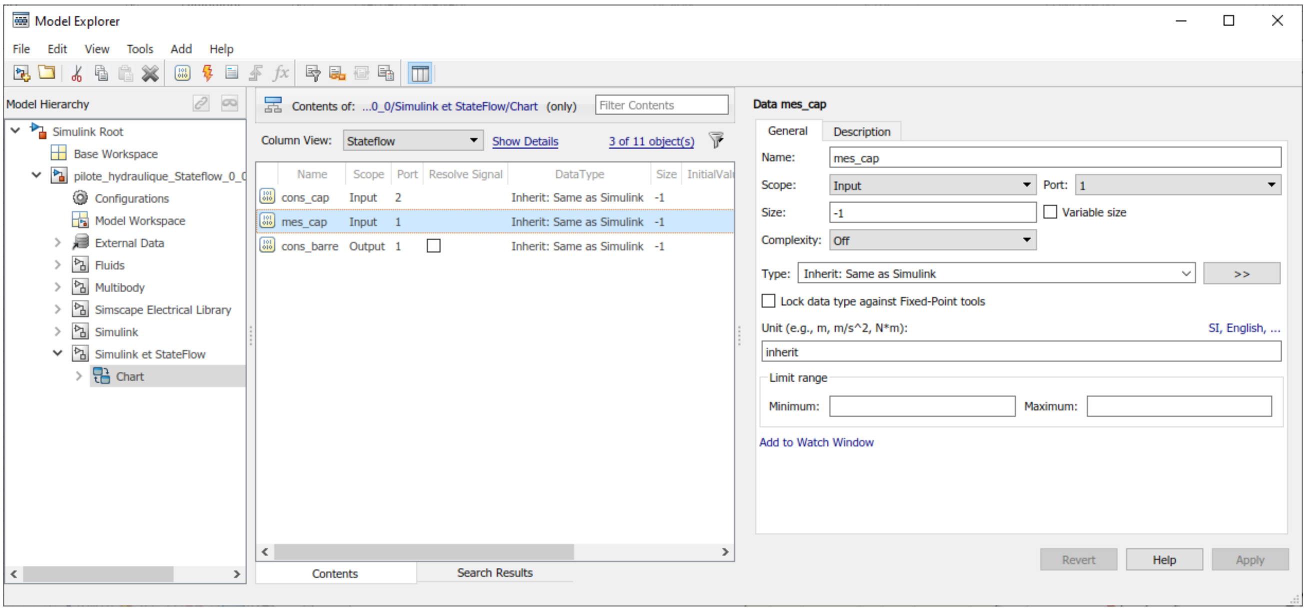


Figure 461 : modification des numéros de port d'un chart

Connecter le chart avec le schéma bloc Simulink conformément à la Figure 462.

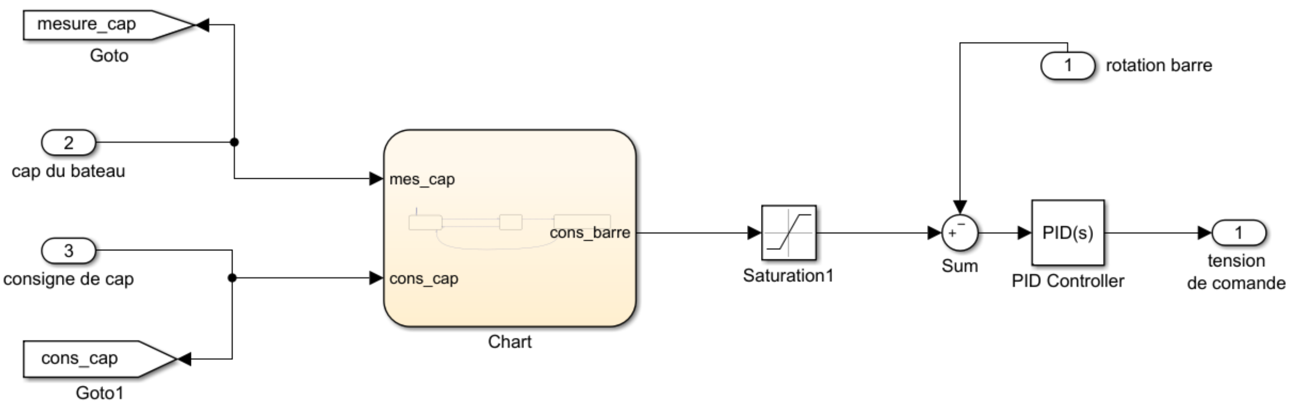


Figure 462 : connexion du chart avec le schéma bloc Simulink

7. Simulation du diagramme d'états

Lancer la simulation et observer le suivi du cap en visualisant le scope donnant la consigne de cap et le cap effectif suivi par le bateau.

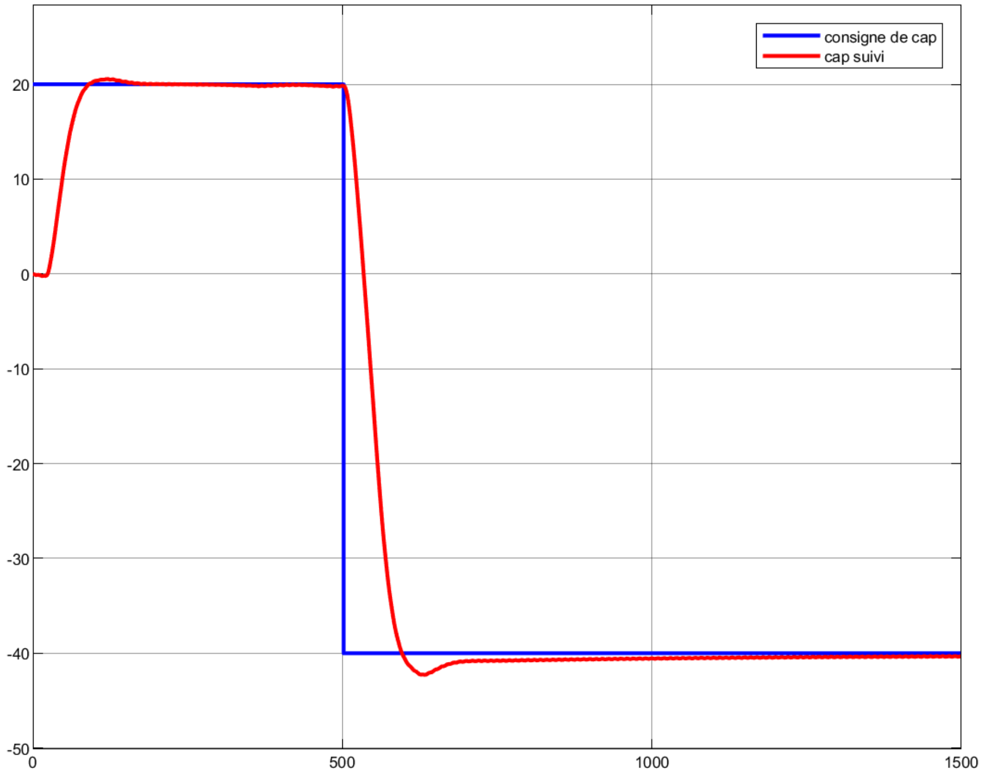


Figure 463 : résultat de la simulation

D. Architecture des machines à états

1. La hiérarchie des états

Le diagramme d'état précédemment établi comporte 3 états de même niveau. Aucune hiérarchie n'est présente entre ces états. Afin de pouvoir modéliser des comportements logiques plus complexe **Stateflow** utilise le concept de **super-état**.
Un super état est un état qui peut contenir d'autres états de niveaux hiérarchiques inférieurs appelés **sous-états**.

- **Super-état** : état parent contenant d'autres états
- **Sous-états** : état enfant contenu dans un état parent. Les sous-états ne peuvent être actifs uniquement si l'état parent est actif.

L'utilisation de super-états et de sous-états permet d'améliorer la lisibilité des modèles. Il n'y a pas de limitation dans le nombre de niveaux hiérarchiques que l'on peut construire dans un diagramme.

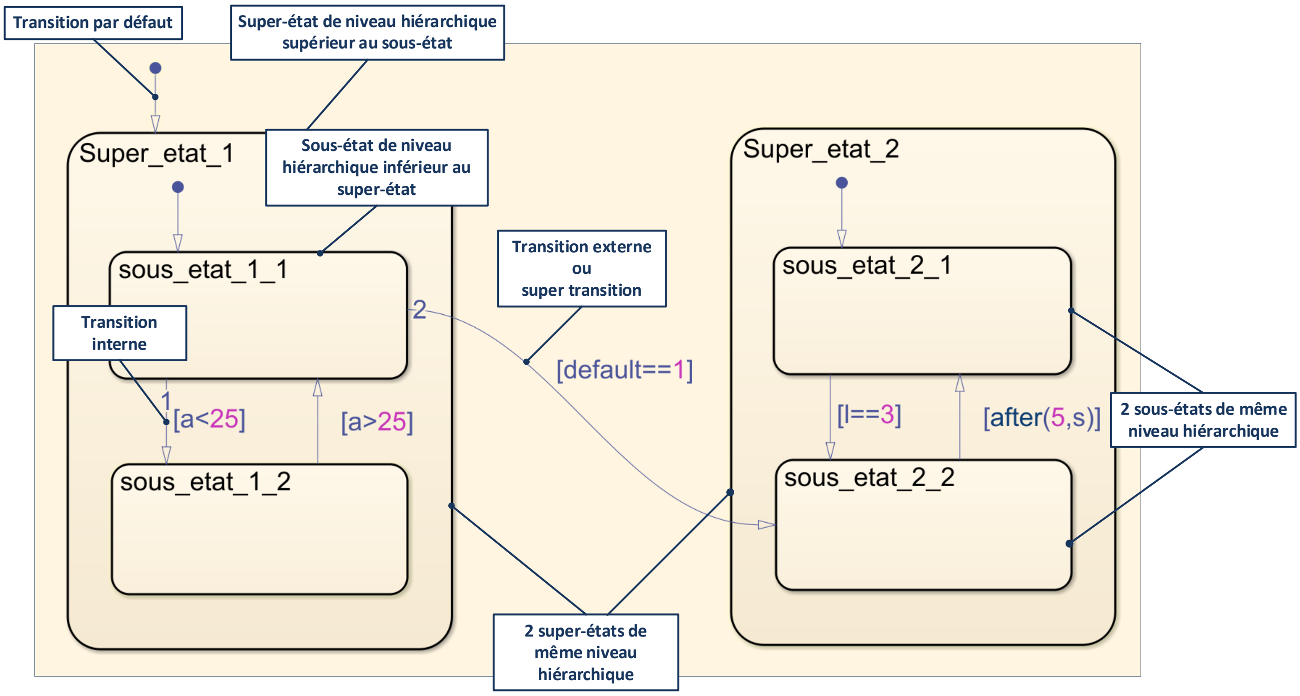


Figure 464 : représentation de super-état et de sous-état

2. Les priorités de test des transitions

Ces architectures plus complexes nécessitent des précisions sur les règles d'évolution et sur la priorité de test des différentes transitions.

On définit :

- les **transitions internes** : une transition qui ne traverse pas les bordures de l'état ou qui est englobée par l'état
- les **transitions externes ou super transition** : une transition qui traverse les frontières de l'état

Règles de test des transitions :

- les transitions externes sont testées avant les transitions internes

3. Etats parallèles

A chaque niveau de la hiérarchie, les sous-états peuvent être **parallèles** ou **exclusifs.**

- **Si le sous-état est exclusif** : un seul et unique sous-état ne peut être actif au sein d'un même niveau hiérarchique (à condition que le super-état parent soit actif)
- **Si l'état est parallèle** : tous les sous-états d'un même niveau hiérarchique sont actifs simultanément (à condition que le super-état parent soit actif). Il n'est pas possible de définir une transition vers ou depuis un état parallèle, puisque son activation sera conditionnée exclusivement par l'activation de son état parent.

Dans **Stateflow**, les états parallèles s'affichent avec des bords en pointillés.

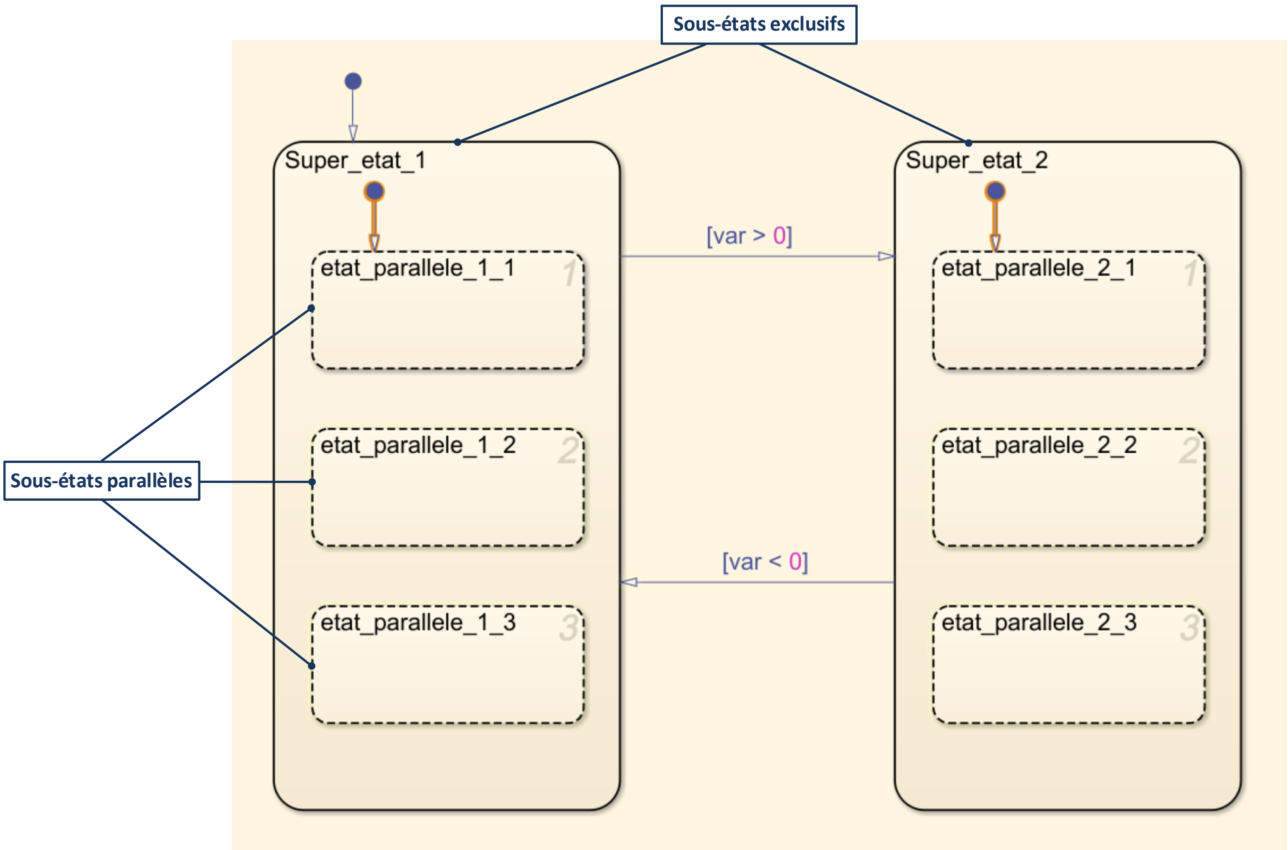


Figure 465 : représentation de sous-états parallèles

E. Ajout de niveaux hiérarchique et d'états parallèles dans un diagramme d'état

Nous allons reprendre le diagramme d'état de la commande de cap du pilote hydraulique de bateau en ajoutant de nouvelles fonctionnalités.
Lorsque le pilote est en mode « correction_de_cap », un voyant rouge doit s'allumer pour signaler aux utilisateurs que le pilote automatique consomme de l'énergie.
L'allumage de ce voyant sera géré dans l'état « Gestion_voyant ». Une variable « voyant_rouge » sera à 1 lorsque le voyant sera allumé et à 0 lorsque le voyant sera éteint.

Créer les super-états « **Suivi_de_cap** », « **Gestion_voyant** » et « **Commande_de_cap** » en respectant la hiérarchie de la Figure 466. La procédure de création d'un super-état est la même que la procédure de création d'un état. Il faut être attentif à positionner les contours de l'état parent autour des états enfants. **StateFlow** prend en compte automatiquement la hiérarchie entre les états à partir de leur positionnement dans la fenêtre graphique. Si un conflit empêche **Stateflow** d'établir une hiérarchie sans ambiguïté entre les états, les états qui posent un problème apparaissent en rouge.

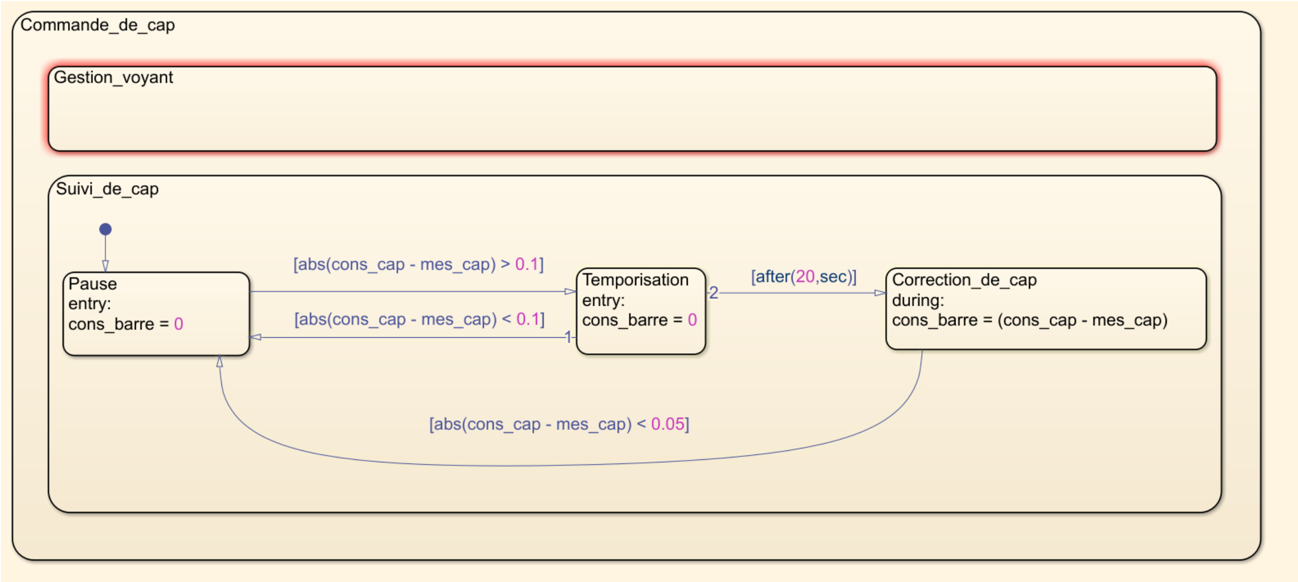


Figure 466 : création de super-états

L'état « **commande_de _cap** » possède 2 états enfants :

- « **Gestion_voyant** »
- « **Suivi_cap** »

Ces états enfants doivent être des états **parallèles** puisque l'allumage du voyant doit se faire pendant que l'état « **Suivi_de_cap »** est actif. Le bon fonctionnement du système de commande impose que les deux états enfants soient actifs simultanément lorque l'état « **commande_de_cap** » est activé.

L'état « **Suivi_de_cap** » possède 3 états enfants :

- « **Pause** »
- « **Temporisation** «
- « **Correction_de_cap »**

Ces états enfants doivent être des états **exclusifs** puisque ces états doivent être activés successivement lorsque l'état parent « **Suivi_de_cap »** est activé. Un seul et unique de ces états enfants sera actif.

Pour indiquer à **Stateflow** que les états enfants de l'état parent « **Commande_de_cap** » seront des états parallèles, **cliquer** avec le bouton droit de la souris à l'intérieur de l'état « **Commande_de_cap** », mais à l'extérieur des états enfants (Figure 467). Dans le menu contextuel choisir **Decomposition/parallel**.

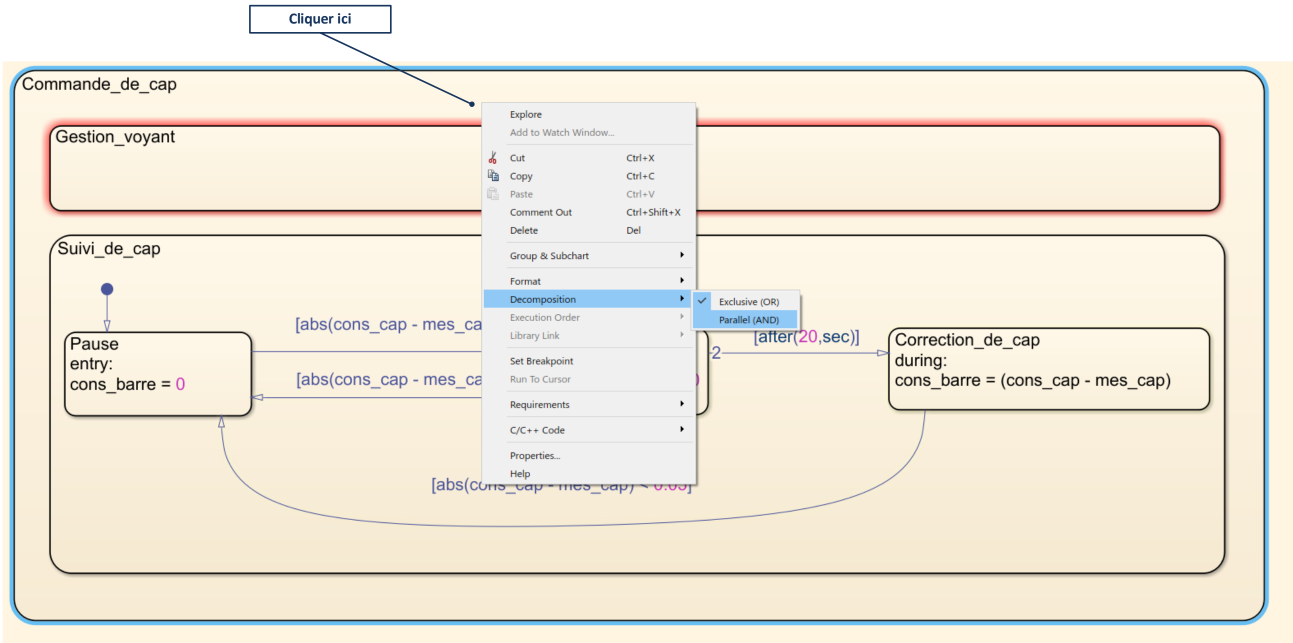


Figure 467 : créer des sous-états parallèles

Les états parallèles apparaissent maintenant en pointillés.

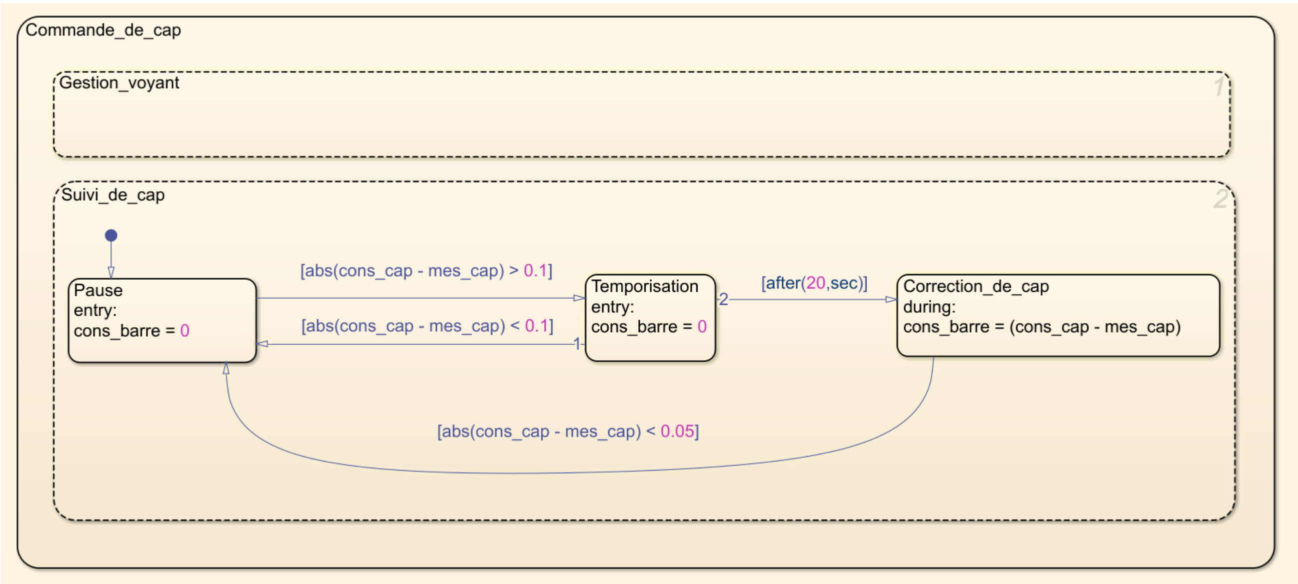


Figure 468 : représentation des états parallèles dans Stateflow

Il faut maintenant indiquer que la variable « voyant_rouge » sera à 1 lorsque l'état « **Correction de cap »** sera actif.
Pour cela **Stateflow** dispose de variables internes qui caractérisent l'activation des états.
La commande *in(nom_de_l_etat)* renvoie la valeur 1 quand l'état est actif et la valeur 0 quand l'état est inactif.

Le nom d'un état est constitué de toute l'arborescence hiérarchique des états parents.

Compléter l'état « **Gestion_voyant** » comme indiqué sur la Figure 469.

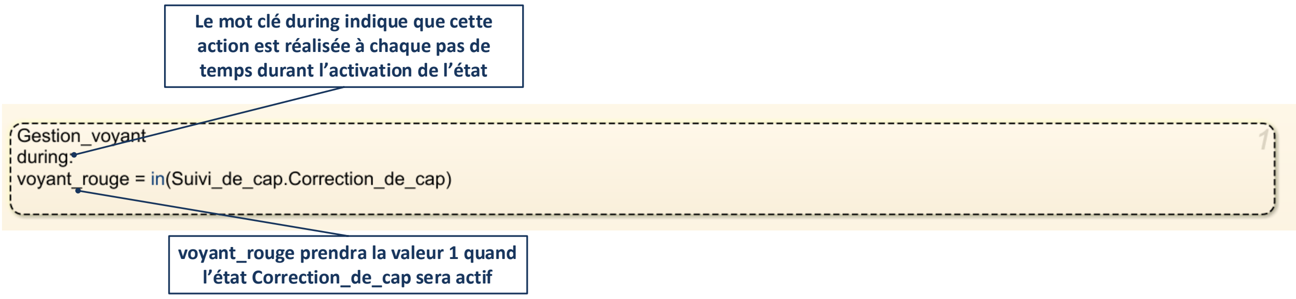


Figure 469 : utilisation de variables internes pour évaluer l'activation d'un état

En utilisant le Symbols Pan indiquer que la variable voyant_rouge est de type Output Data

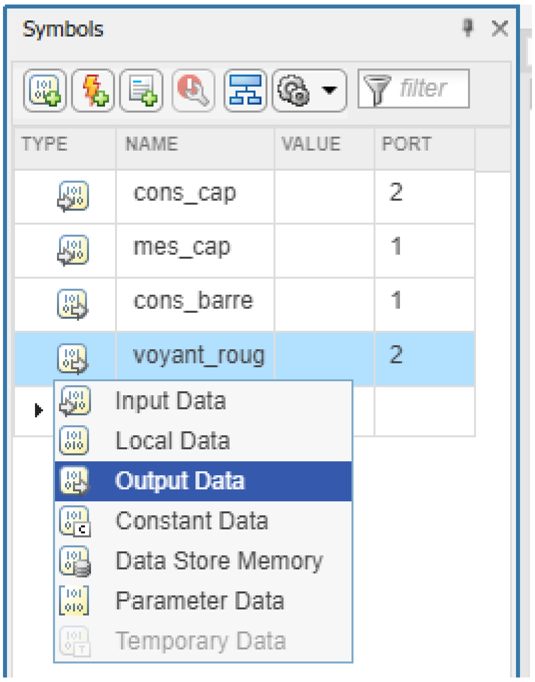


Figure 470 : paramétrage de la variable voyant_rouge

Avant de lancer la simulation, il faut ajouter une « transition par défaut » sur l'état « **Commande_de_cap** » afin d'activer le diagramme au démarrage.

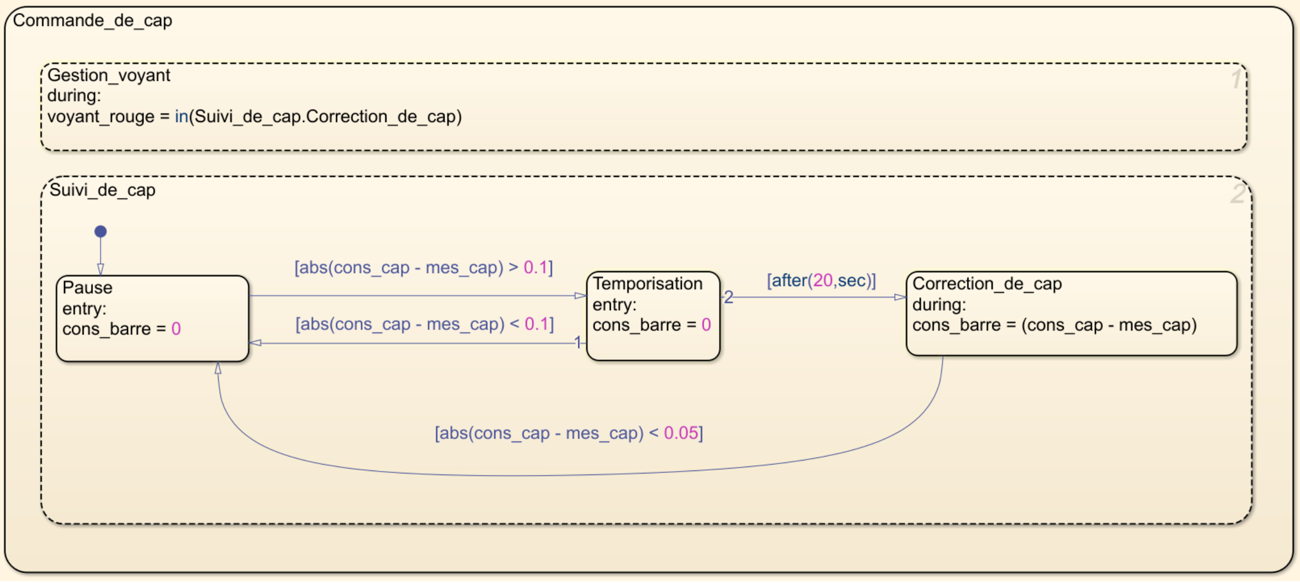


Figure 471 : chart complet de commande de cap avec super-états et états parallèles

Connecter la variable de sortie voyant_rouge à un scope pour la visualiser.

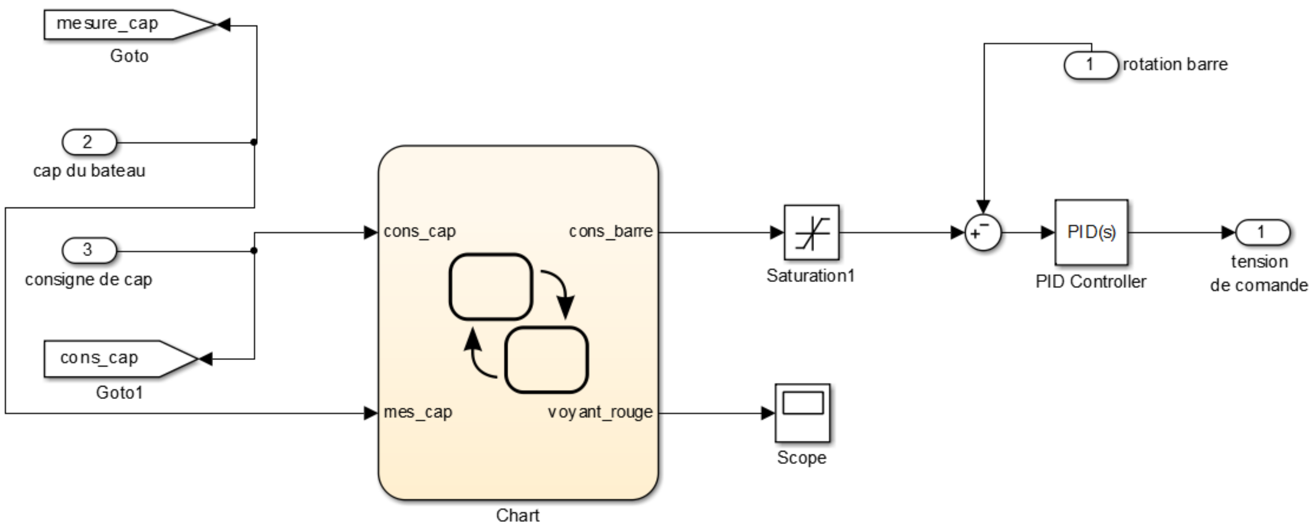


Figure 472 : connexion de la variable de sortie du chart à un scope

Si nécessaire le modèle complet est disponible dans le fichier ***pilote_hydraulique_Stateflow_1.slx.***

Lancer la simulation et observer l'évolution de l'état de la variable voyant rouge dans le scope.

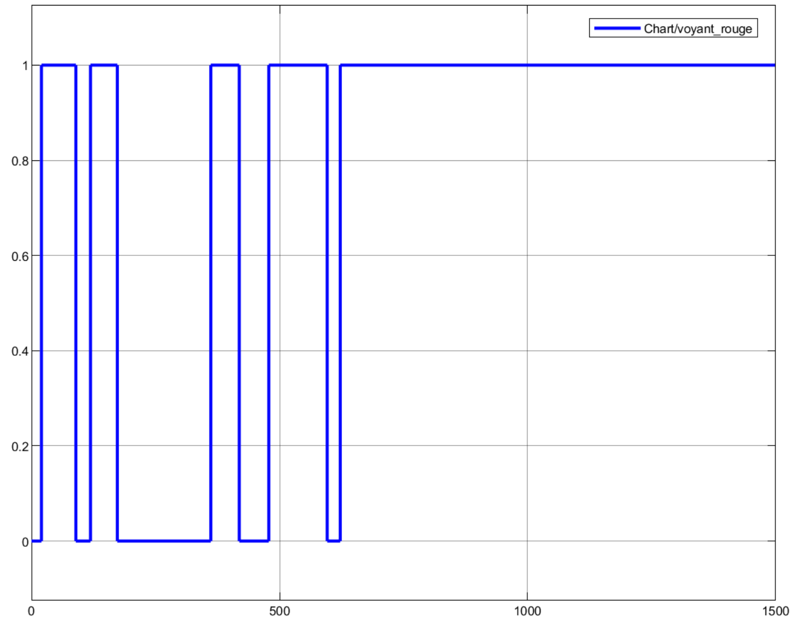


Figure 473 : visualisation de l'état d'activation du voyant

Il est possible d'ajouter un voyant de la bibliothèque Dashboard afin de visualiser l'activation de la correction de cap.

Le fichier **pilote_hydraulique_Stateflow_1_dashboard.slx** intègre cette fonctionnalité.

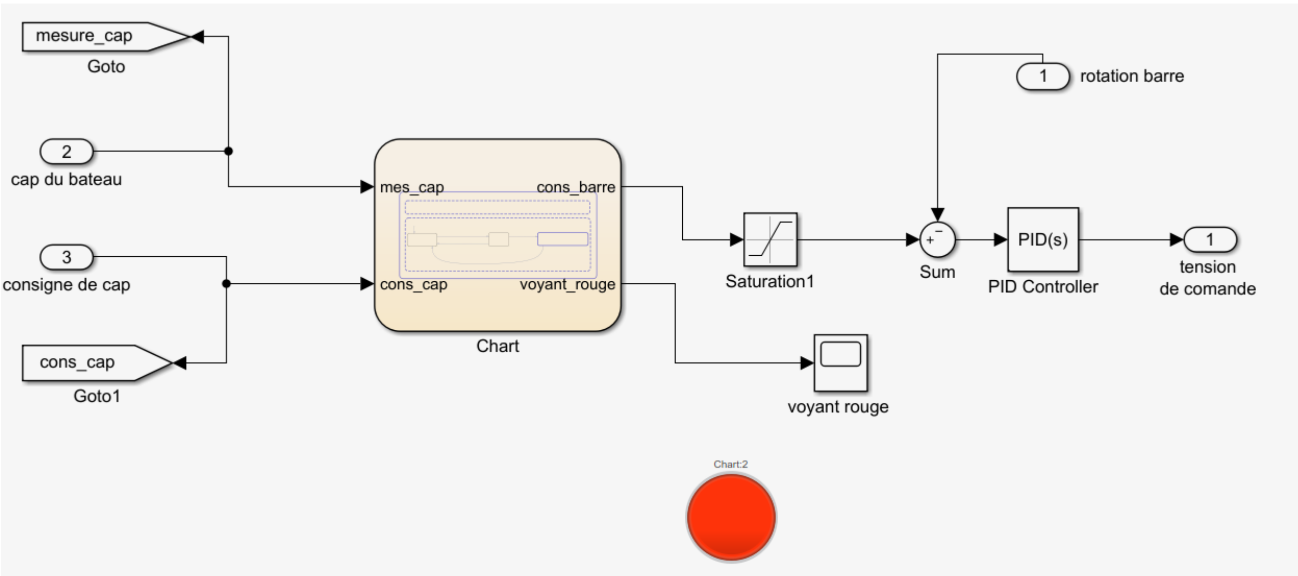


Figure 474 : ajout d'un voyant de la bibliothèque Dashboard dans le modèle

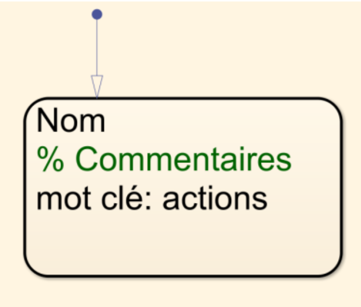
Lors de l'exécution du modèle, le voyant est vert si le pilote n'est pas en phase de correction et rouge lorsqu'il est en phase de correction.

F. Récapitulatif et complément des commandes utiles de Stateflow

Commandes utiles

Fonctions	Commandes/syntaxe

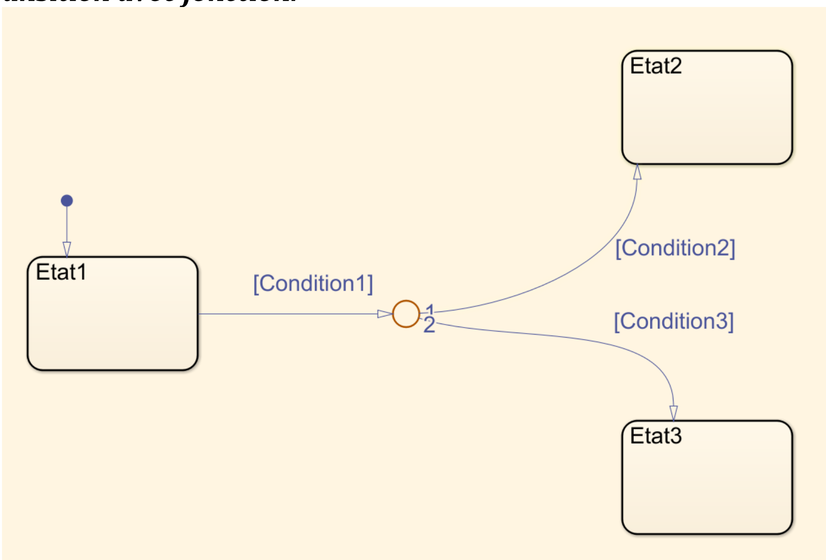
Création d'un état :



Les mots-clés :

en ou **entry** : l'action s'effectue uniquement à l'activation de l'état
du ou **during** : l'action s'effectue en continu tant que l'état est activé
ex ou **exit** : l'action s'effectue uniquement à la désactivation de l'état

Création d'une transition avec jonction:

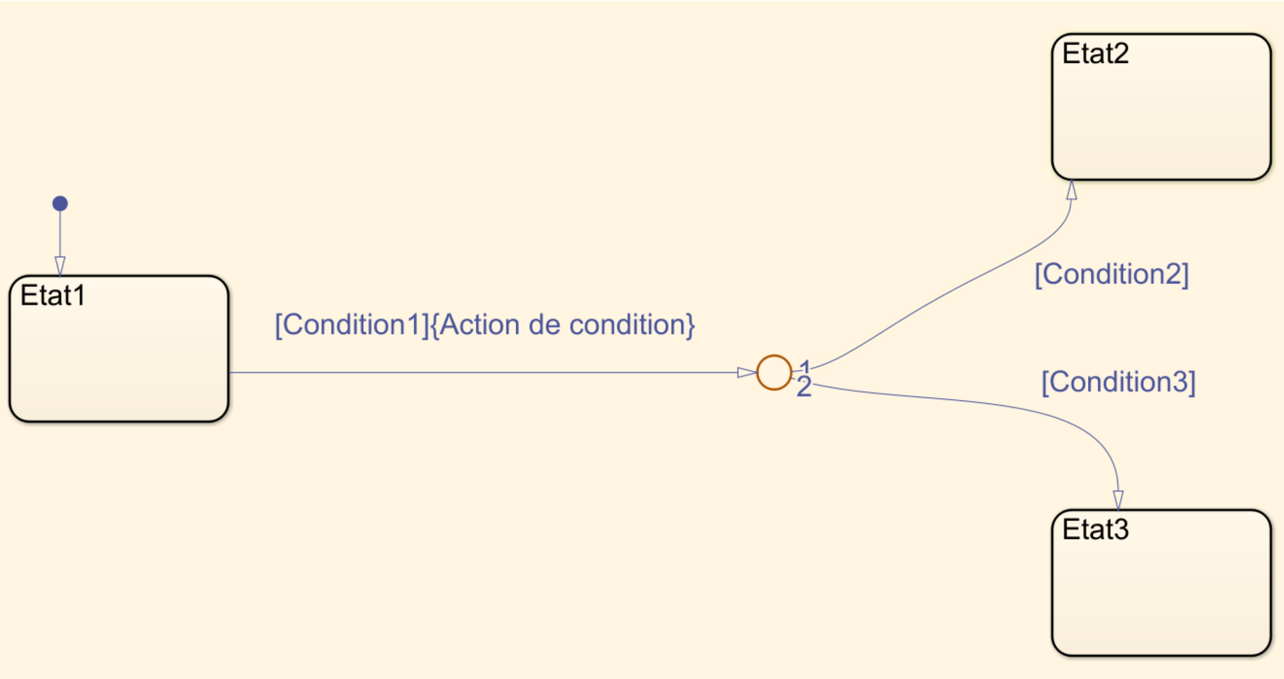


Pour créer une transition avec chemin multiples, il est possible d'utiliser une jonction disponible dans le menu « Chart ».
Pour passer à l'Etat2, il faut que **[Condition1]** et **[Condition2]** soient vraies.

Pour passer à l'Etat3, il faut que **[Condition1]** et **[Condition3]** soient vraies

Le chemin numéroté **1** est évalué avant le chemin numéroté **2**.

Création d'une transition incluant des actions :



L'**Action de condition** est une action qui s'exécute uniquement si le test de la condition est vrai, et même si le chemin de la transition n'aboutit pas à l'activation de l'Etat2 ou de l'état 3.
Si **[condition]** est vrai alors **{action de condition}** s'exécute même si **[Condition2]** et **[Condition3]** sont faux**.**

Test sur les variables dans les transitions :	a et b	a&&b
	a ou b	a||b
	complément de a	!a
	a égal b	a==b

Suivi de l'activation des états :

in(Etat) : cette variable interne est vrai (valeur 1) tant que l'état est actif.

Temporisation de 15 s dans une transition [**after**(15,s)]

Figure 475 : rappel des principales règles de syntaxe de Stateflow

Chapitre 8 : Prise en main de Multibody

I. Introduction à Multibody

Multibody est un outil de MATLAB permettant d'inclure dans un modèle multi-physique, la maquette CAO 3D du système en l'important depuis Solidworks (ou tout autre logiciel de CAO). Multibody possède également des fonctionnalités d'édition de pièces qui permettent de créer des pièces volumiques directement dans l'environnement MATLAB.
Multibody permet de visualiser les mouvements des solides durant la simulation, de tenir compte du comportement dynamique des solides en mouvements, de prendre en compte toutes les non-linéarités géométriques de manière implicite…
Les résultats issus du modèle multi-physique sont plus proches des résultats observés sur le système réel par la prise en compte de ces nouveaux paramètres sans avoir à écrire les équations caractérisant le comportement dynamique du système.

A. Analyse d'un modèle Multibody

Dans **Multibody** les systèmes sont représentés sous la forme d'un graphe de liaisons. Les solides sont donc représentés par des blocs reliés entre eux par des liaisons.

Ouvrir le fichier « ***pilote_Multibody_0.slx*** » (Figure 476)
Ce fichier a été importé directement depuis le logiciel Solidworks. Les procédures d'importation seront abordées ultérieurement.

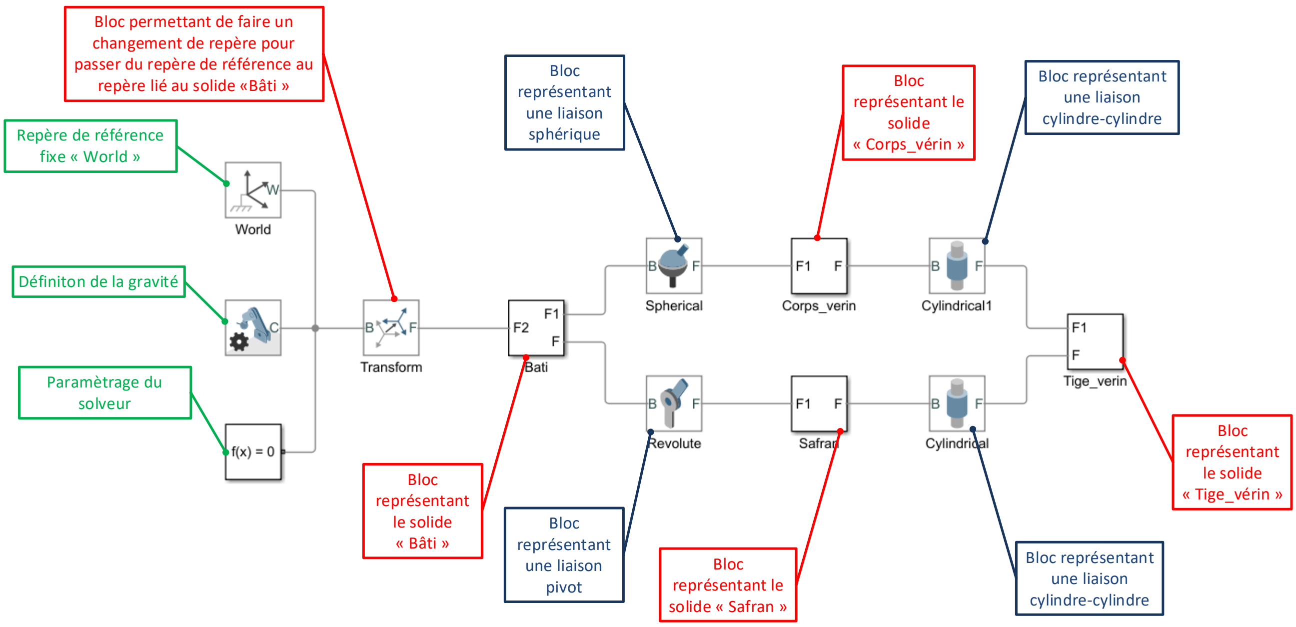


Figure 476 : modèle Multibody de la partie mécanique du pilote hydraulique

Pour une meilleure lisibilité du modèle, il est conseillé de créer des masques sur les blocs « solide » afin de visualiser directement les formes.

Ouvrir le fichier « ***pilote_Multibody_0_mask.slx*** »

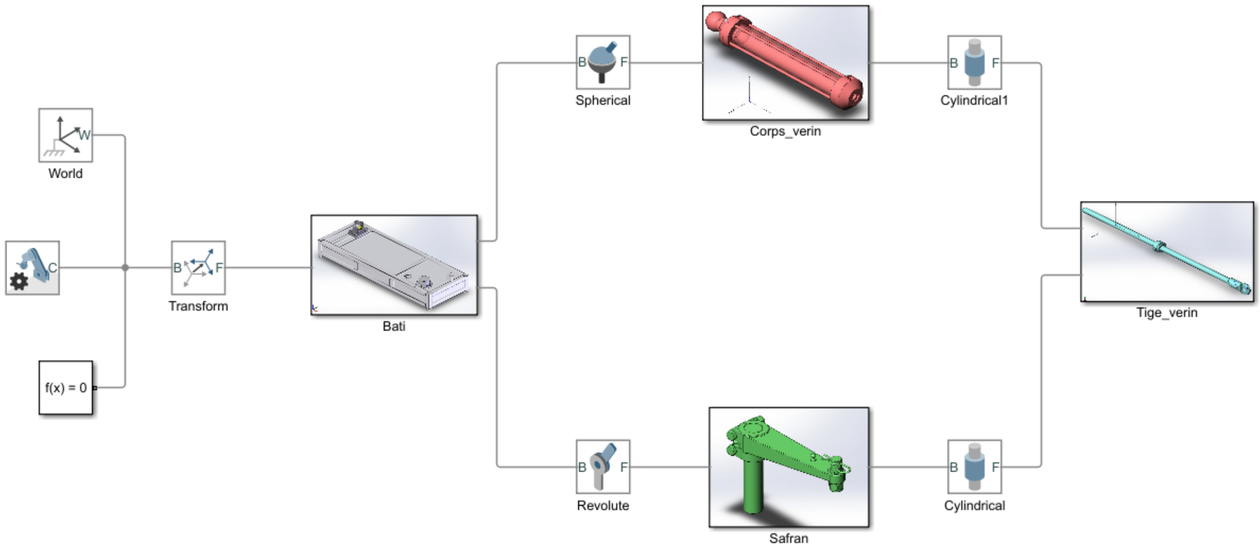


Figure 477 : modèle Multibody du pilote avec masques sur les solides

Lancer la simulation du modèle.

La fenêtre **Mechanics Explorers** apparaît et la maquette 3D de la partie mécanique du pilote hydraulique est visualisable (.

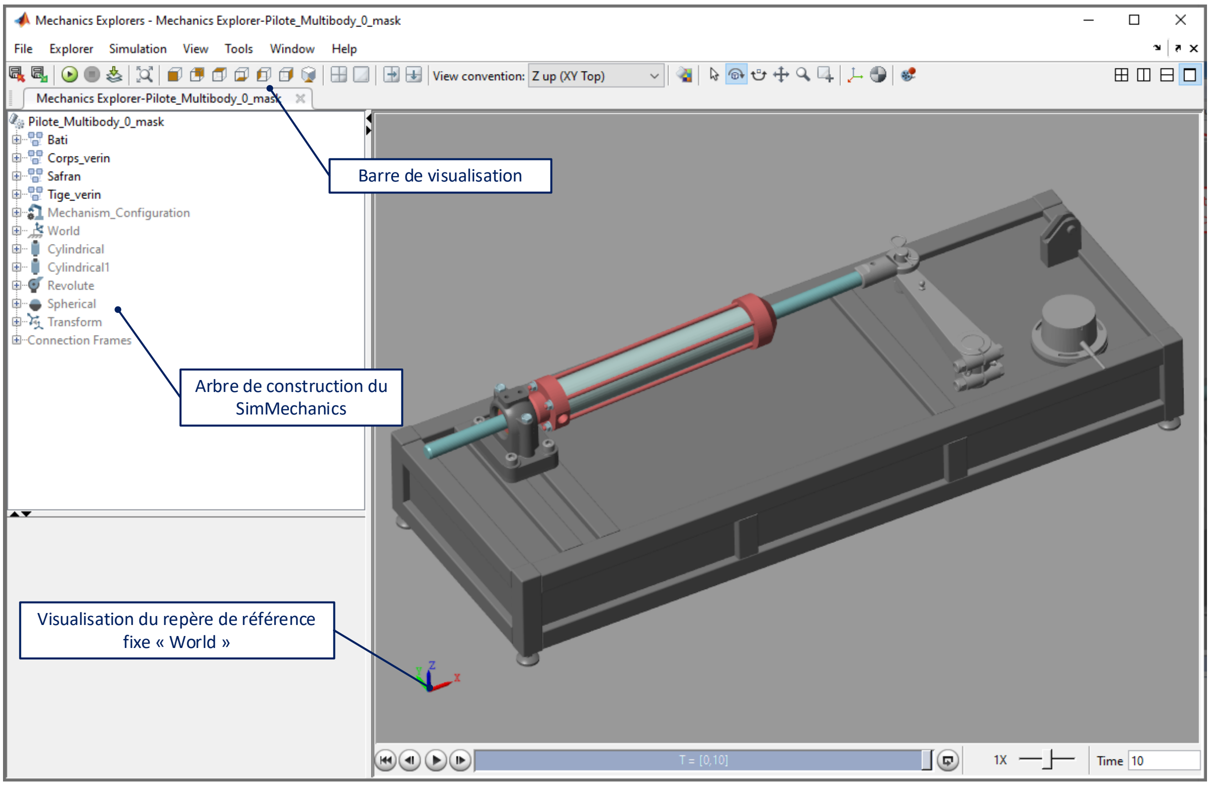


Figure 478 : fenêtre Mechanics Explorers de la partie mécanique du pilote hydraulique

La barre d'outils de Multibody permet différentes options d'affichage (Figure 479).

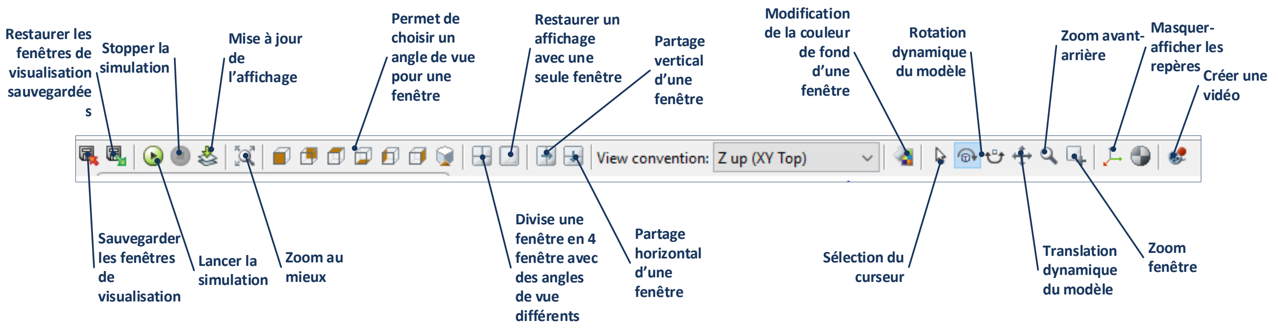
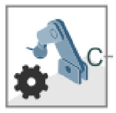


Figure 479 : options de la barre de visualisation de Multibody

A noter qu'aucun mouvement n'est observable pour le moement dans la mesure où aucune liaison n'est pilotée.

B. Paramétrage de la gravité

Retourner dans la fenêtre du modèle et **ouvrir** le bloc Mechanism Configuration  (Figure 480).

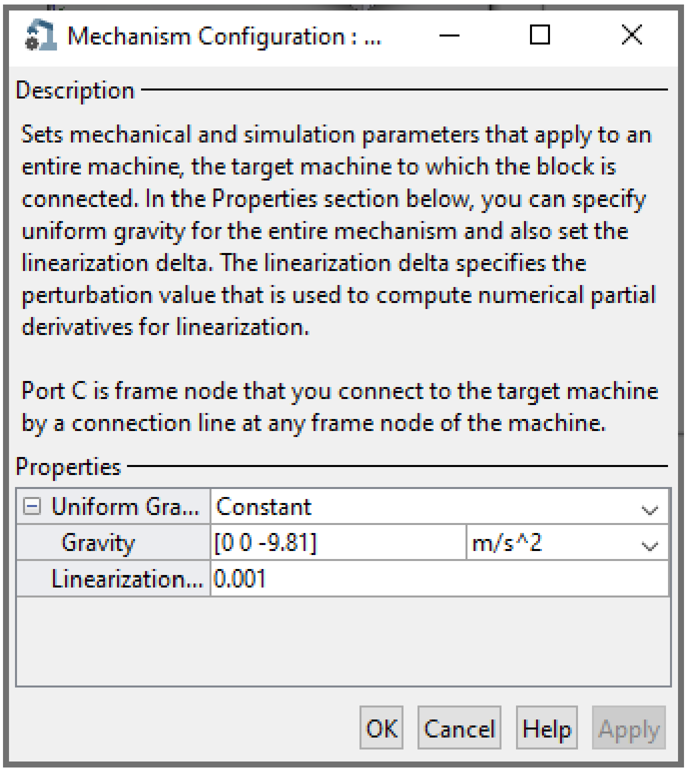


Figure 480 : paramétrage de la pesanteur dans Multibody

Par défaut la pesanteur a été placée sur l'axe z (valeur -9.81 m/s²), ce qui correspond à la réalité de fonctionnement du système. Le repère utilisé pour orienter la pesanteur est le repère fixe « World ».

Pour voir l'influence de la pesanteur sur la simulation, nous allons placer la pesanteur sur l'axe x (Figure 481).

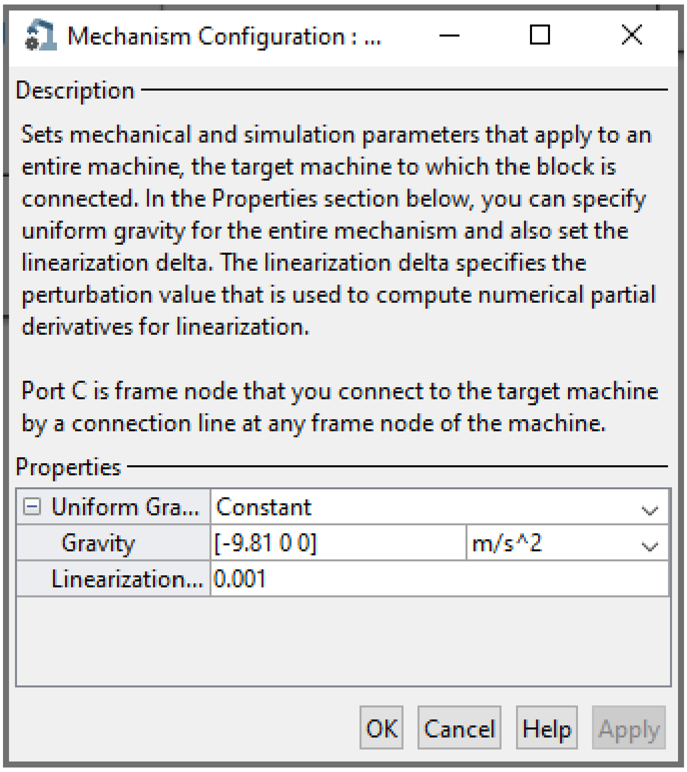


Figure 481 : modification de l'action de la pesanteur

Lancer à nouveau la simulation et observer le mouvement du système. On observe un mouvement de rentrée et sortie de la tige du vérin qui correspond à l'action imposée par la pesanteur. Aucun frottement n'étant modélisé, le mouvement est périodique.

Remettre la pesanteur sur l'axe z pour retrouver les conditions réelles de fonctionnement.

II. Intégration d'un modèle Multibody dans un modèle multi-physique

Nous allons apprendre dans cette partie à intégrer un modèle Multibody dans un modèle multi-physique. Pour cela nous utiliserons le modèle du pilote hydraulique de bateau.

Ouvrir le fichier ***pilote_hydraulique_Multibody_start.slx***

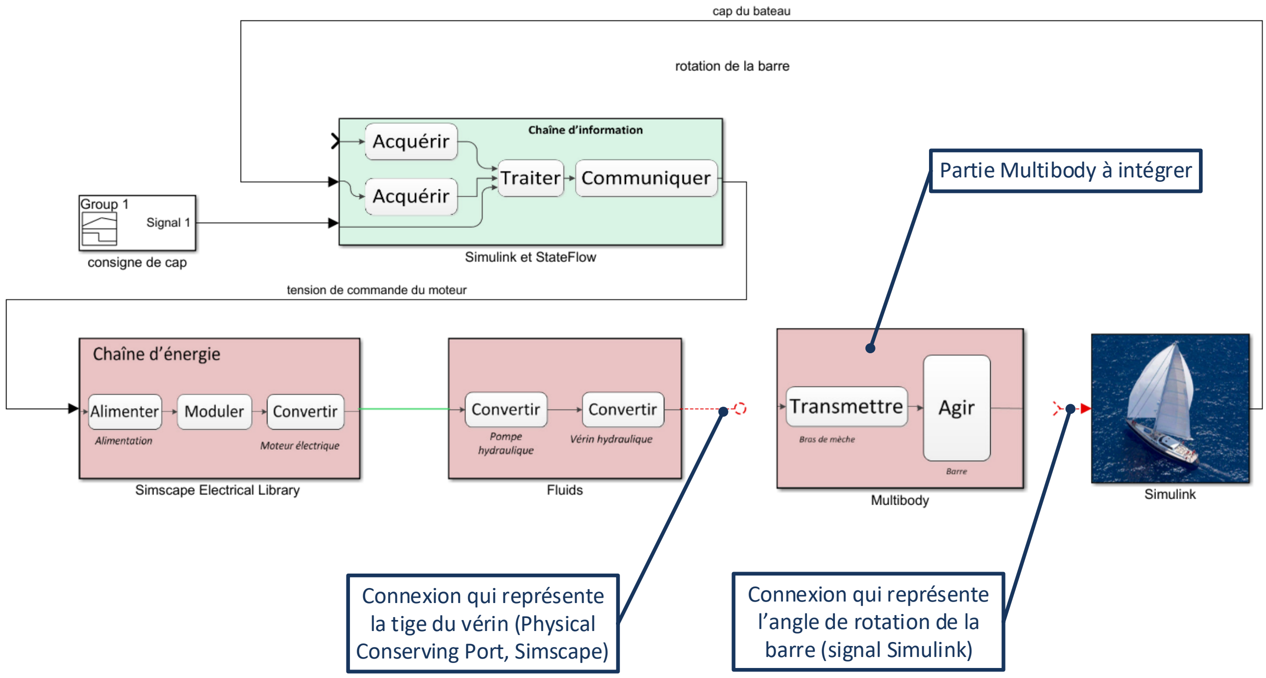


Figure 482 : modèle du pilote hydraulique avec modèle Multibody à intégrer

Le sous-système **Multibody** contient le modèle de la partie mécanique du pilote, mais qui n'est pas connecté avec le reste du modèle.

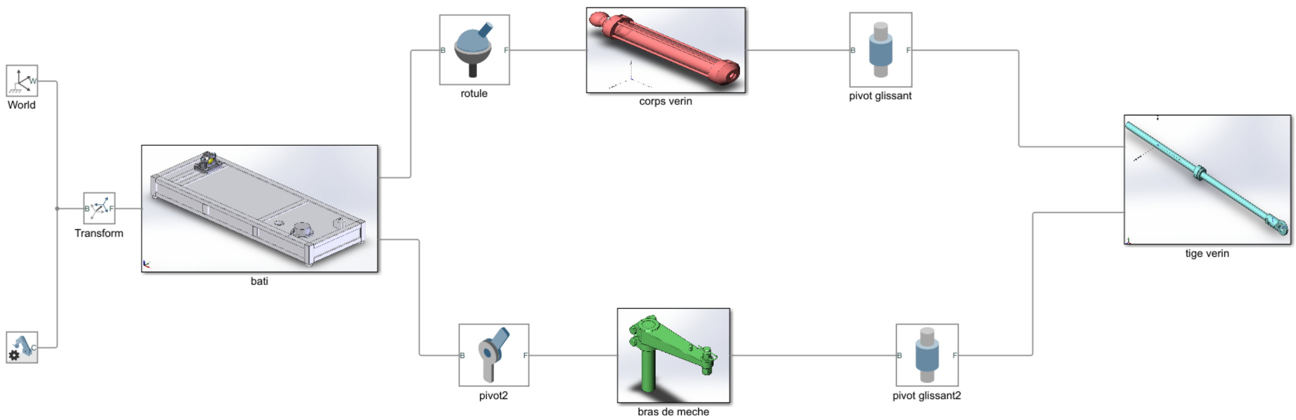


Figure 483 : visualisation du système Multibody sans connexion avec le reste du modèle

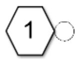
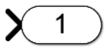
Sur la Figure 482, il est possible de visualiser les connexions que le sous-système **Multibody** doit assurer avec le reste du modèle.

- A l'entrée, le modèle reçoit une connexion physique qui représente la tige du vérin. Il s'agit d'un port de type **Physical Conserving Port** (Simscape)
- A la sortie le sous-système **Multibody** doit renvoyer l'angle de la barre afin d'agir sur le bateau et de donner l'angle de barre comme information d'entrée à la chaîne d'information. Cette information prend la forme d'un signal Simulink.

A. Connexions du modèle

Afin de connecter le modèle, il faut créer à l'intérieur du sous-système **Multibody** deux ports :

- Un port Simscape pour se connecter à la tige du vérin
- Un port Simulink pour renvoyer l'ange de rotation de la barre

Désignation	Représentation	Bibliothèque
Port de connexions Simscape	 Connection Port	Simscape/Utilities
Port de connexions Simulink	 Out1	Simulink/Ports & Subsystems

Placer les deux ports et les renommer conformément à la Figure 484.

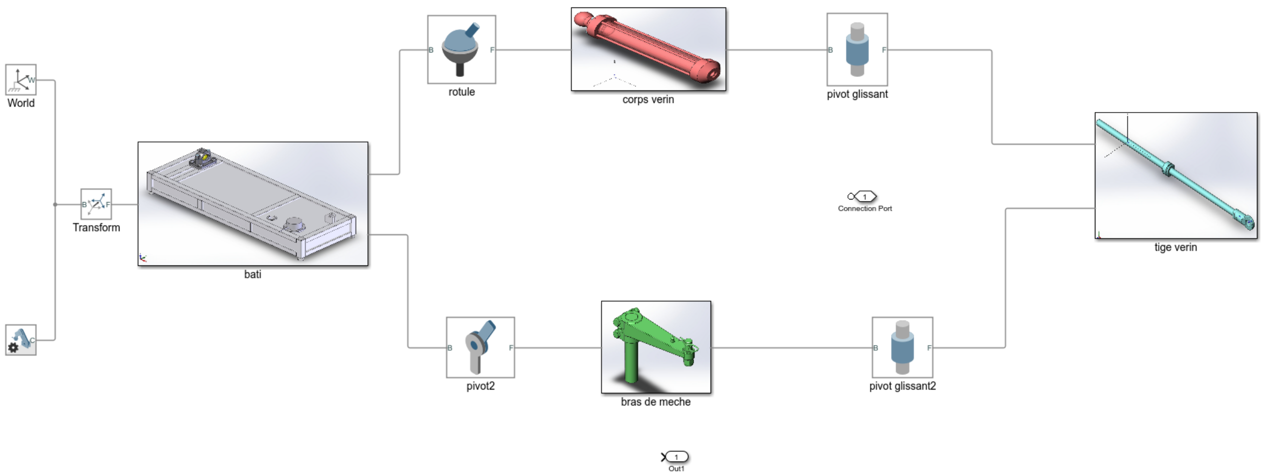


Figure 484 : placement des ports de connexion dans le modèle

Des ports apparaissent sur le sous-système Multibody. **Connecter** ces ports avec le modèle.

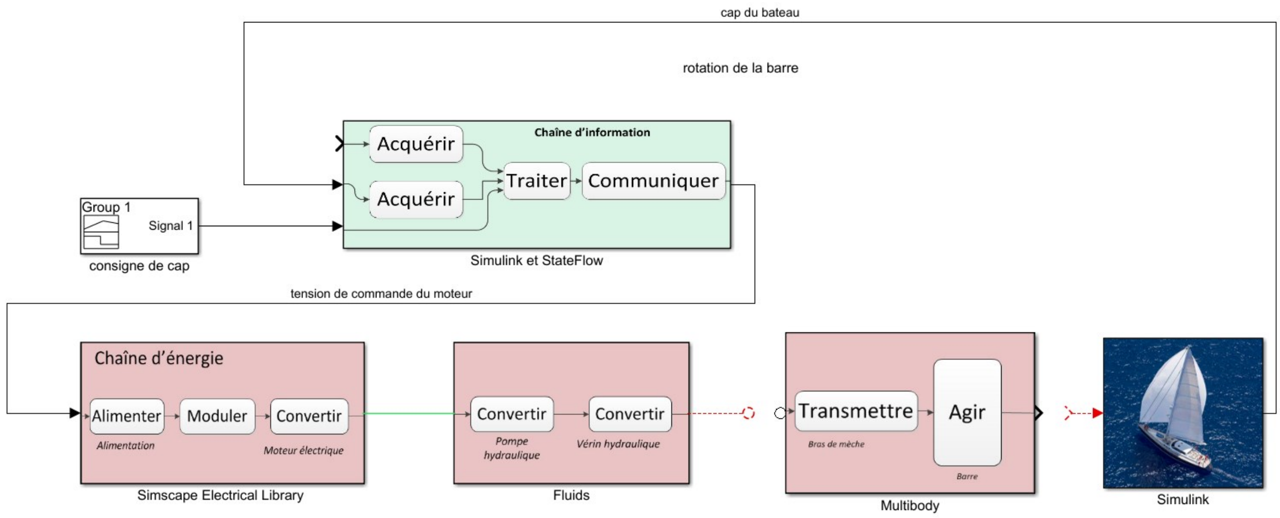


Figure 485 : connexions des ports du sous-système avec le modèle

B. Interfaçage entre Simscape et Multibody

Dans cet exemple la connexion « tige vérin » provenant de **Simscape** doit servir à actionner la liaison entre le corps du vérin et la tige. Dans **Multibody** , les liaisons sont actionnées par des efforts de type « Force » ou de type « Torque » (moment). Il faut donc actionner la liaison pivot-glissant entre le corps et la tige du vérin avec une force qu'il faudra prélever sur la tige du vérin à l'aide d'un capteur de force. Cette force va agir sur la partie mécanique du système. Il résultera un mouvement de tout le mécanisme qui prendra en compte la dynamique de la partie mécanique ce qui imposera une vitesse de sortie à la tige du vérin. Afin de ne pas casser la boucle physique et de permettre à la tige du vérin modélisée dans **Simscape** de se déplacer à la même vitesse que la tige du vérin du modèle **Multibody**, il est impératif de réinjecter cette vitesse dans le modèle **Simscape**. Cela garantira durant tout le fonctionnement une équivalence de comportement entre **Simscape** et **Multibody**.

1. Interfaçage entre Simscape et Multibody pour la translation

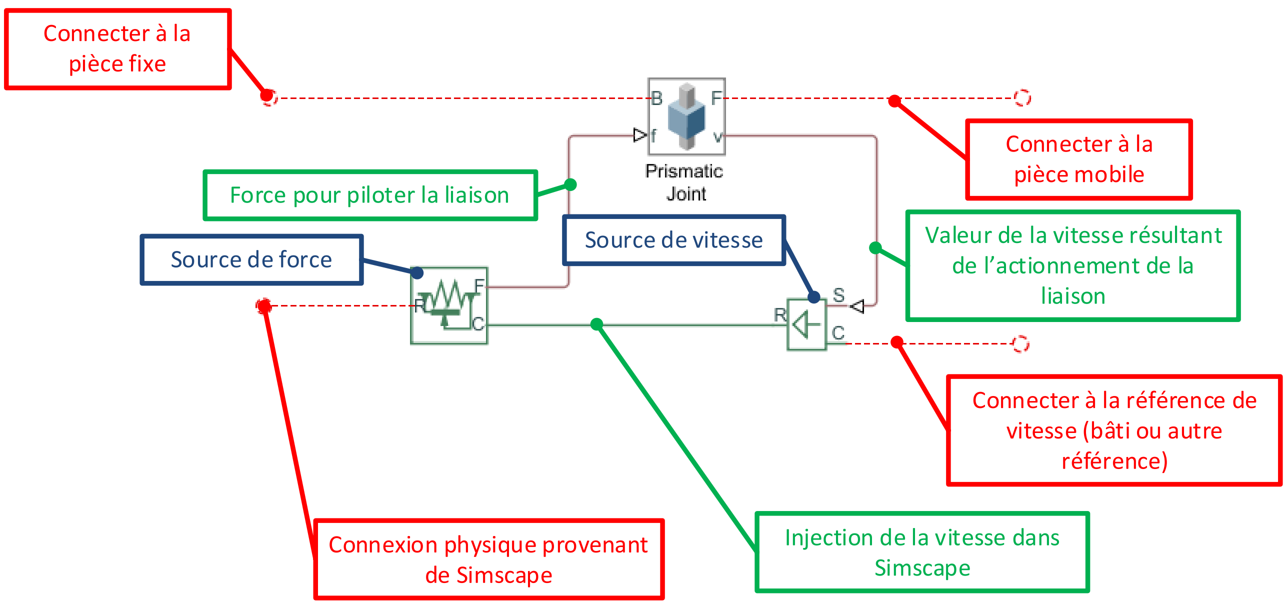


Figure 486 : interface de translation entre Simscape et Multibody

2. Interfaçage entre Simscape et Multibody pour la rotation

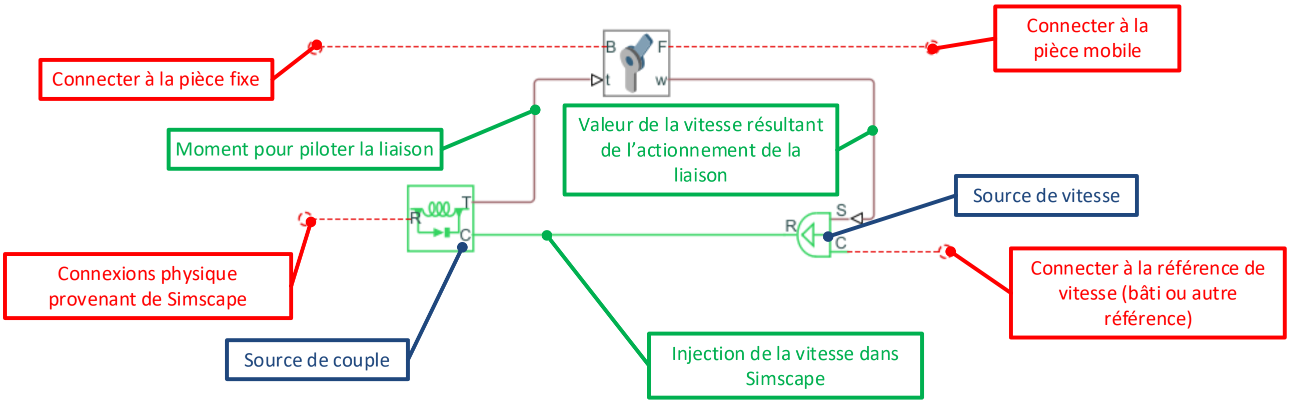


Figure 487 : interfaçage de rotation entre Simscape et Multibody

Ouvrir le fichier « ***Simscape_Multibody_Interfaces.slx* ».**

Ce fichier contient les interfaces entre **Simscape** et **Multibody**. Il est également possible de mettre ces interfaces sous la forme de sous-systèmes afin de les réutiliser facilement.

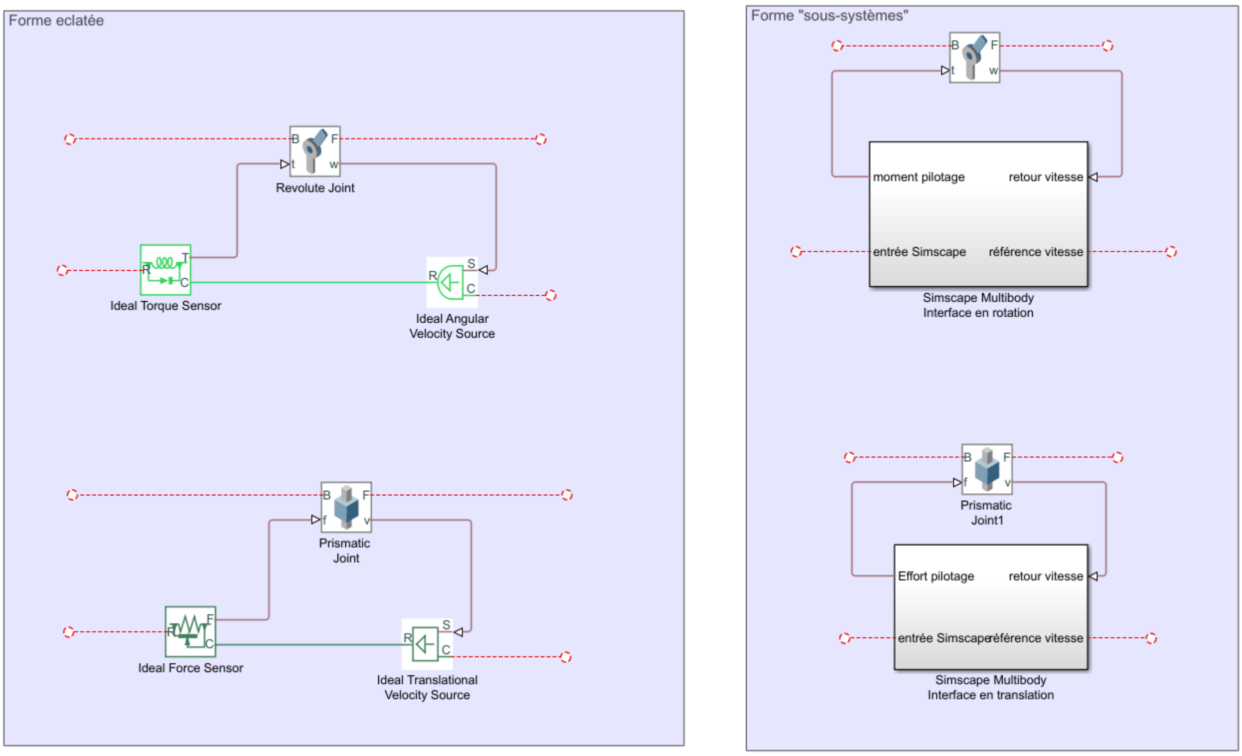


Figure 488 : les interfaces entre Simscape et Multibody

Copier le bloc **Simscape Multibody Interface** en translation dans le modèle.

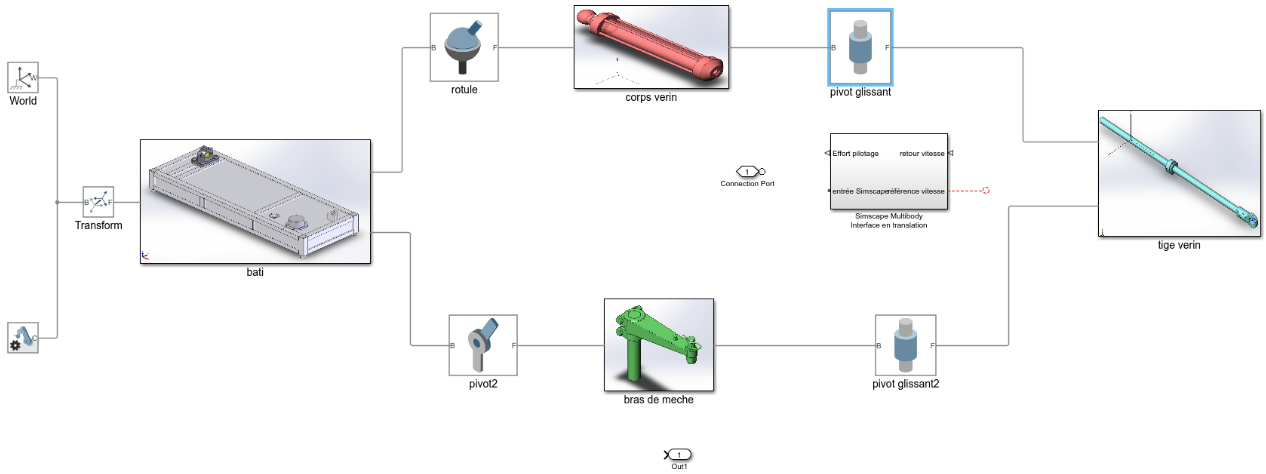


Figure 489 : ajout du bloc Simscape Multibody Interface

3. Ajout de ports sur une liaison

Il faut maintenant ajouter des ports de connexions sur le bloc liaison

- Un port afin de lui permettre d'être actionnée
- Un port afin de renvoyer la valeur de la vitesse

Double cliquer sur le bloc de la liaison pivot glissant pour faire apparaître la boite de dialogue du paramétrage d'une liaison et paramétrer la liaison conformément à la Figure 490 afin de créer un port pour actionner la liaison et un port pour relever la vitesse. Paramétrer également un coefficient de frottement visqueux (Damping Coefficient)de 200 N.s/m.

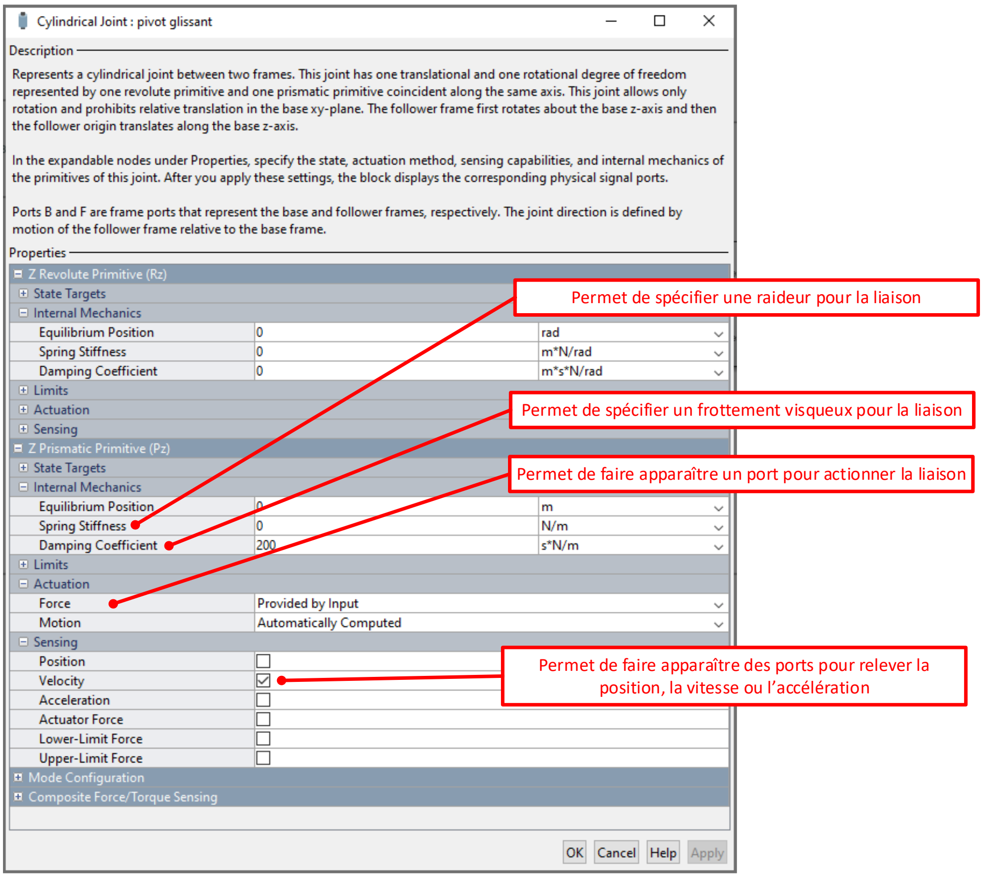


Figure 490 : paramétrage des ports d'une liaison

Des ports apparaissent sur le bloc de la liaison. **Connecter** l'interface conformément à la Figure 491.

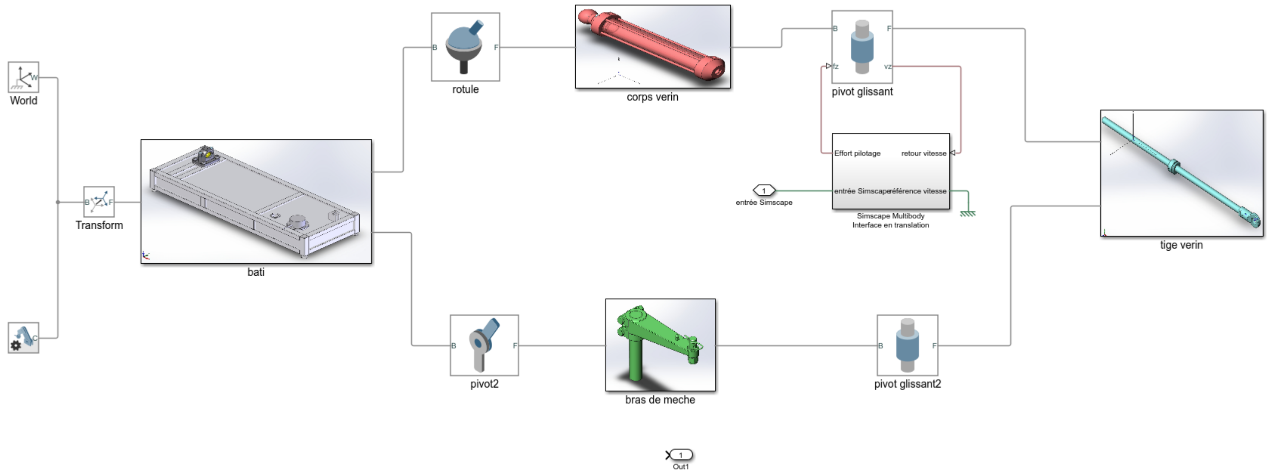


Figure 491 : connexion entre Simscape et Multibody

L'interface entre Simscape et Multibody étant réalisée, nous allons maintenant ajouter sur la liaison « pivot2 » entre le « Bâti » et le « Bras de mèche ».

- Un port pour imposer l'effort résistant qui agit sur la barre du bateau.
- Un port pour prélever l'angle de rotation de la barre du bateau.

Pour cela **double cliquer** sur la liaison « pivot2 » et ajouter un port pour imposer une action mécanique sur la liaison comme représenté sur la Figure 492.

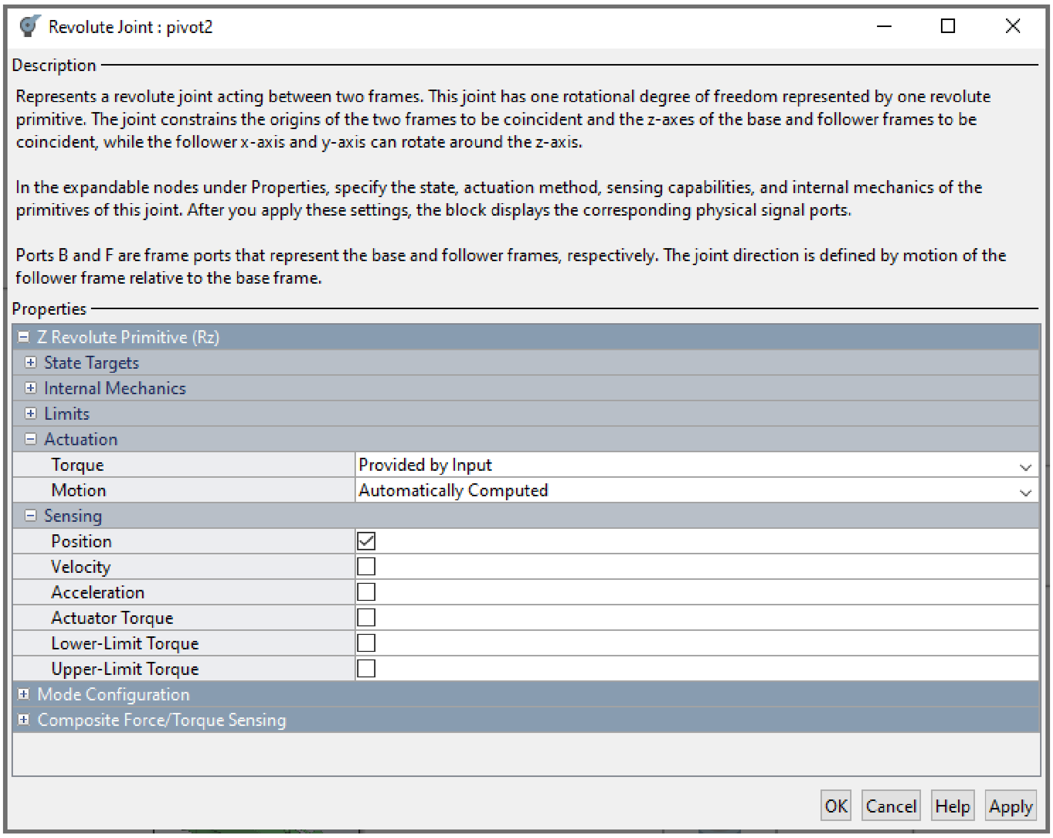


Figure 492 : ajout d'un port pour imposer un couple à la liaison

Les deux nouveaux ports apparaissent maintenant sur la liaison. Ajouter un bloc **PS-S** pour convertir le signal d'angle de rotation de la barre en signal **Simulink**. Choisir les degrés comme unité d'angle.

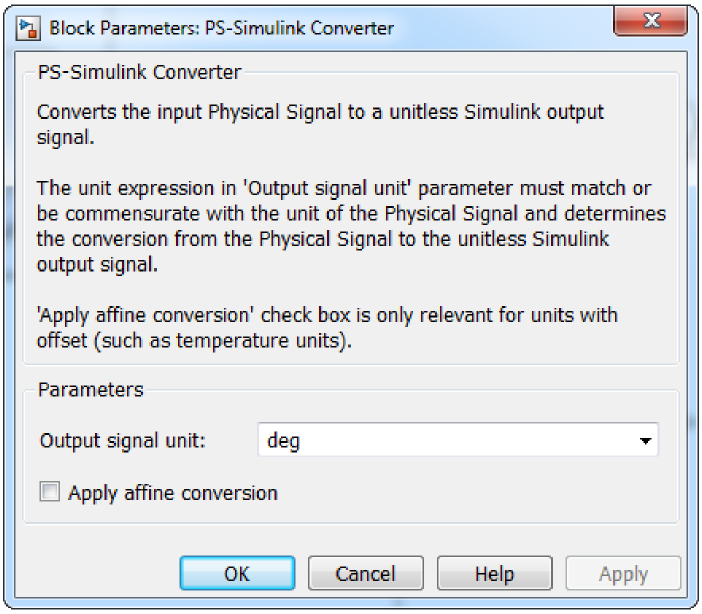


Figure 493 : conversion du signal physique en signal Simulink

Vous devez obtenir la configuration de la Figure 494.

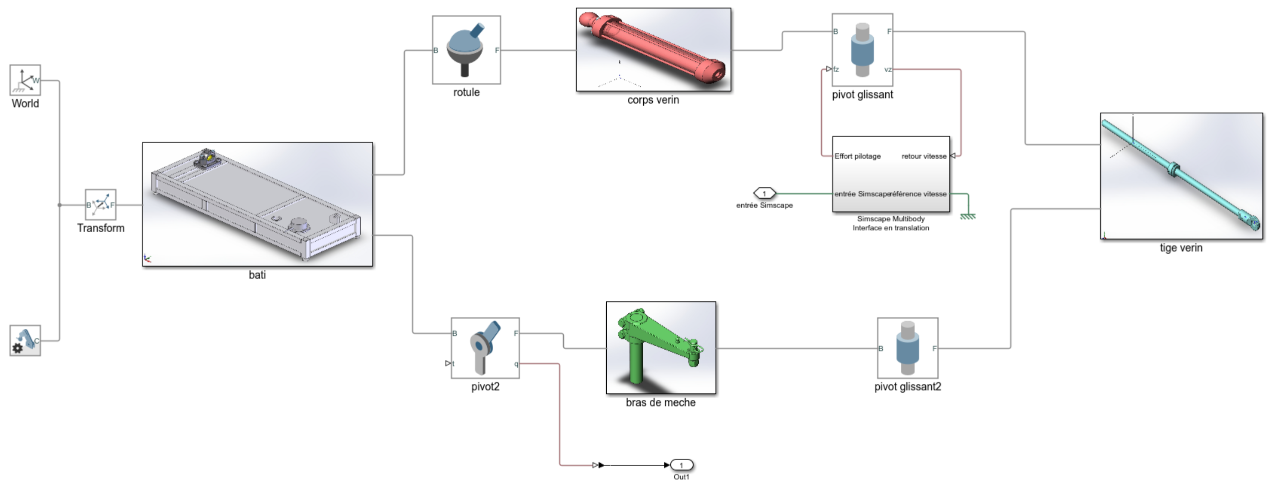


Figure 494 : ajout de port sur une liaison dans Multibody

En début de simulation l'angle de rotation de la barre possède une valeur arbitraire fixée lors de l'importation du modèle depuis Solidworks. Il est possible de connaître la valeur initiale (offset) de la barre.
Pour cela **double-cliquer** sur la liaison « pivot2 » et développer **State Target/Specify Position Target.**

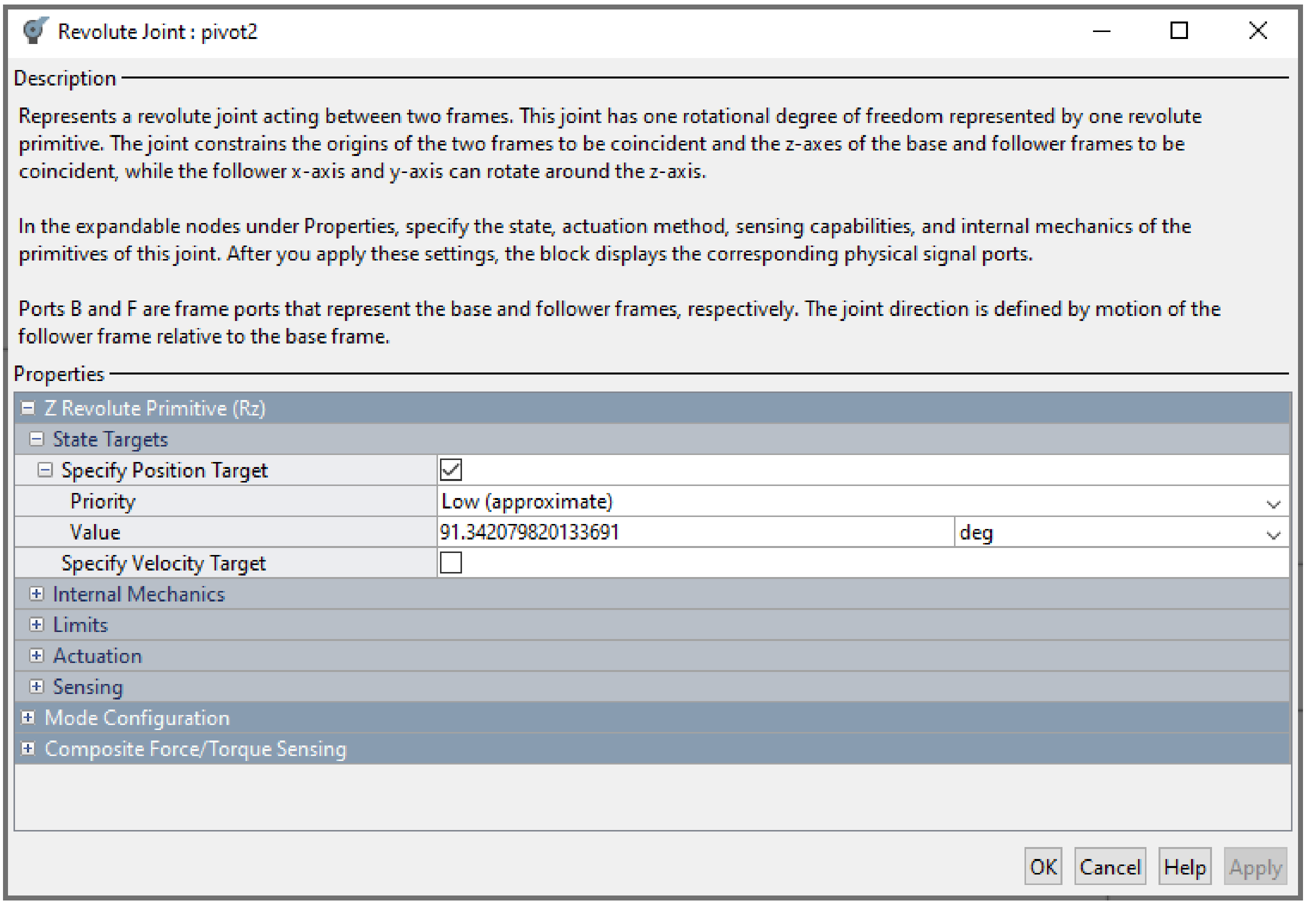


Figure 495 : visualisation de l'offset de l'angle de barre

En début de simulation l'angle de la barre doit être nul, il faut donc retrancher cette offset à la valeur de l'angle renvoyé par la liaison. Pour cela **compléter** le modèle conformément à la Figure 496 en ajoutant un bloc **constant** que vous compléterez en faisant un copier/coller de la valeur de l'offset de l'angle de barre et un soustracteur pour retrancher l'offset au signal.

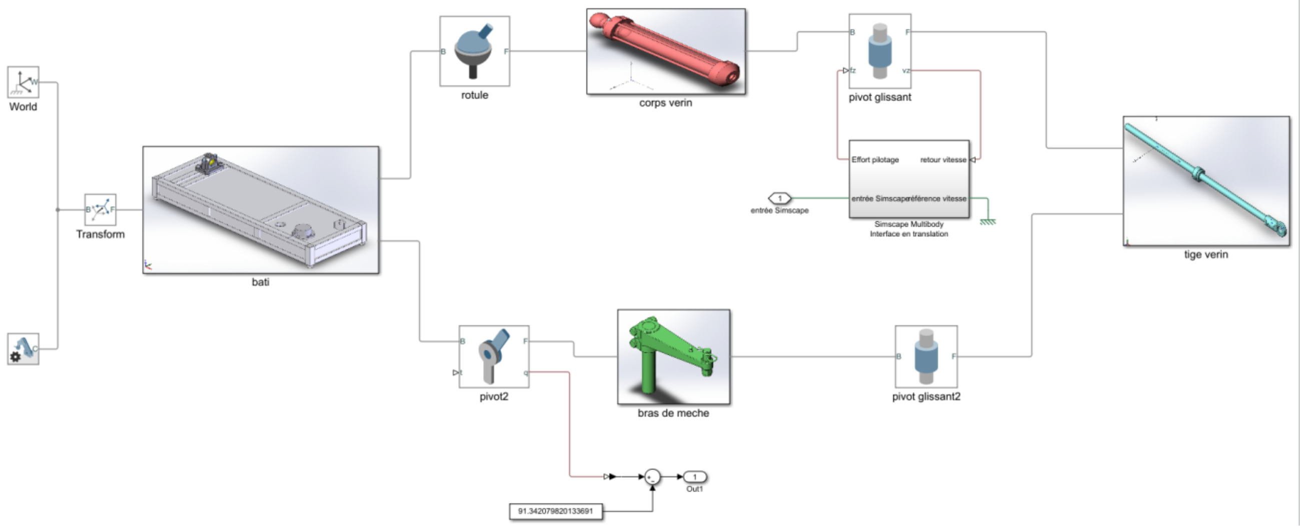
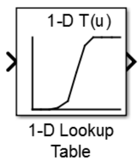


Figure 496 : compensation de l'offset de l'angle de la barre

4. Modélisation d'un effort extérieur variable

Le moment qui s'oppose à la rotation de la barre durant le mouvement varie en fonction de l'angle de rotation de la barre. Cette variation étant non linéaire, nous utiliserons un bloc **1D Lookup Table** pour le modéliser. Le **1D Lookup Table** représente un gain qui pourra varier en fonction de la valeur de l'entrée. Ce bloc est très pratique pour modéliser des lois entrée sortie non linéaires de types géométrique ou dynamique.

Désignation	Représentation	Bibliothèque
1D Lookup Table		Simulink/ Lookup Tables

Ouvrir le fichier ***pilote_Multibody_fin.slx*** et observer l'ajout de l'effort non linéaire sur la liaison. L'angle de la barre est prélevé et le modèle impose à la liaison « pivot2 » un effort qui varie en fonction de l'angle de la barre.

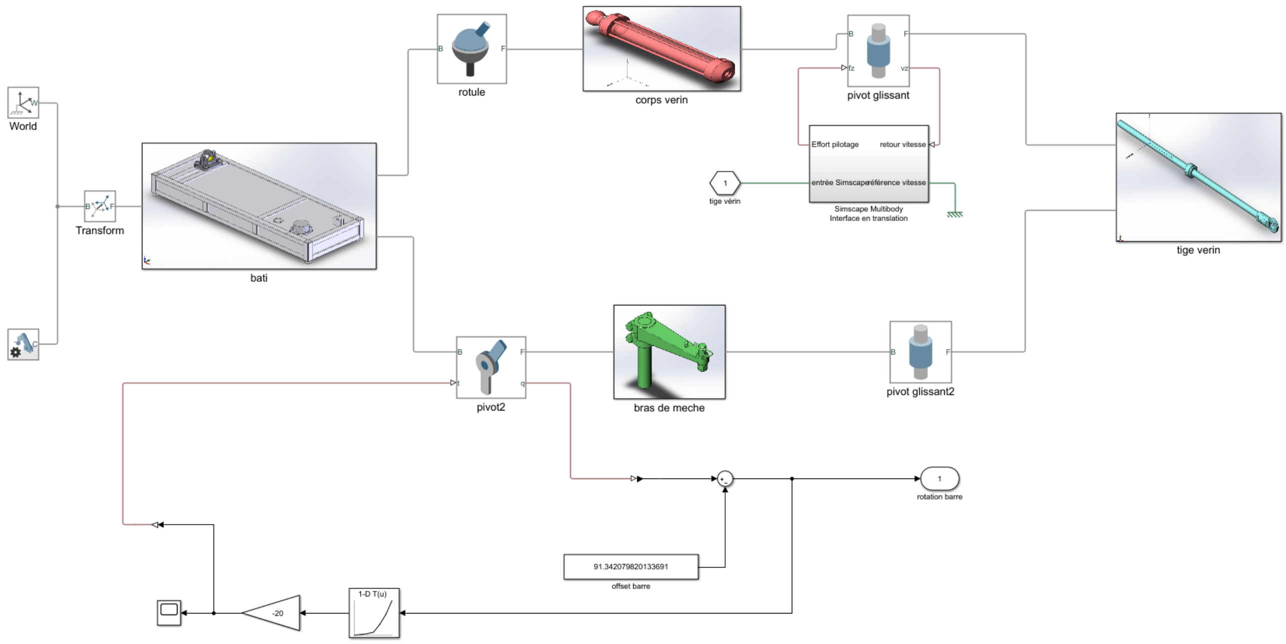


Figure 497 : ajout d'un effort sur la liaison, utilisation d'une Lookup Table

Double cliquer sur le bloc **1D Look-up Table** pour explorer le paramétrage de ce type de bloc.

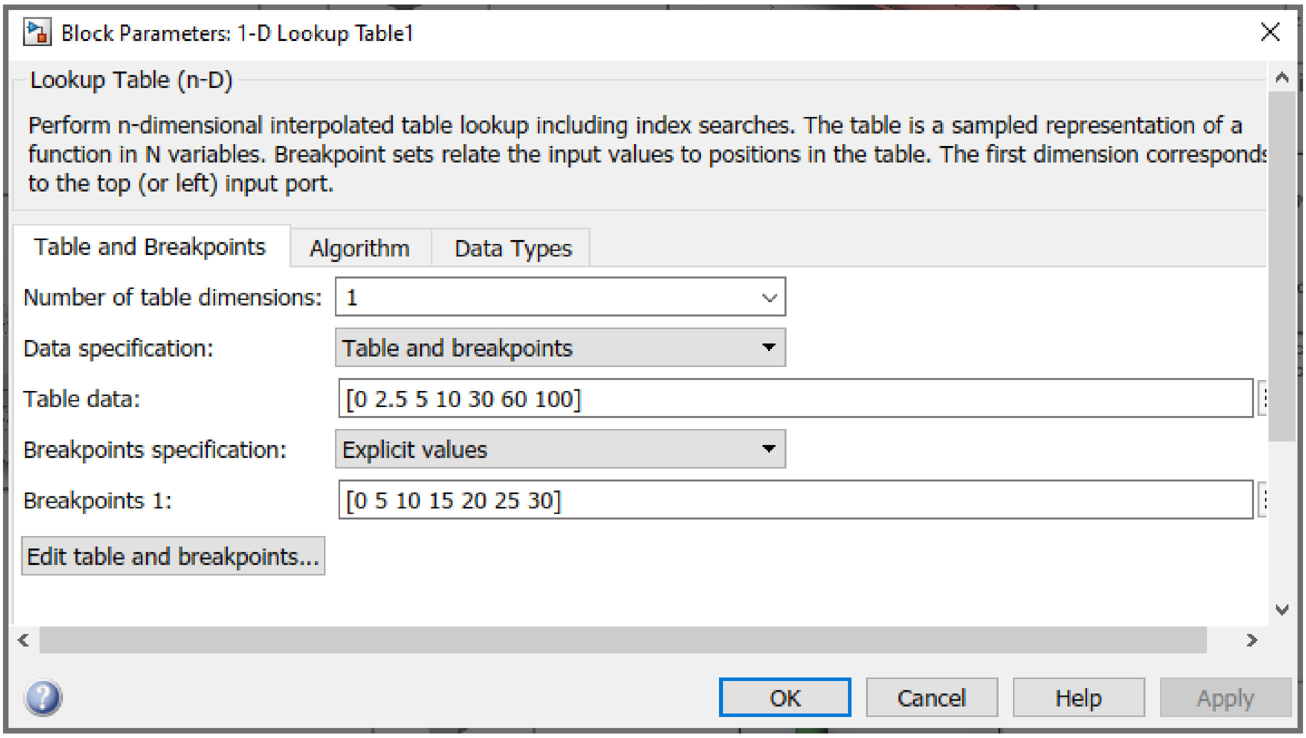


Figure 498 : paramétrage d'une Lookup Table

Pour paramétrer la table, il suffit d'entrée des points appartenant à la courbe qui caractérise la loi entrée sortie du bloc. Le logiciel effectue automatiquement une interpolation pour associer à chaque valeur de l'entrée, la valeur de la sortie correspondante.
Les coordonnées des points sont saisies dans les champs **Breakpoints 1** (abscisses) et **Table data** (ordonnées).

Il est possible de visualiser la loi ainsi saisie en cliquant sur **Edit table breakpoints.**

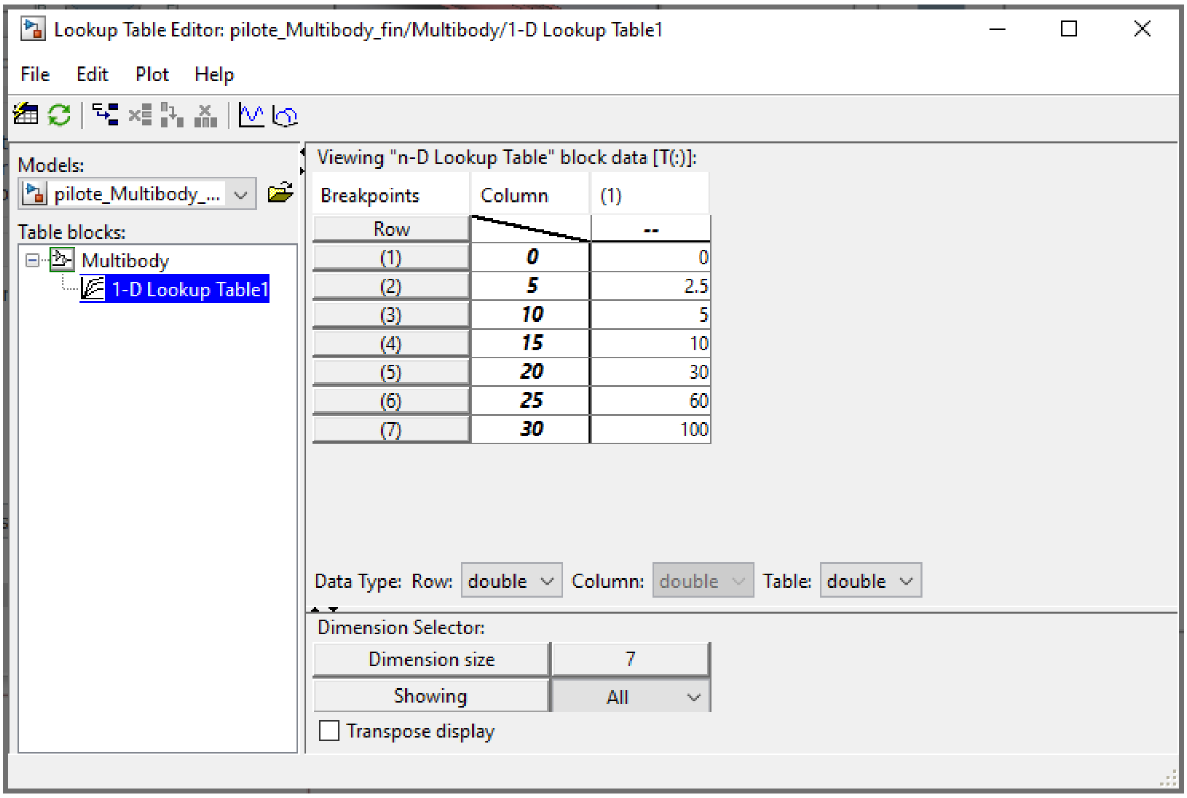
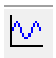


Figure 499 : visualisation d'une Lookup Table

Il est possible de visualiser la courbe représentant la loi entrée sortie en cliquant sur **Linear Plot** .

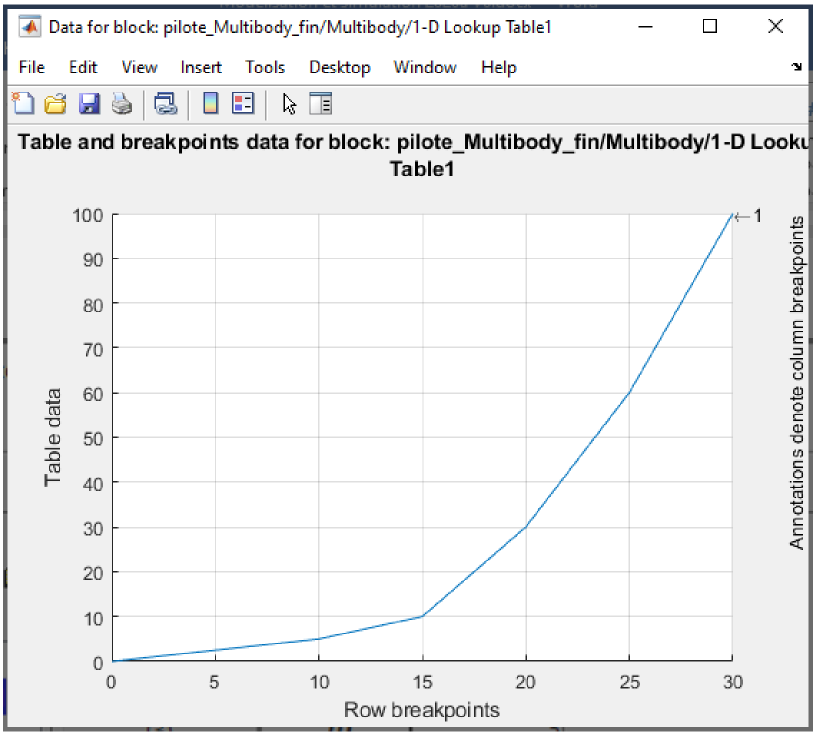


Figure 500 : visualisation de la courbe représentative de la loi entrée sortie d'une Lookup Table

Valider le paramétrage de la lookup Table.

C. Résultat de la simulation

Lancer la simulation et observer la réponse en cap du bateau qui prend en compte le modèle **Multibody** ajouté.

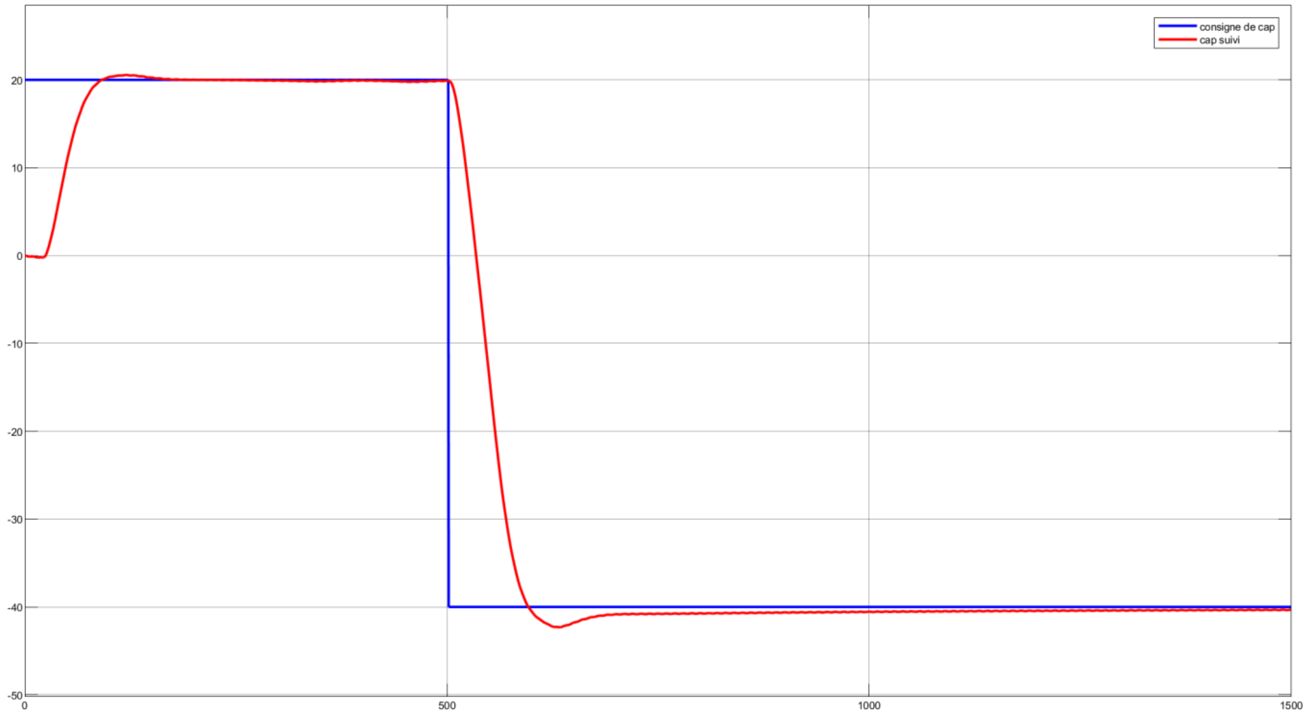


Figure 501 : résultat de la simulation du cap suivi par le bateau

III. Importation d'un modèle SolidWorks dans Multibody

A. Les principes

Pour exploiter dans l'environnement **MATLAB** – Simulink une maquette CAO 3D issu de Solidworks, il faut convertir cette maquette en un fichier portant l'extension **xml**. Pour cela il faut d'abord installer dans SolidWorks un addon « **Multibody Link** » permettant de réaliser la conversion d'un fichier assemblage de Solidworks en fichier xml. Le fichier xml est ensuite converti par **MATLAB** en fichier exploitable par Multibody.
Lors de la conversion chaque fichier « pièce » de Solidworks sera converti en fichier STL. Ces fichiers contiennent les formes des pièces et les caractéristiques cinétiques. La présence de ces fichiers dans le « path » de **MATLAB** est indispensable afin de visualiser les animations dans la fenêtre **Mechanics Explorer.**

B. Installation de « Multibody Link »

Pour effecteur le téléchargement de **Multibody Link**, vous devez posséder un compte Mathworks . Si vous ne possédez pas de compte Mathworks, vous devez donc le créer.

Solidworks et MATLAB doivent être installés sur votre ordinateur.

Connectez-vous avec votre login et votre mot de passe.
Rendez-vous à l'adresse suivante :

https://www.mathworks.com/campaigns/offers/download_smlink.html

Vous êtes alors sur la page permettant de télécharger les fichiers d'installation nécessaires (Figure 502)

Download and installation instructions

Expand all

Simscape Multibody Link 7.2 – Release 2020b (Simscape Multibody 7.2)

Simscape Multibody 7.2	
Win64 (PC) Platform	smlink.r2020b.win64.zip install_addon.m
UNIX (64-bit Linux)	smlink.r2020b.glnxa64.zip install_addon.m
Mac OS X (64-bit Intel)	smlink.r2020b.maci64.zip install_addon.m

Simscape Multibody Link 7.1 – Release 2020a (Simscape Multibody 7.1)

Simscape Multibody Link 7.0 – Release 2019b (Simscape Multibody 7.0)

Simscape Multibody Link 6.1 – Release 2019a (Simscape Multibody 6.1)

Simscape Multibody Link 6.0 – Release 2018b (Simscape Multibody 6.0)

Figure 502 : choix de la version de Multibody Link

Il faut choisir la version de **Multibody Link** correspondant à votre version de **MATLAB** et télécharger les deux fichiers correspondant à votre système d'exploitation et les placer impérativement dans un dossier du « path » de **MATLAB.**

- Fichier script MATLAB : **install_addon.m**
- Fichier archive qui contient les fichiers à installer : **smlink.r2020b.win64.zip**

Dans la fenêtre de commande de MATLAB taper la commande qui lance l'installation de Multibody Link :

```
>> install_addon('smlink.r2020b.win64.zip')
.....
Installation of smlink complete.

To view documentation, type "doc smlink"
```

Attention, le nom du fichier archive contenu entre les parenthèses de la commande **install_addon** doit être exactement celui que vous avez téléchargé et dépend donc de votre version de MATLAB et de votre système d'exploitation.

Il faut ensuite enregistrer MATLAB comme serveur Automation en tapant la commande suivante :

```
>> regmatlabserver
```

Une fois l'installation terminée, taper la commande suivante afin de créer le lien entre MATLAB et Solidworks.

```
>> smlink_linksw
```

La procédure d'installation est terminée.

C. Conversion d'un fichier assemblage de Solidworks en fichier xml

Lancer Solidworks.

La fenêtre d'accueil du logiciel s'ouvre

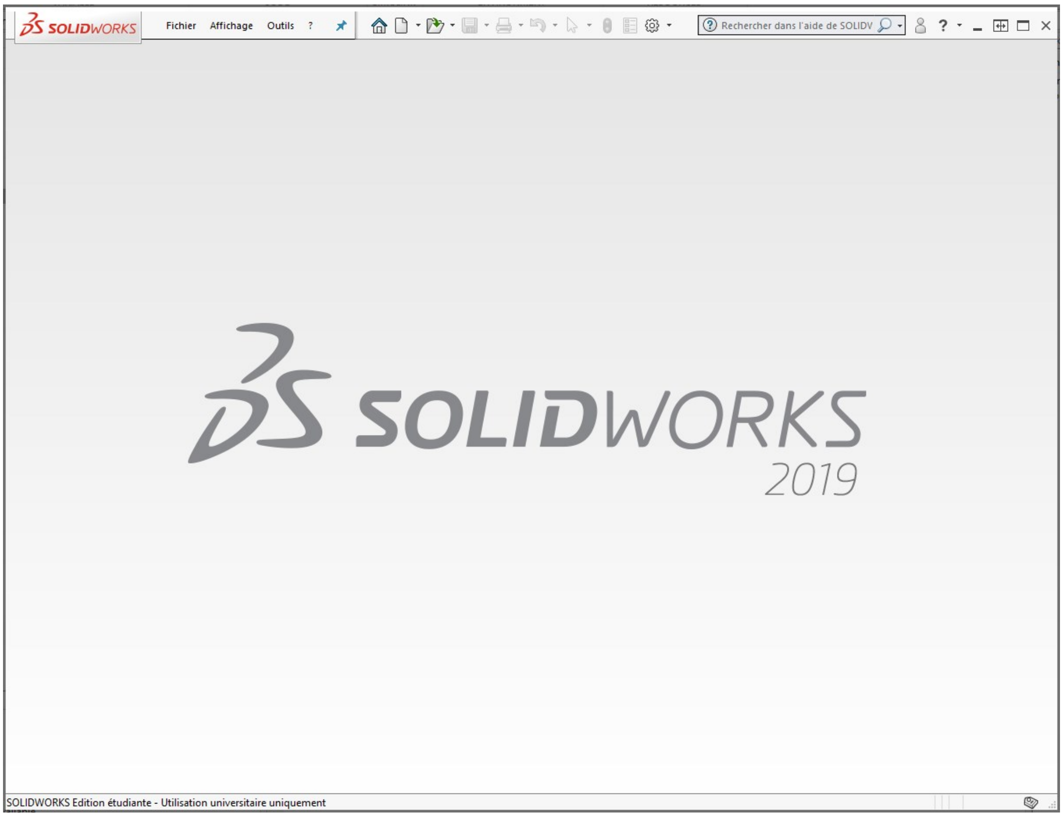
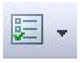


Figure 503 : fenêtre d'accueil de Solidworks

La fenêtre d'accueil du logiciel s'ouvre, dérouler le menu **options**  puis sélectionner **compléments** pour ouvrir la fenêtre de définition des compléments du logiciel.

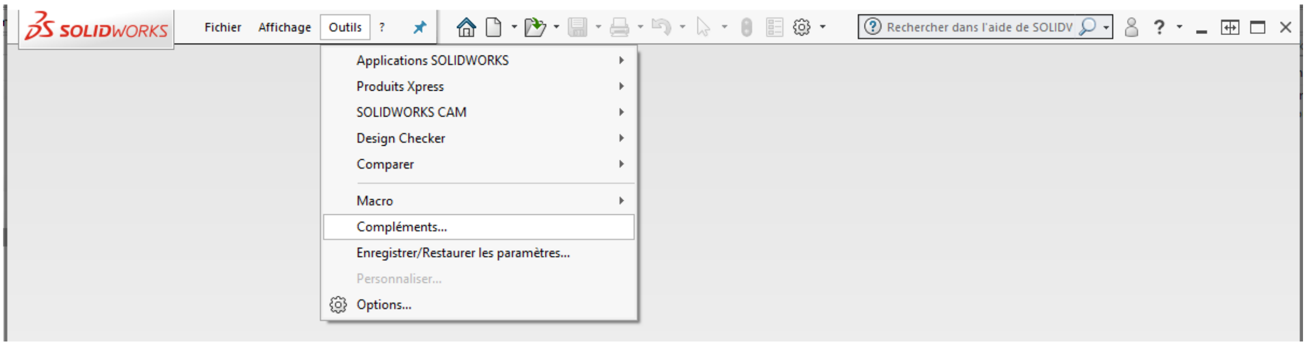


Figure 504 : ouverture de la fenêtre des compléments de Solidworks

Cocher les deux cases à gauche et à droite de **Simscape Multibody Link** afin d'activer **Simscape Multibody Link** à chaque démarrage de Solidworks (Figure 505).

Cliquez sur **OK**.

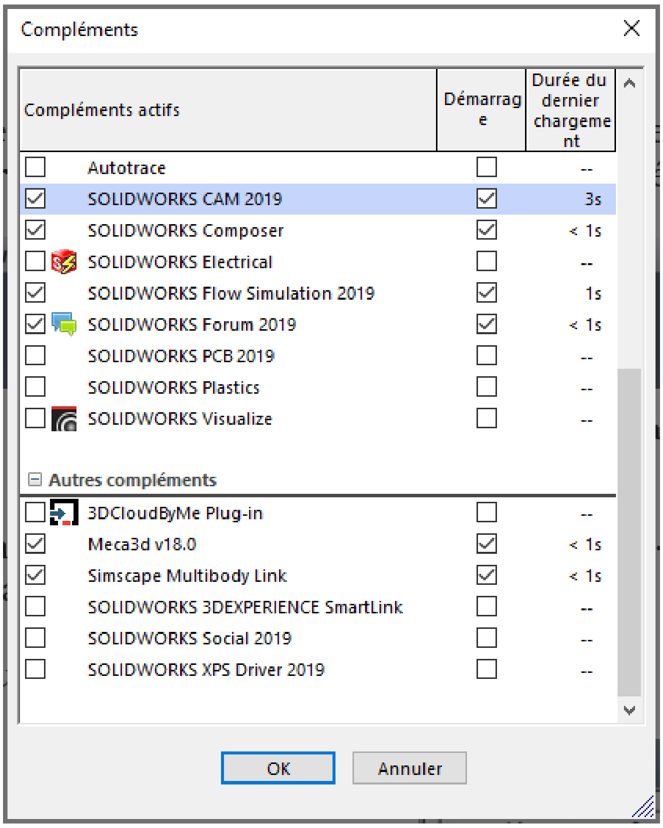


Figure 505 : sélection des compléments de Solidworks

Quitter, puis **relancer** Solidworks.

Avec Solidworks, **Ouvrir** le fichier ***Assemblage pilote hydraulique.sldasm*** dans le dossier « Modèle CAO 3D du pilote/Partie Mécanique »

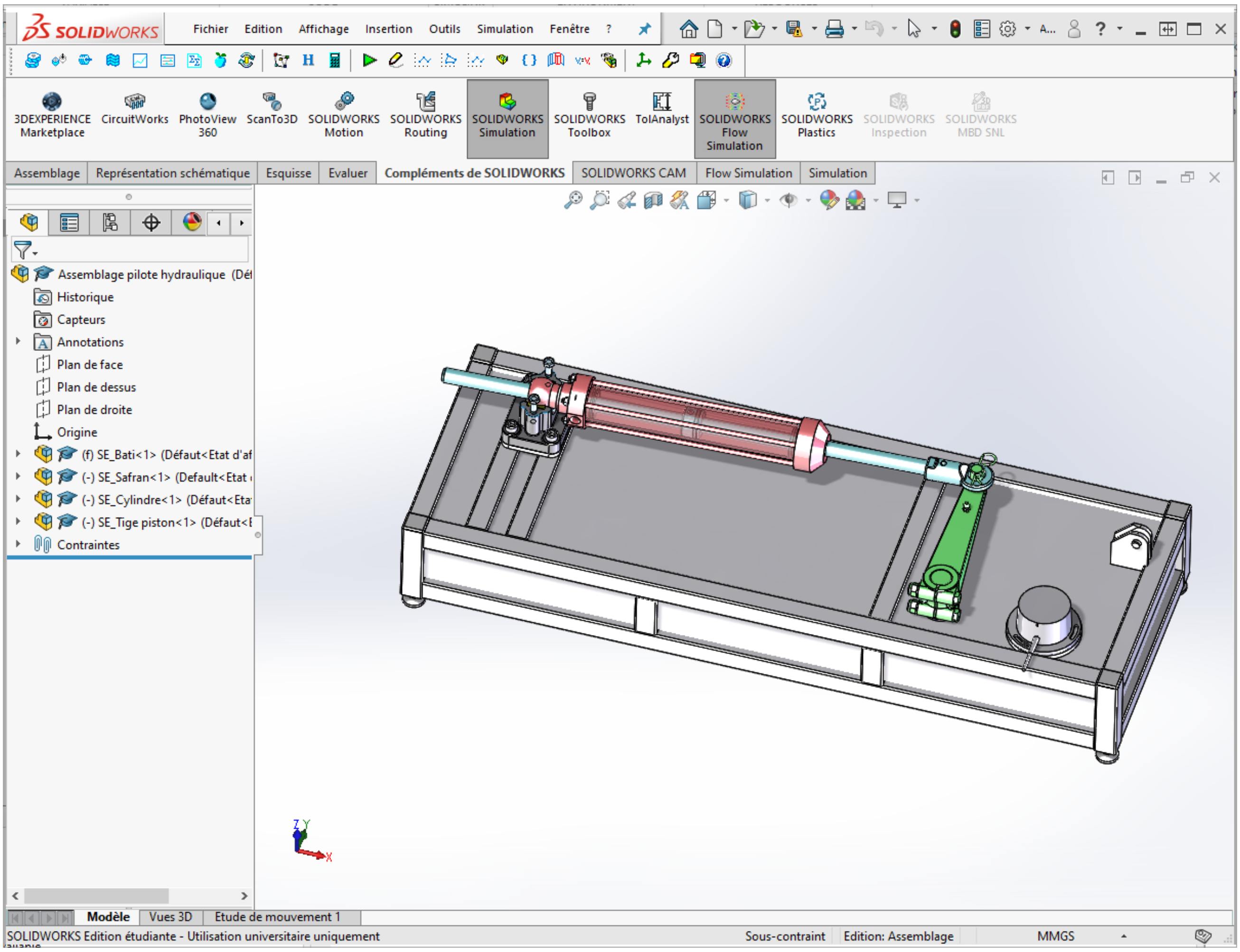


Figure 506 : ouverture du modèle Solidworks de la partie mécanique du pilote

Pour convertir l'assemblage au format **xml**, cliquer dans la barre de menu sur **Outils/Simscape Multibody Link/Export/Simscape Multibody**

Prendre soin de choisir comme dossier d'exportation un dossier qui appartient au « path » de MATLAB. Ici nous prendrons le dossier vide « conversion_pilote-xml » placé au même niveau que le dossier « Modèle CAO 3D du pilote ». Choisir comme nom de fichier ***Assemblage_pilote_hydraulique***.

Après quelques secondes de travail, Solidworks va ouvrir et fermer tous les fichiers pièces qui constituent l'assemblage pour les convertir au format STL. Une fenêtre qui s'ouvre automatiquement indique la fin de la conversion.

Ouvrir le dossier « conversion_pilote_xml » avec l'explorateur Windows pour constater qu'il contient toutes les pièces du mécanisme au format **STL** ainsi qu'un fichier nommé **Assemblage_pilote_hydraulique.xml.**

Retourner dans MATLAB et taper dans la fenêtre de commande :

```
>>smimport('Assemblage_pilote_hydraulique.xml')
```

Cette commande va permettre de créer le fichier **Multibody** correspondant à l'assemblage et ouvre automatiquement un nouveau fichier contenant le modèle.

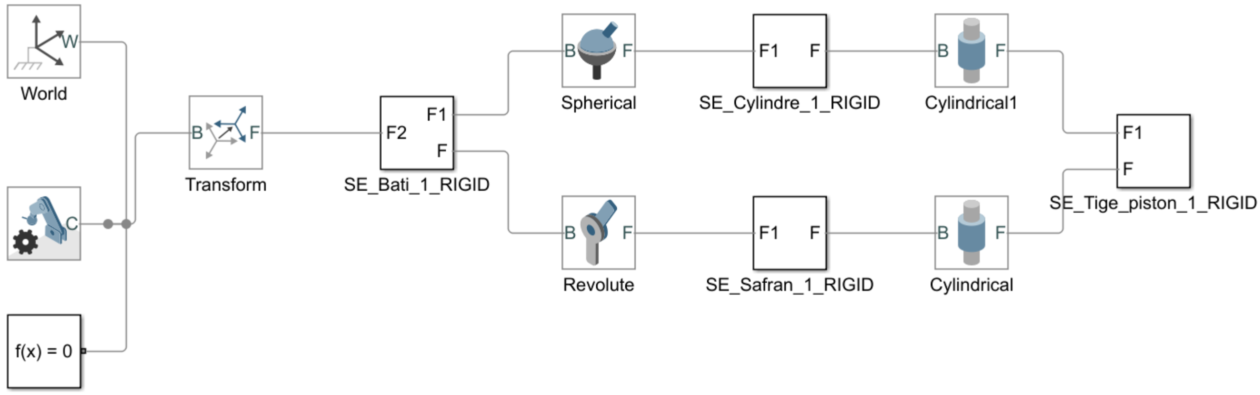


Figure 507 : modèle Multibody obtenu

Nous retrouvons le fichier sur lequel nous avons travaillé au début de ce chapitre.

Lancer la simulation, la fenêtre Mechanics Explorer s'ouvre et vous pouvez visualiser la maquette du pilote dans MATLAB. Il se peut que la pesanteur ne soit pas par défaut sur le bon axe.

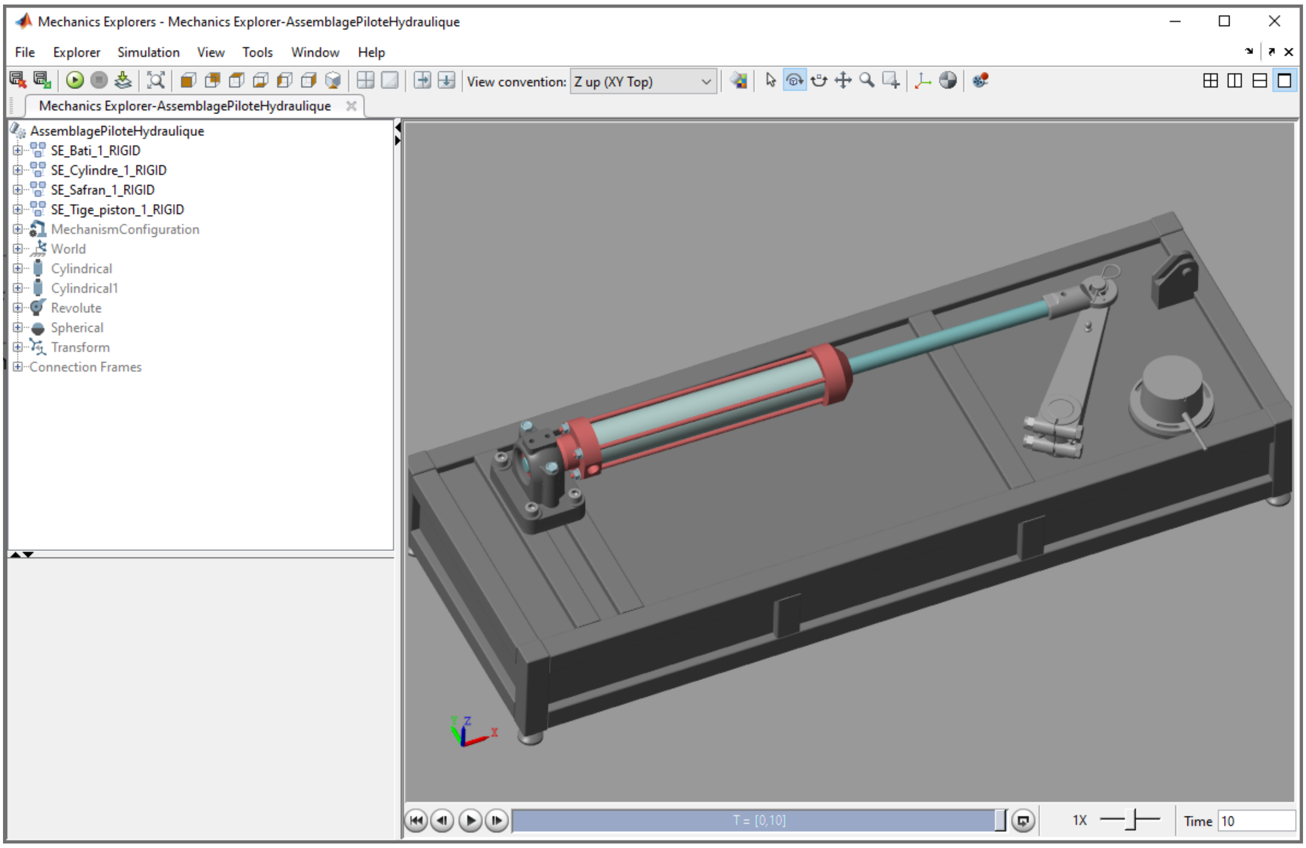


Figure 508 : fenêtre Mechanics Explorer

Chapitre 9 : L'identification d'un modèle

I. La modélisation black-box, l'identification

A. Présentation de la méthode

Cette approche, consiste à associer un modèle mathématique à un comportement mesuré expérimentalement. Le système est considéré ici comme une boite noire avec une grandeur d'entrée et une grandeur de sortie. Le principe consiste à imposer une grandeur d'entrée connue au système et à relever la grandeur de sortie. Il suffit ensuite de trouver un modèle mathématique pour la fonction de transfert du système qui donnera la même relation entre l'entrée et la sortie. Cette méthode donne uniquement un modèle du comportement global du système sans se préoccuper de l'influence séparée des différents paramètres sur les performances.

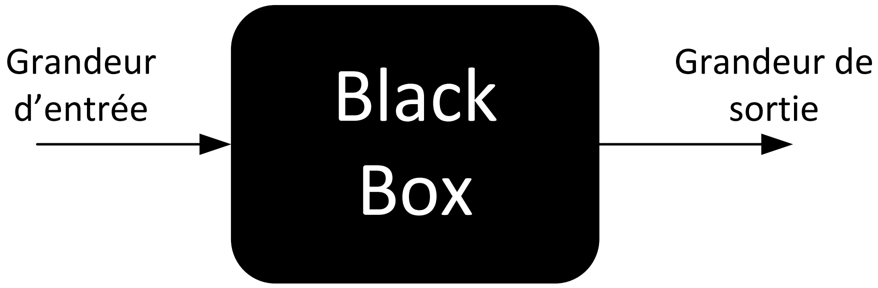


Figure 509 : la modélisation black box

Cette méthode permet d'obtenir un modèle validé expérimentalement sans avoir à écrire les équations qui régissent le comportement du système. Le modèle doit être manipulé avec précaution dans le cas ou des phénomènes non-linéaires entre en compte dans le comportement réel du système. En pratique on réalise toujours plusieurs essais correspondant à des sollicitations différentes (grandeur d'entrée constante ou sinusoïdale avec une variation de la fréquence).

Mise à part quelques cas simples, l'identification de la fonction de transfert demande une ressource de calcul importante. L'outil logiciel va nous permettre d'automatiser cette tâche en proposant des modèles mathématiques pour des processus d'identification qui peuvent être complexes.

MATLAB propose une application appelée « System Identification » qui permet de mener à bien ce processus. Comme toutes les applications, elle est accessible à partie de l'onglet **APPS** .

B. Mise en œuvre de la méthode en utilisant la toolbox Identification

1. Analyse des données utilisées pour l'identification

Ouvrir et exécuter le script **donnees_identification.m.**

Ce script permet d'afficher les grandeurs d'entrée et de sortie d'un essai en boucle ouverte sur un axe linéaire. Une tension est imposée aux bornes du moteur de l'axe linéaire (grandeur d'entrée) et la vitesse linéaire de l'axe est relevée (grandeur de sortie). Les conditions dans lesquelles l'essai a été réalisé sont illustrées Figure 510.

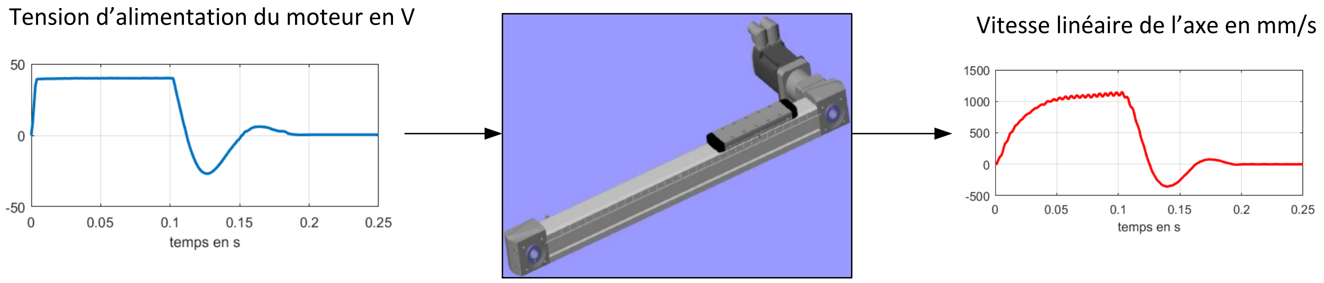


Figure 510 : les conditions de l'essai

La Figure 511 permet de visualiser les signaux d'entrée et de sortie.

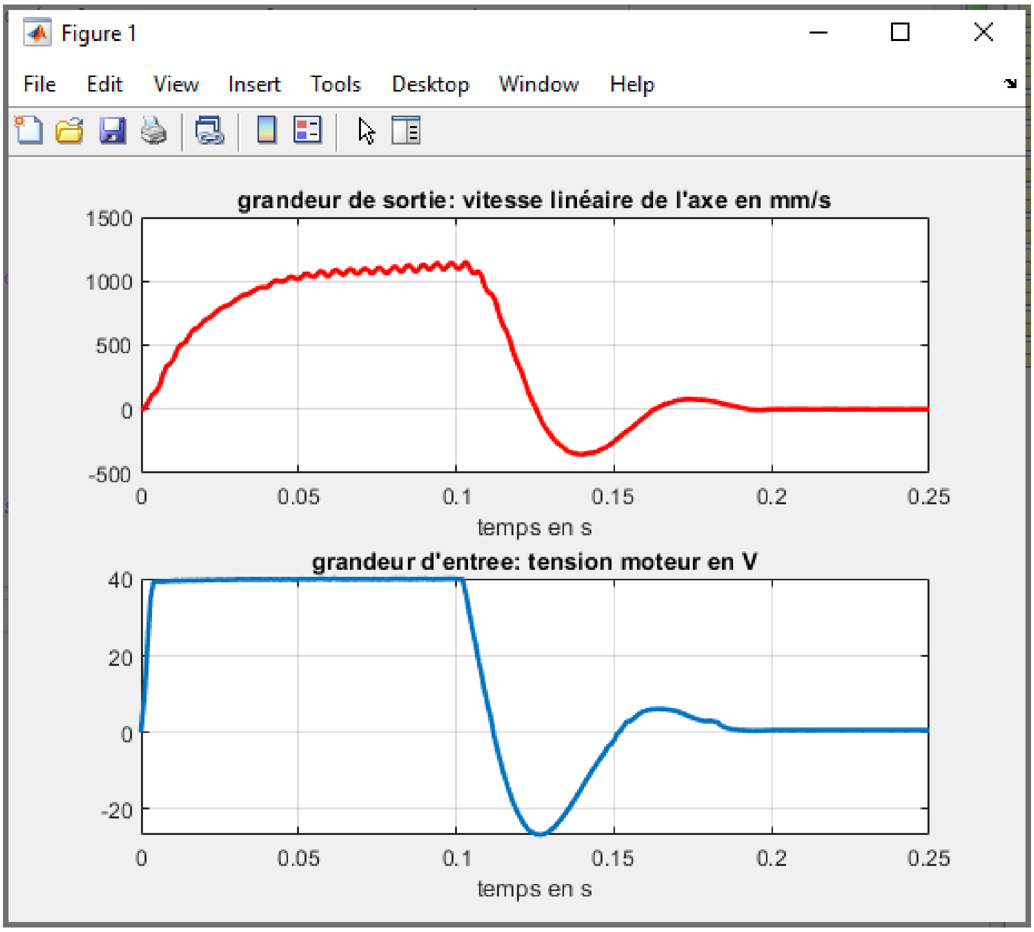


Figure 511 : visualisation des données utilisées pour l'identification

L’exécution du script a également crée dans le **Workspace** de MATLAB les variables suivantes :

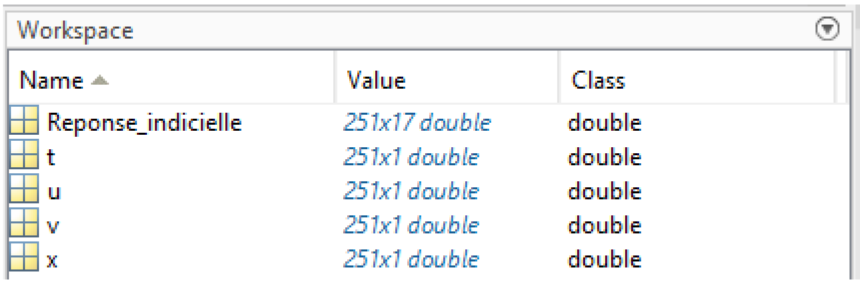


Figure 512 : visualisation dans le Workspace des données utilisées pour l’identification

- t : vecteur contenant la variable temps
- u : vecteur contenant la variable tension d’alimentation
- v : vecteur contenant la variable vitesse linéaire de l’axe
- x : vecteur contenant la variable position linéaire de l’axe

2. Ouverture et présentation de la toolbox « System Identification »

Pour lancer l’application « **System Identification** », sélectionner l’onglet APPS dans la fenêtre de commande de MATLAB et activer le menu déroulant des applications proposées par le logiciel. Vous pouvez alors voir apparaître toutes les applications disponibles. Sélectionner l’application **System Identification** (Figure 513).

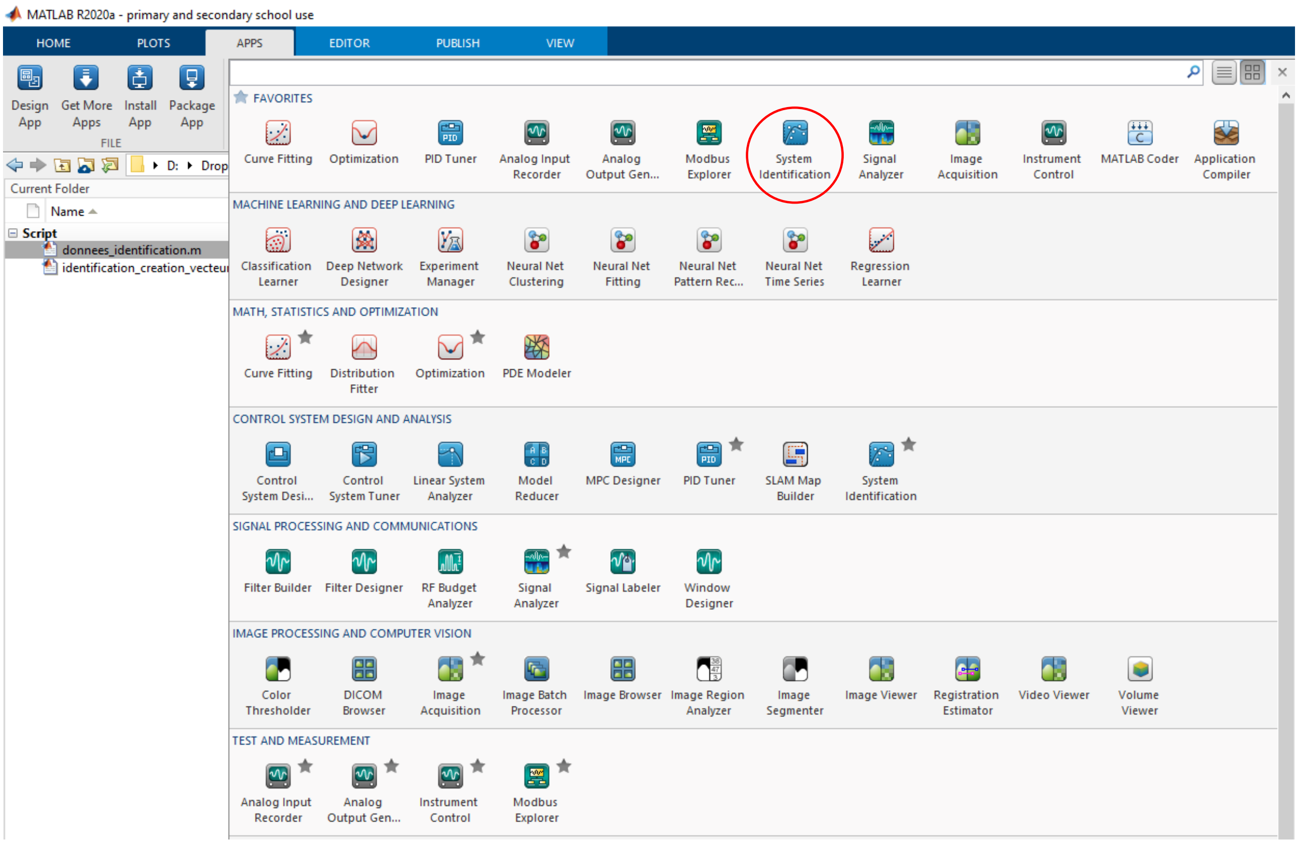


Figure 513 : menu déroulant des applications de MATLAB

Une fenêtre s’ouvre et présente les fonctionnalités de l’application (Figure 514).

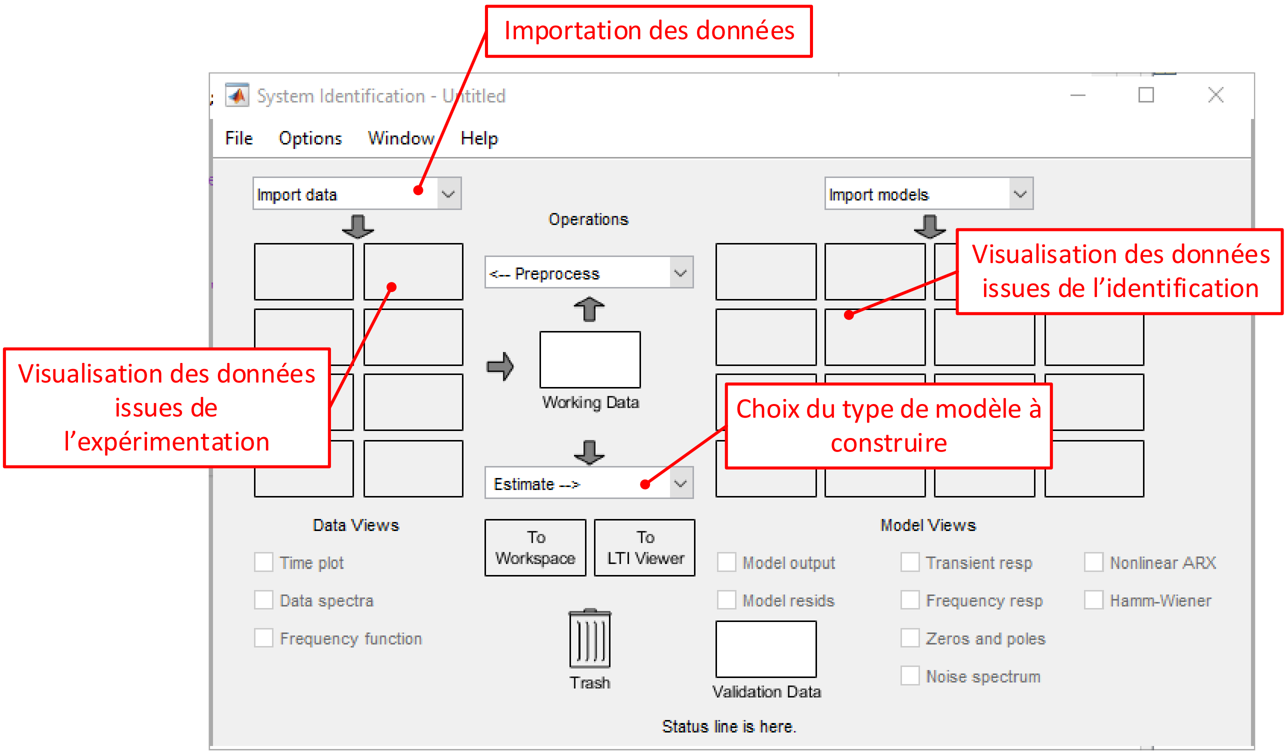


Figure 514 : description de la fenêtre de la toolbox identification

3. Importation des données

Il est possible d'importer tout type de données : temporelle, fréquentielle, Data object…
Dans notre exemple les données issues de l'expérimentation sont des données temporelles.

Sélectionner **Import data/Time domain data.**

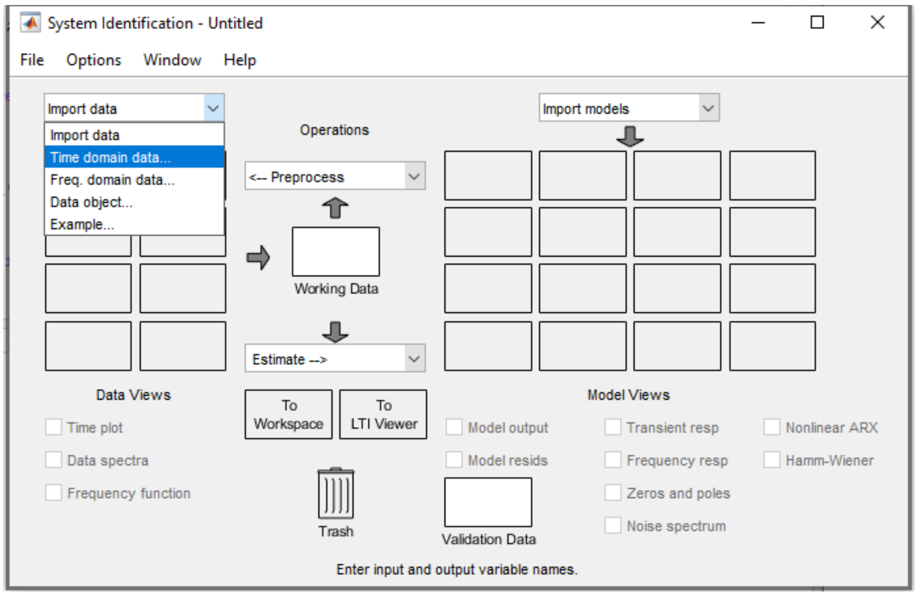


Figure 515 : importation de données temporelles

Cette commande permet d'ouvrir la fenêtre permettant de définir les données nécessaires pour l'identification. Compléter cette fenêtre avec les données de la Figure 516.

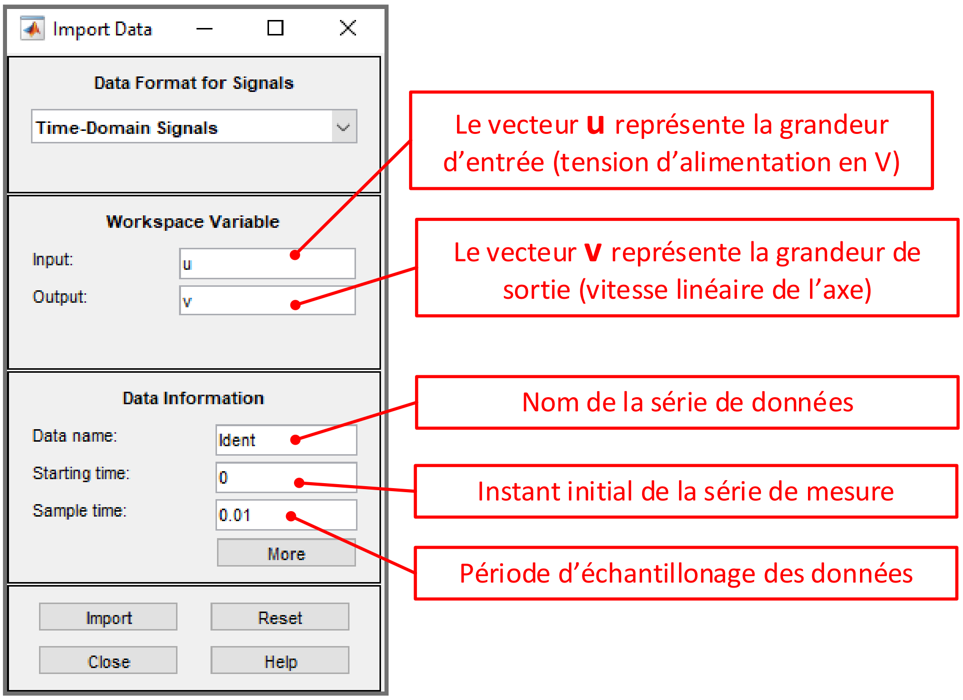


Figure 516 : sélection des données temporelles pour l'identification

Cliquer ensuite sur **Import** pour importer les données dans la fenêtre d'identification. Les données apparaissent alors dans la fenêtre de la « System Identification » toolbox comme le montre Figure 517. Cocher la case **Time plot** pour vérifier et visualiser la bonne importation des données (Figure 518).

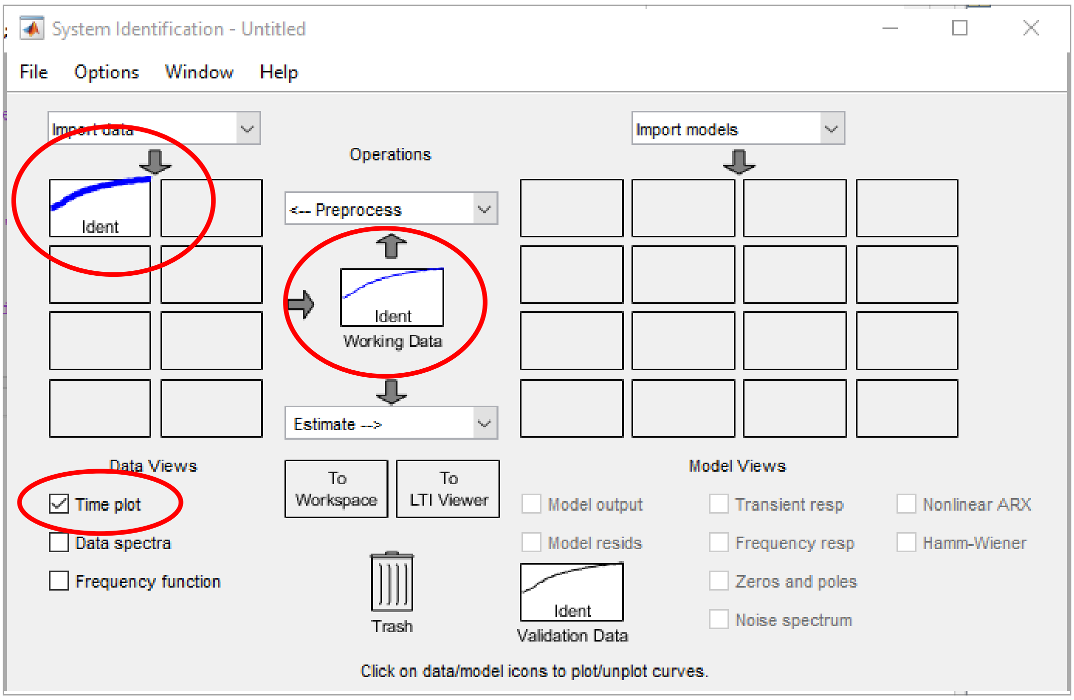


Figure 517 : visualisation des données importées dans la fenêtre de la « System Identification » toolbox

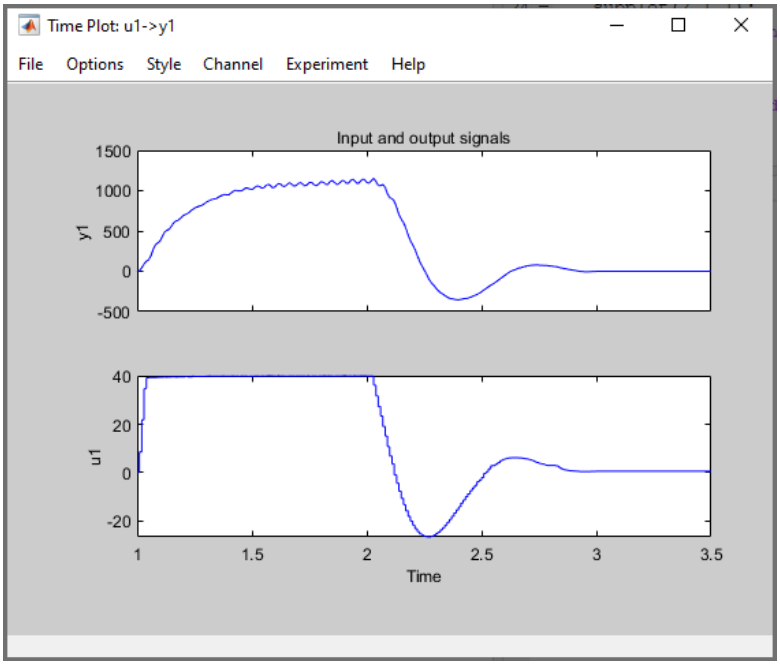


Figure 518 : visualisation des données importées dans la « System Identification »toolbox

Il faut maintenant choisir la forme du modèle que l'on souhaite obtenir (fonction de transfert, représentation d'état, modèle non-linéaires…). Nous choisirons ici un modèle de type **fonction de transfert.**

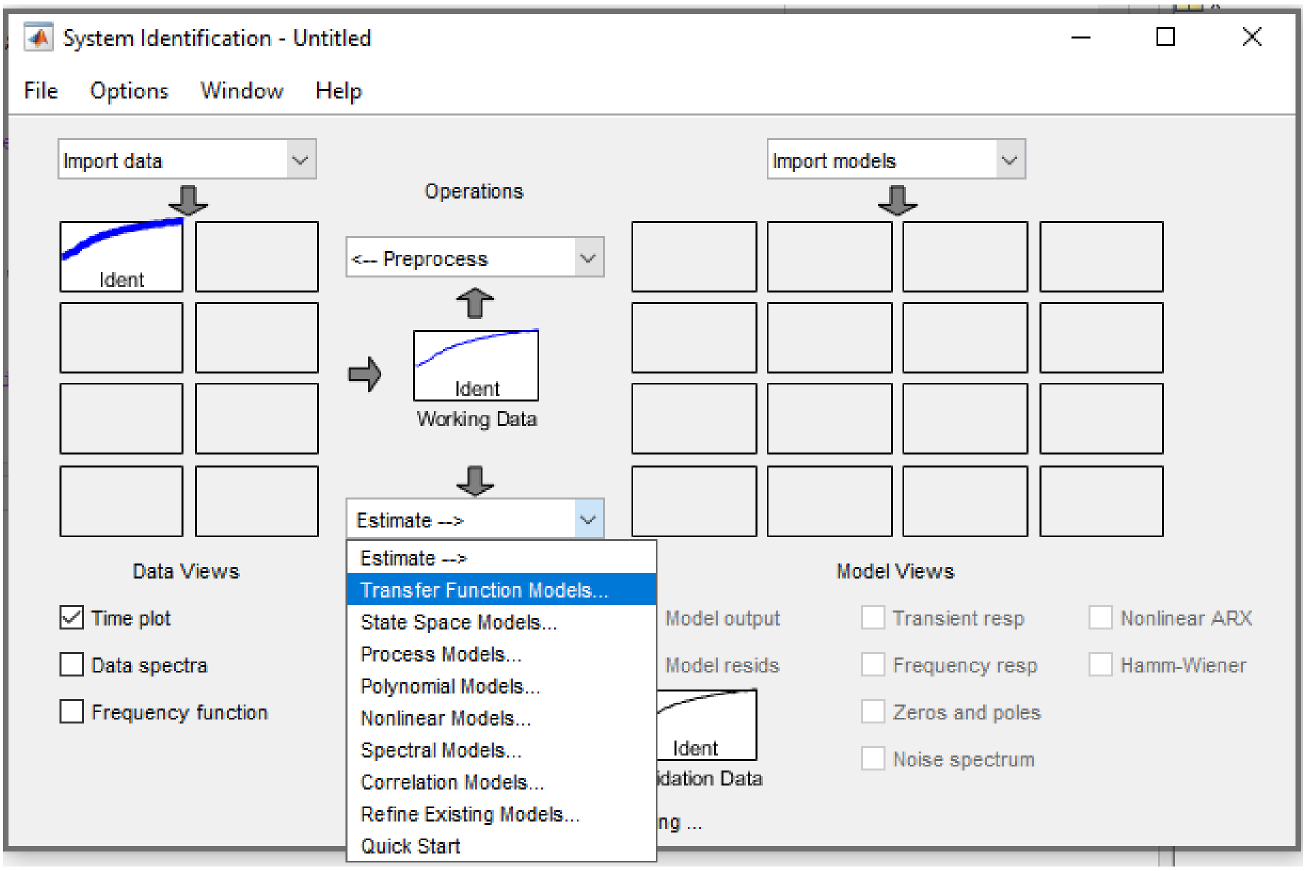


Figure 519 : choix de la forme du modèle dans la « System Identification » toolbox

La fenêtre qui s'ouvre permet de choisir la forme souhaitée pour la fonction de transfert. Ici nous prendrons une fonction de transfert du second ordre. Choisir **2 pôles et pas de zéro** puis cliquer sur **Estimate**.

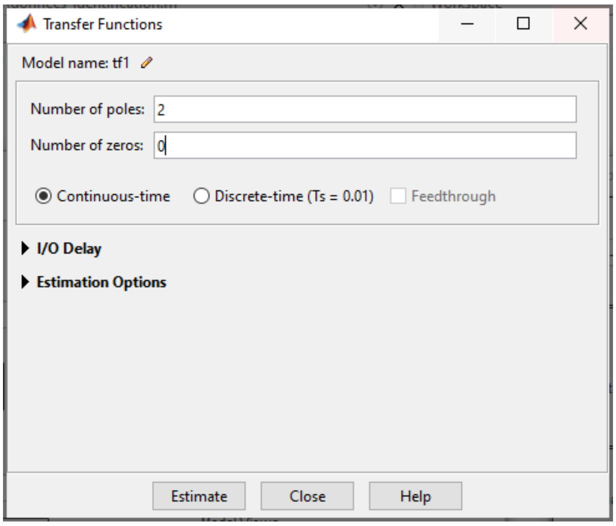


Figure 520 : choix de la forme de la fonction de transfert dans la « System Identification » toolbox

La fenêtre **Plant Identification Progress** donne les détails sur le processus numérique d'identification

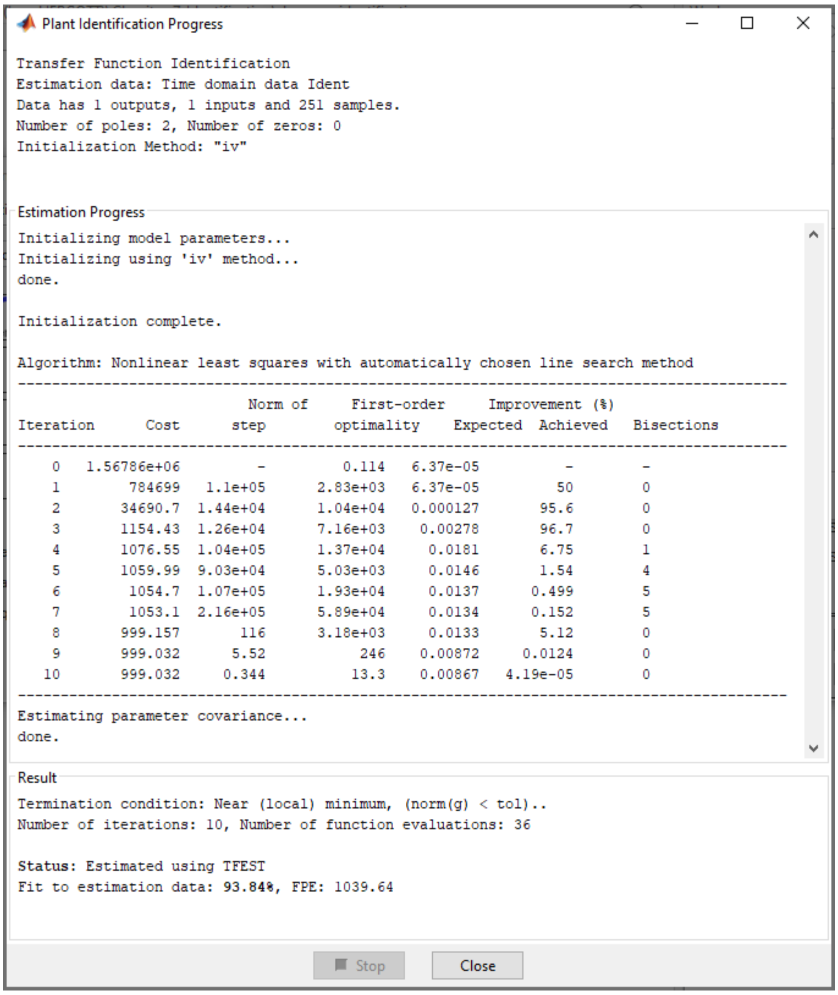


Figure 521 : la fenêtre Plant Identification Progress de la « System Identification » toolbox

Le résultat de l'identification est consultable en cliquant avec le bouton droit de la souris sur la case **tf1** représentant le résultat de l'identification (Figure 522 et Figure 523). Cocher également la case **Model output** pour visualiser la superposition des données expérimentales et du modèle issu de l'identification (Figure 524).

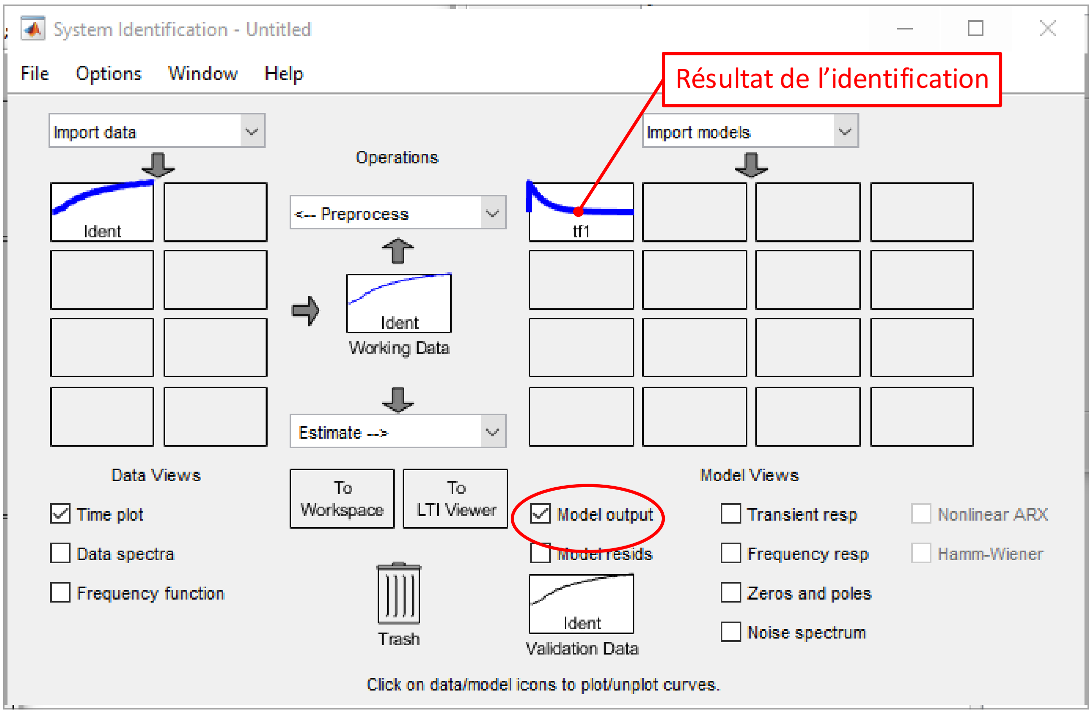


Figure 522 : visualisation de résultats de l'identification

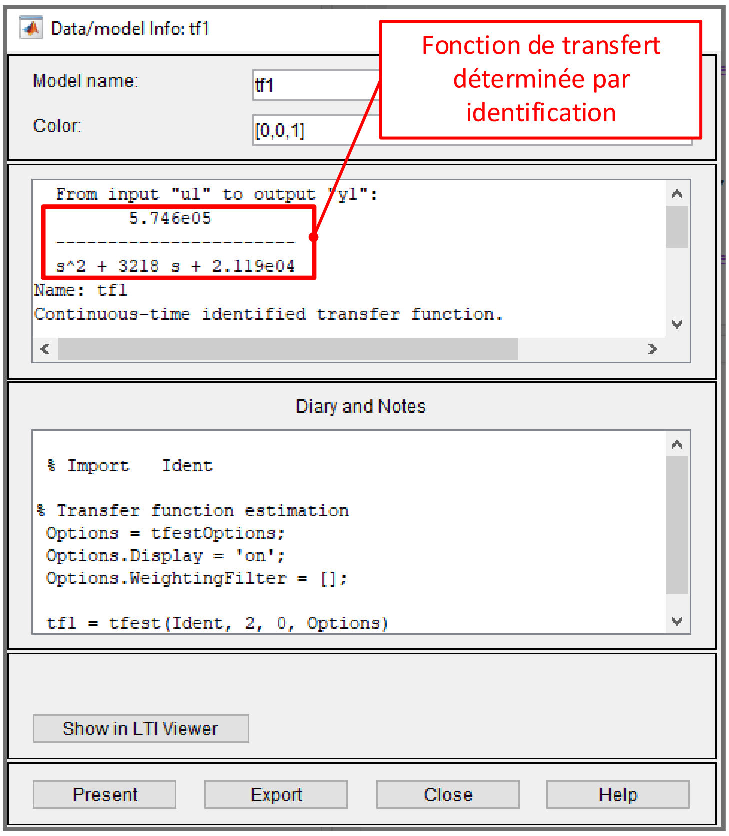


Figure 523 : fonction de transfert obtenue par identification

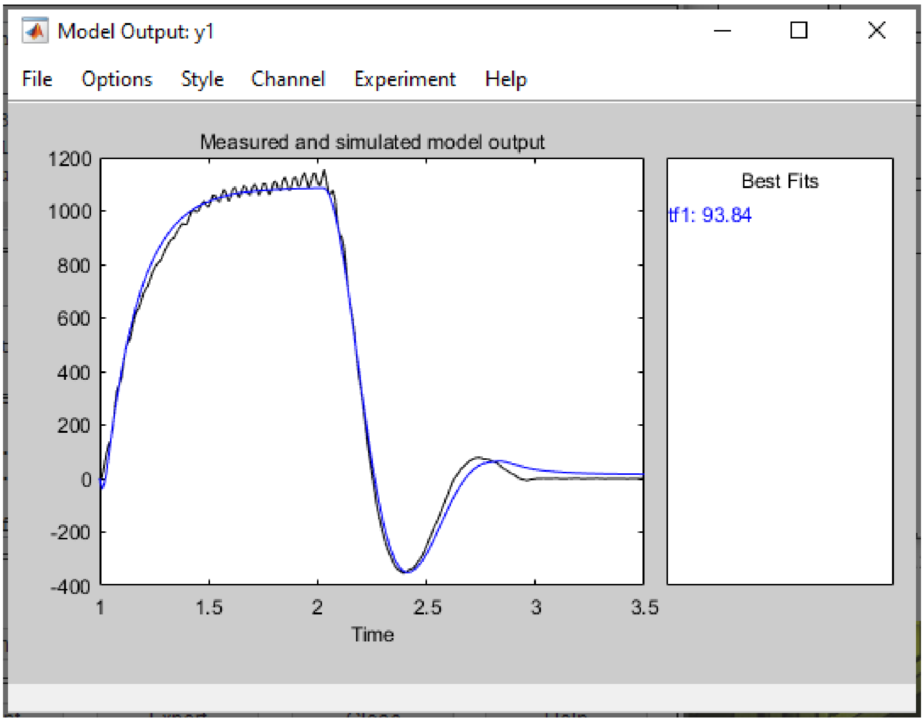


Figure 524 : superposition des données issues de l'expérimentation et du modèle issu de l'identification

Il est également possible à partir de la fenêtre Data/Model info (Figure 523) d'exporter la fonction de transfert déterminée par identification vers le Workspace de MATLAB en cliquant sur **Export**. La fonction de transfert tf1 apparaît alors dans le Workspace. Il est possible par exemple de tracer un diagramme de Bode de cette fonction de transfert en tapant la commande **bode (tf1)** dans la fenêtre de commande de MATLAB.

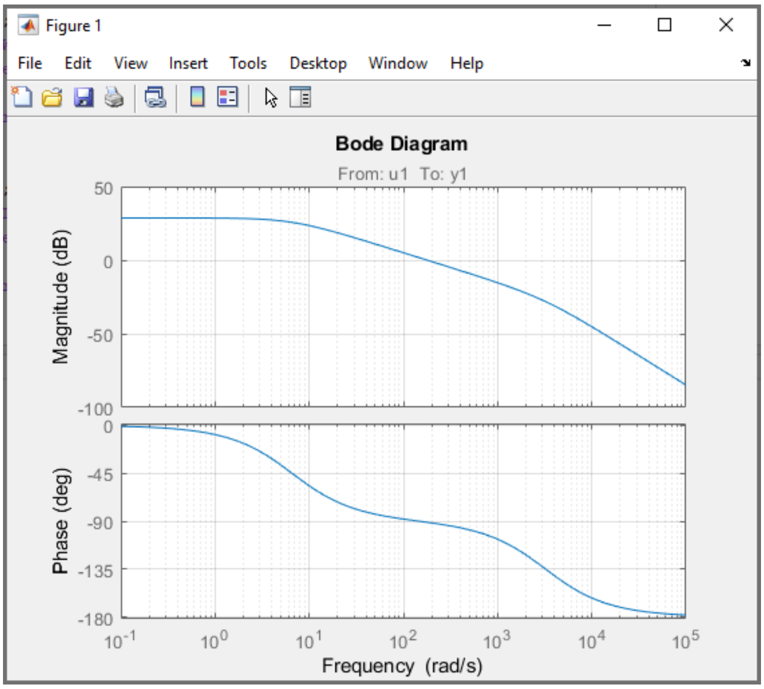


Figure 525 : diagramme de Bode de la fonction de transfert tf1

C. Utilisation de la méthode en utilisant les lignes de commandes

Pour identifier la réponse du système en utilisant les lignes de commande, il faut dans un premier temps créer un objet de type ***iddata*** contenant tous les éléments nécessaires à l'identification :

- Le vecteur contenant la réponse du système
- Le vecteur contenant l'entrée du système
- La période d'échantillonnage des données

Taper la commande suivante :

```
>> mydata=iddata(v,u,0.01)
mydata =

Time domain data set with 251 samples.
Sample time: 0.01 seconds

Outputs     Unit (if specified)
  y1

Inputs      Unit (if specified)
  u1
```

Il suffit maintenant de demander une identification par une fonction de transfert en spécifiant le nombre de pôle et le nombre de zéros de la fonction de transfert. On utilise pour cela la commande *tftest* en spécifiant 2 pôles et 0 zéro comme cela a été fait en utilisant la toolbox identification.

```
>>H = tfest(mydata,2,0)

H =

 From input "u1" to output "y1":
      5.746e05
 ----------------------
 s^2 + 3218 s + 2.119e04

Continuous-time identified transfer function.

Parameterization:
  Number of poles: 2   Number of zeros: 0
  Number of free coefficients: 3
  Use "tfdata", "getpvec", "getcov" for parameters and their uncertainties.

Status:
Estimated using TFEST on time domain data "mydata".
Fit to estimation data: 93.84% (simulation focus)
FPE: 1040, MSE: 999
```

MATLAB renvoie alors la fonction de transfert du second ordre, identique à celle obtenue en utilisant l'application **System Identification**.

Commandes utiles pour l'identification	
Fonctions	Commandes
Création d'un objet *iddata* pour l'identifiaction	mydata=iddata(y,u,Ts) y : vecteur contenant les données de la sortie u : vecteur contenant les données de l'entrée Ts : période d'échantillonnage des données
Identification par une fonction de transfert de la réponse d'un système	H=tftest(mydata,np,nz) mydata : objet créé à l'aide de la fonction iddata np : nombre de pôles souhaités pour la fonction de transfert nz : nombre de zéros souhaités pour la fonction de transfert

Il existe également de nombreuses commandes permettant de préparer les données pour l'identification (filtrage, réglages de l'offset, remplacement des données manquantes…). Pour plus d'informations sur ces commandes, vous pouvez consulter l'aide de la **System Identification Toolbox**.

Chapitre 10 : Le contrôle commande avec MATLAB - Simulink

I. Introduction

MATLAB – Simulink possède de très puissants outils de contrôle commande des systèmes asservis. Le logiciel peut réaliser automatiquement le réglage d'un correcteur PID dans un environnement ou l'utilisateur agit sur les paramètres de réglages sans qu'il lui soit nécessaire d'avoir recours à des bases théoriques. Le logiciel propose également des modes experts ou toutes les méthodes classiques du contrôle commande sont exploitées et peuvent être mises en œuvre. Le principal avantage est de pouvoir disposer de tous les tracés fréquentiels et temporels nécessaires au processus de synthèse d'un correcteur. Ces tracés évoluent de manière dynamique en fonction de la structure du correcteur imposée par l'utilisateur.

II. Réglage automatique d'un PID

Pour illustrer la démarche de contrôle commande avec MATLAB et Simulink, nous allons étudier l'asservissement en vitesse d'un moteur à courant continu.

A. Modélisation

Les équations électrique, mécanique et de couplage d'un moteur à courant continu sont données

$$\begin{cases} u(t) = e(t) + R\,i(t) + L\dfrac{d\,i(t)}{dt} \\ e(t) = K_e\,\omega_m(t) \\ J\dfrac{d\,\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f\,\omega_m(t) \\ C_m(t) = K_m\,i(t) \end{cases}$$

$u(t)$: tension de commande du moteur (V)

$\mathrm{e}(\mathrm{t})$: force contre électromotrice du moteur (V)

$i(t)$: intensité dans le moteur (A)

$C_m(t)$: couple exercé par le moteur $(\mathrm{N.m})$

$C_r(t)$: couple résistant ramené sur l'arbre moteur $(\mathrm{N.m})$

$\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur $(\mathrm{rad/s})$

R : résistance de l'induit (Ω)

L : inductance de l'induit (H)

J : inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur $(\mathrm{kg.m^2})$

f : paramètre de frottement visqueux $(\mathrm{N.m.s})$

$\mathrm{K_t}$: constante de couple $(\mathrm{N.m/A})$

$\mathrm{K_e}$: coefficient de force contre électromotrice $(\mathrm{V.s/rad})$

Figure 526 : modélisation du moteur à courant continu

Après avoir appliqué la transformée de Laplace à ces équations on obtient le schéma bloc du moteur à courant continu. On asservit ce moteur en vitesse selon le schéma bloc de la Figure 527.

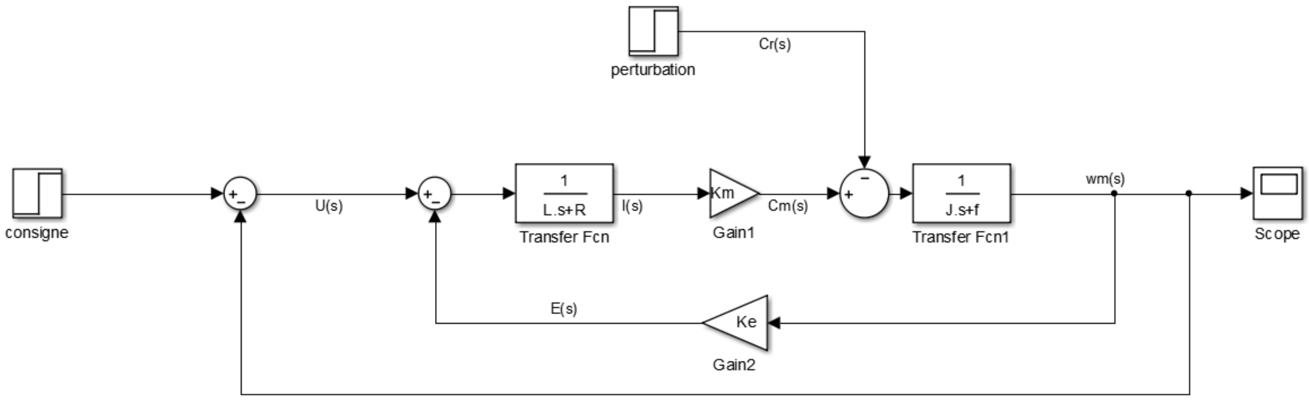


Figure 527 : asservissement en vitesse d'un moteur à courant continu

B. Ouverture du modèle

Ouvrir le fichier ***moteur_cc_ass_vit.slx*** . Certains blocs apparaissent entourés en rouge à l'ouverture du modèle (Figure 528). Cela signifie que certaines variables ne sont pas connues et que l'exécution du modèle entrainera un message d'erreur. Il faut donc donner des valeurs numériques à l'ensemble des variables du modèle.

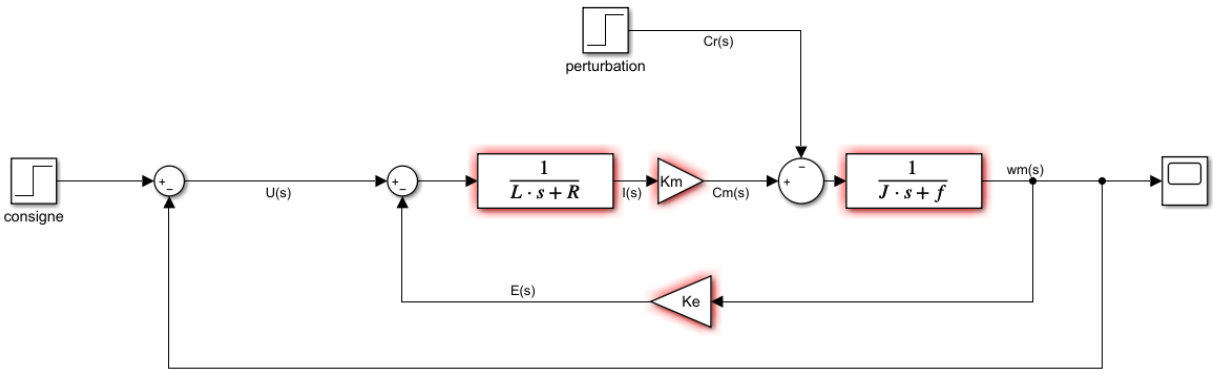


Figure 528 : modélisation de l'asservissement en vitesse du moteur

Ouvrir le script ***parametres_moteur_cc.m*** et éxécuter-le.

Lancer la simulation et visualiser la réponse dans le scope.

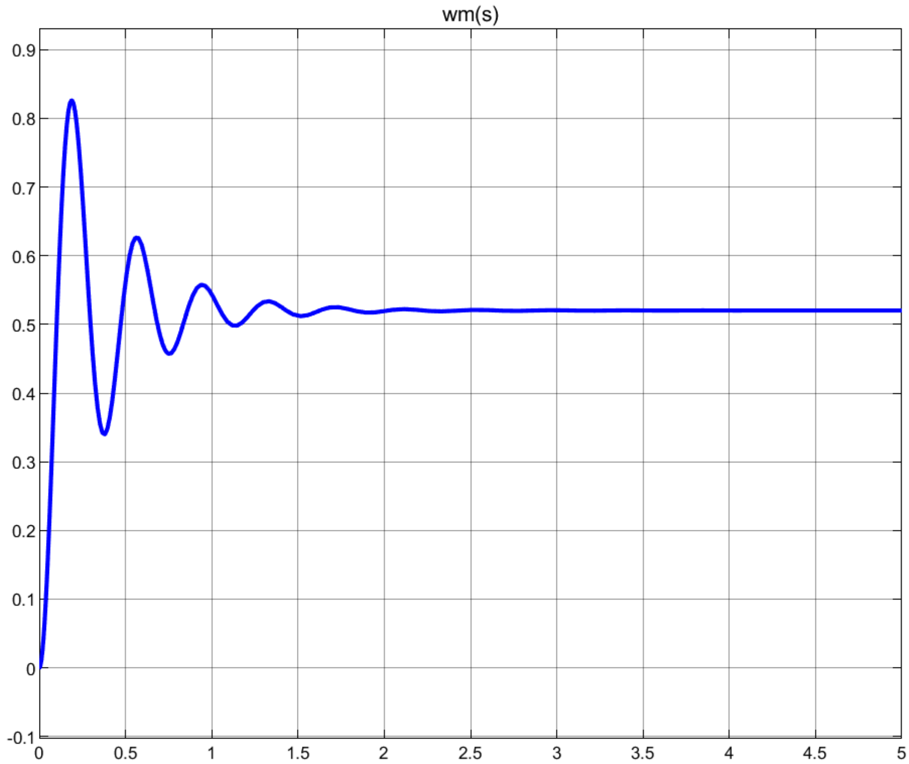
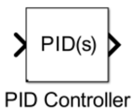


Figure 529 : réponse temporelle du système non corrigé à un échelon unitaire

Pour effecteur le réglage automatique d'un PID, il faut **insérer** le bloc **PID controller** conformément à la Figure 530.

Fonction du composant	Représentation	Bibliothèque
Correcteur PID		Simulink/Continuous

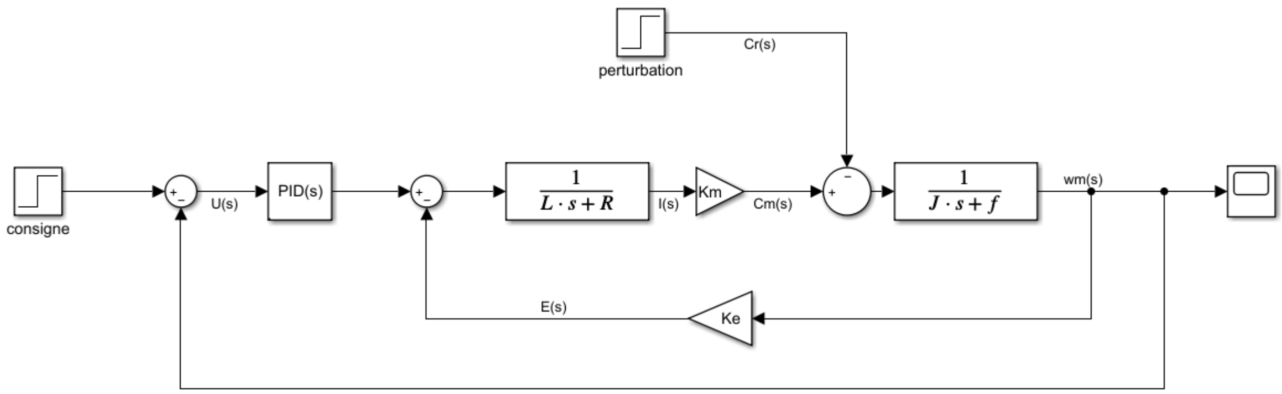


Figure 530 : ajout d'un bloc PID Controller dans l'asservissement

Double cliquer sur le bloc **PID Controller** pour ouvrir la fenêtre de paramétrage de la Figure 531.

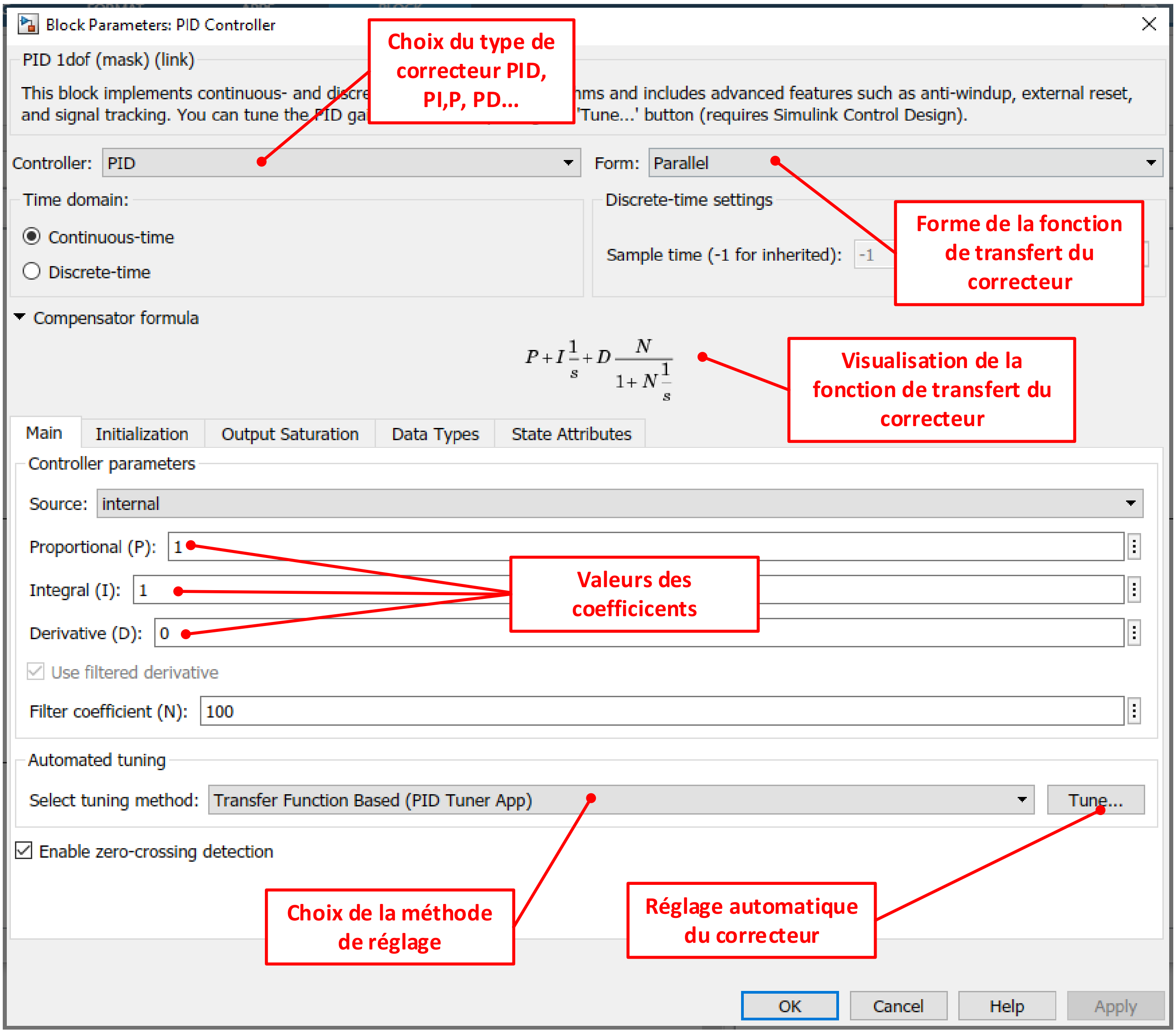


Figure 531 : fenêtre de paramétrage du PID Controller

1. Analyse de la réponse temporelle

Cliquer sur **Tune** pour ouvrir la fenêtre de réglage des performances du système.
MATLAB propose un réglage réalisant un compromis entre tous les critères de performance du système comme le montre la Figure 532. Par défaut la réponse indicielle de la fonction de transfert en boucle fermée (reference tracking) s'affiche pour le système corrigé et pour le système non corrigé.

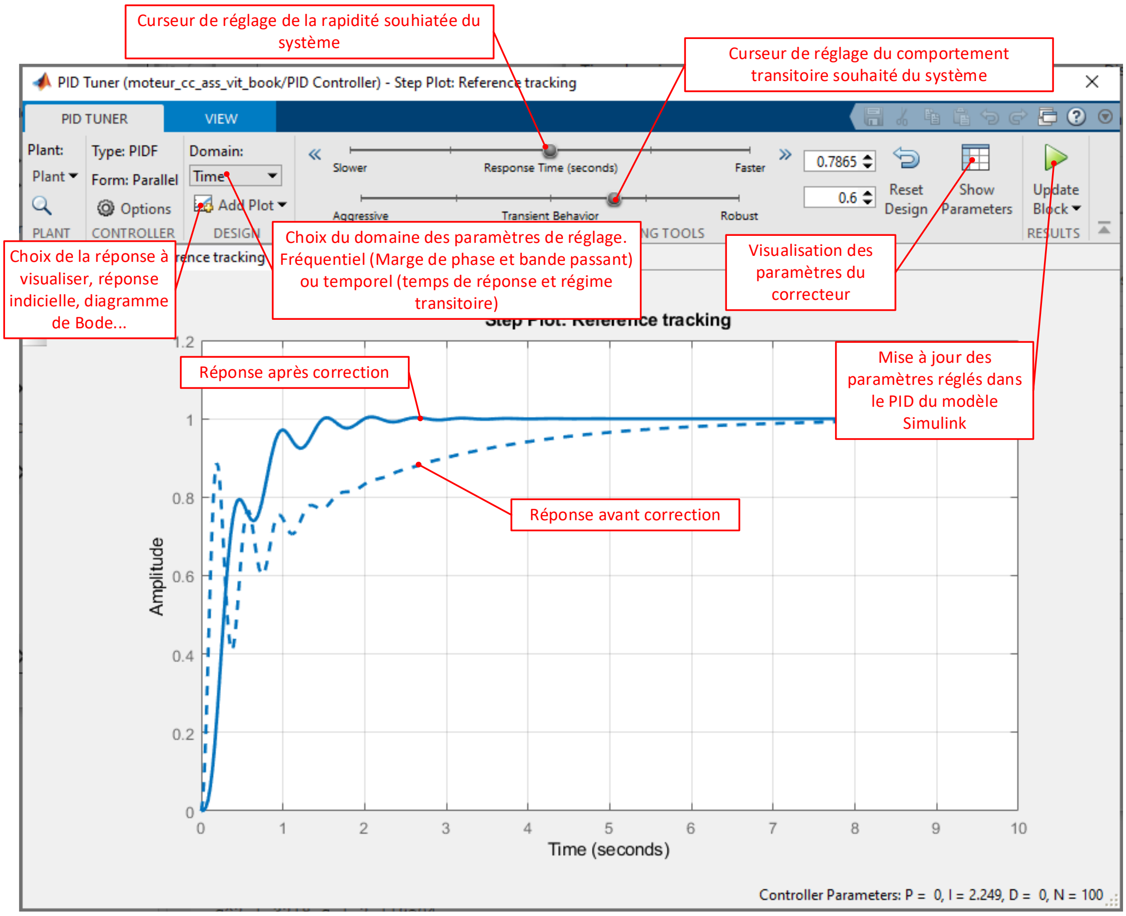
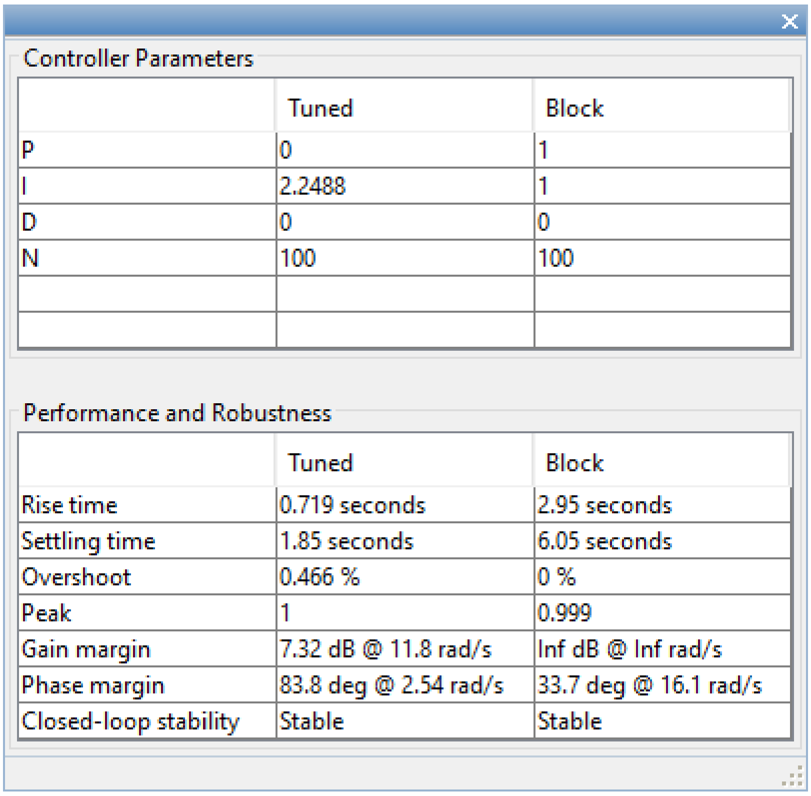


Figure 532 : fenêtre de réglage des performances du système

Il est cependant possible d'agir manuellement sur les curseurs pour modifier les performances du système et le rendre conforme à cahier un cahier des charges précis. Afin de disposer de toutes les informations nécessaires pour faire les réglages l'outil propose différentes fonctionnalités.

Cliquer sur **Show Parameters** en haut à droite de la fenêtre pour visualiser les critères de performances et les valeurs des gains du correcteur avant et après la correction comme le montre la Figure 533.



Controller Parameters

	Tuned	Block
P	0	1
I	2.2488	1
D	0	0
N	100	100

Performance and Robustness

	Tuned	Block
Rise time	0.719 seconds	2.95 seconds
Settling time	1.85 seconds	6.05 seconds
Overshoot	0.466 %	0 %
Peak	1	0.999
Gain margin	7.32 dB @ 11.8 rad/s	Inf dB @ Inf rad/s
Phase margin	83.8 deg @ 2.54 rad/s	33.7 deg @ 16.1 rad/s
Closed-loop stability	Stable	Stable

Figure 533 : les critères de performances du système et les valeurs de gain du correcteur

Pour obtenir le **diagramme de Bode la fonction de transfert en boucle ouverte**, sélectionner le menu **Add Plots/Bode/Open Loop** (Figure 534).

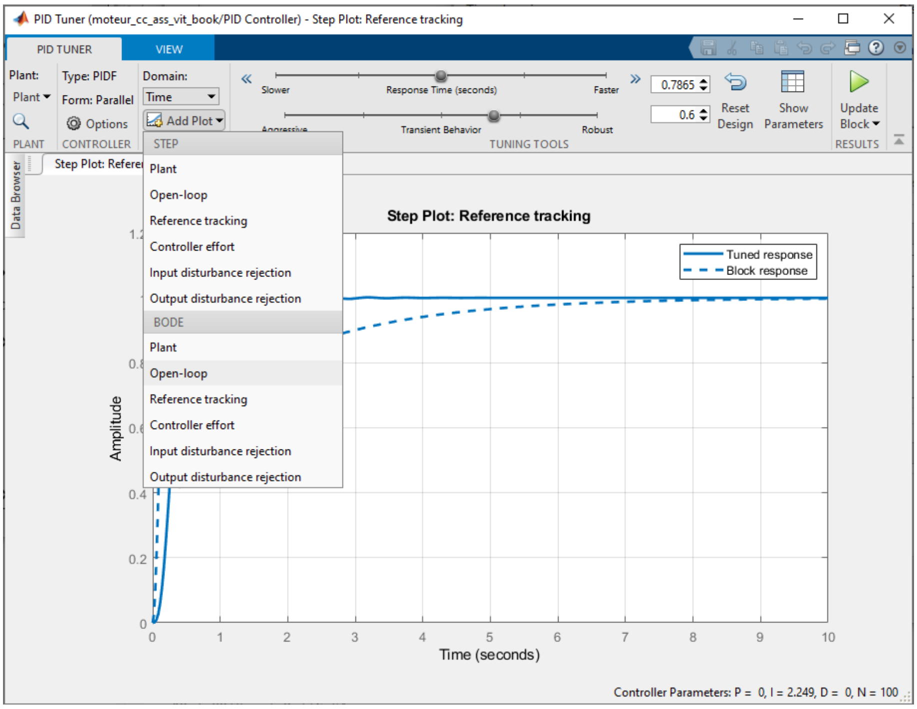


Figure 534 : ajout du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte

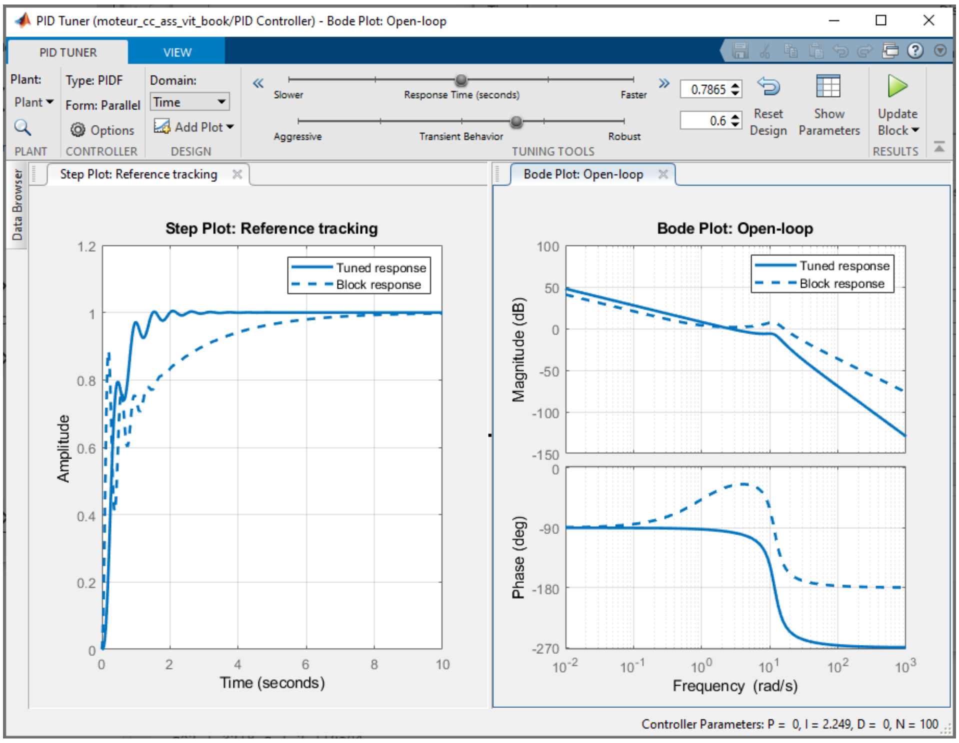


Figure 535 : visualisation du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour le réglage du PID

Les diagrammes de Bode du système corrigé et non- corrigé apparaissent sur une seconde fenêtre (Figure 535).

Pour régler les options des critères de performances, **cliquer droit** dans la fenêtre graphique de la réponse temporelle puis sélectionner **Properties**, puis onglet **Options**

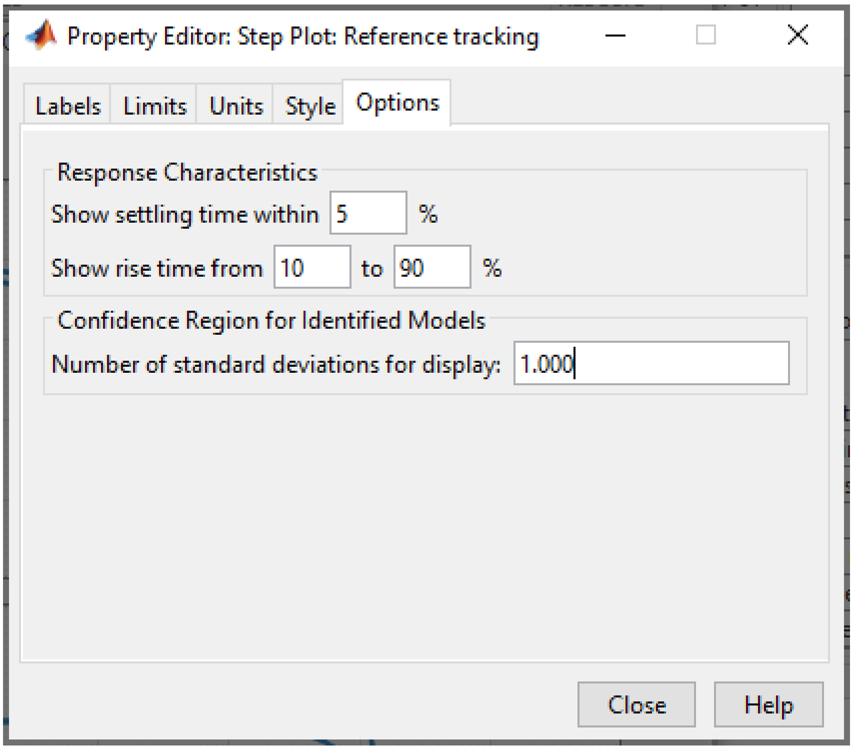


Figure 536 : réglage des options des critères de performances

Indiquer que le temps de réponse est évalué sur le critère du temps de réponse à 5% en indiquant **5%** dans le champ **Show settling time within**. Le critère **rise time** concerne le temps de montée qui, ici, est évalué entre 10% et 90% de la valeur finale atteinte. Cliquer sur **Close**.

Il est également possible de visualiser graphiquement tous les critères de performances.

Cliquer droit dans la fenêtre graphique de la réponse temporelle puis sélectionner **Characteristics/Peak Response** (dépassement)**,** puis **Characteristics/Settling Time** (temps de réponse à 5%)**,** puis **Characteristics/Rise Time** (temps de montée) puis **Characteristics/Steady State** (précision).

Cliquer droit dans la fenêtre graphique du diagramme de Bode, puis sélectionner **Characteristics/All Stability Margins** (marges de gain et marge de phase).

Il est maintenant possible de visualiser les critères de performances dans la fenêtre graphique (Figure 537).

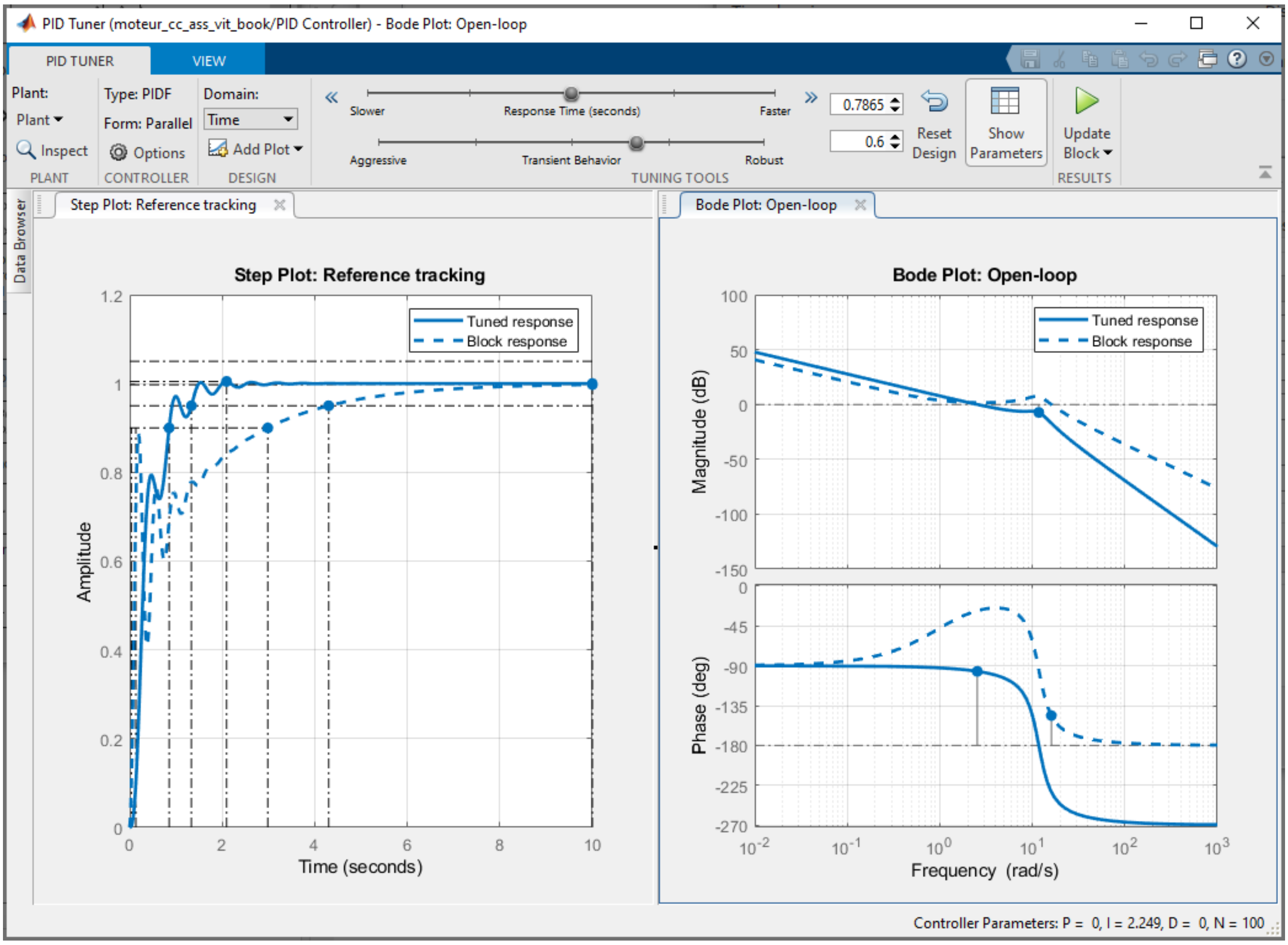


Figure 537 : visualisation des critères de performances

A ce stade, il est possible d'agir sur les curseurs de réglage et de voir évoluer de manière interactive les courbes et les paramètres.

Une fois le réglage effectué, **Cocher** la case **Update Block** pour mettre à jour automatiquement le bloc **PID Controller** de **Simulink**. Seule la réponse corrigée apparait alors dans la fenêtre graphique.

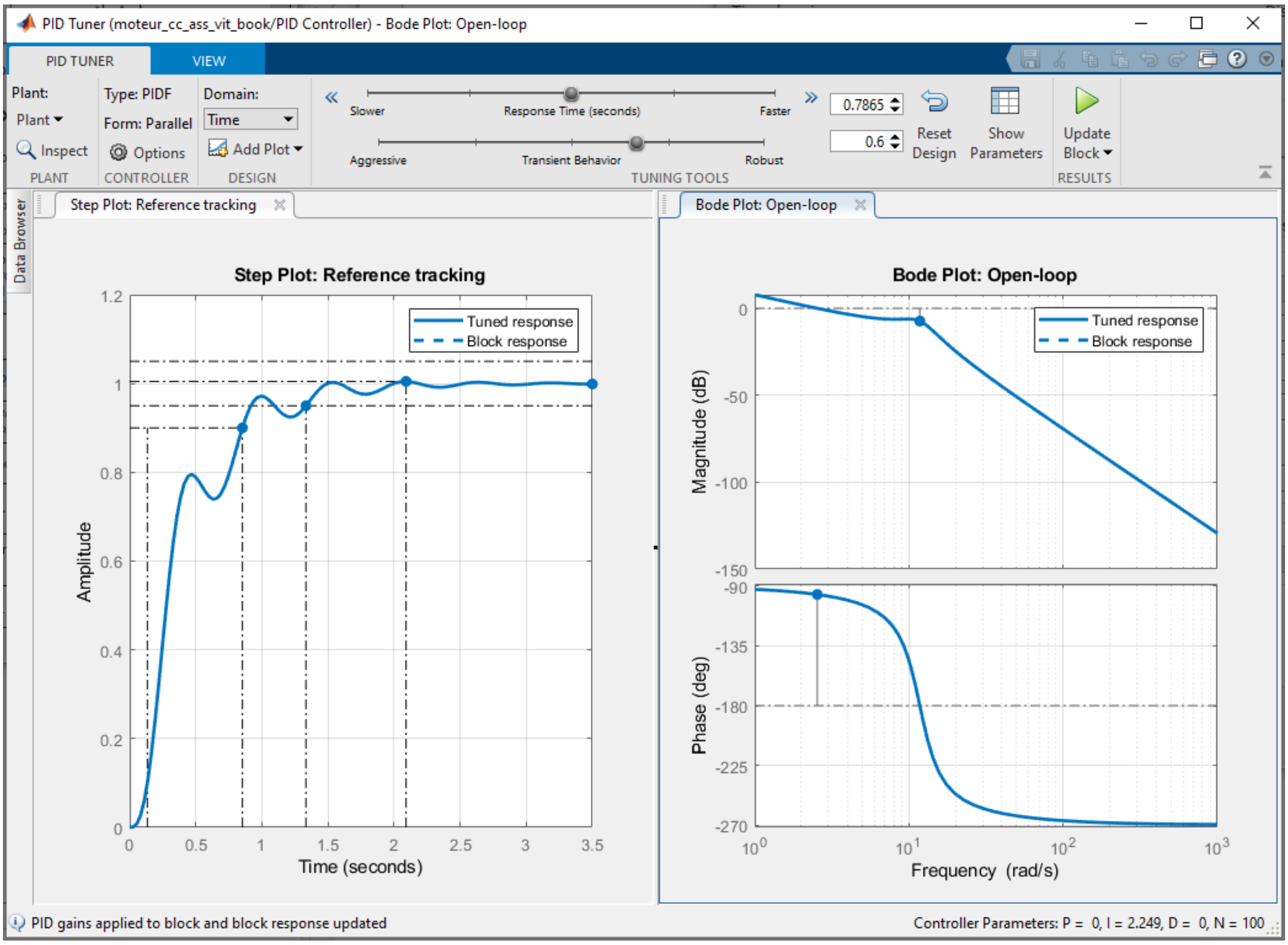


Figure 538 : réponse corrigée

2. Importation dans Simulink

Une fois que la réponse du système et bien réglée, cliquer sur OK pour retourner dans le bloc de paramétrage du PID. Nous pouvons constater que les gains du correcteur ont été actualisés avec les valeurs correspondant au réglage qui vient d'être effectué.

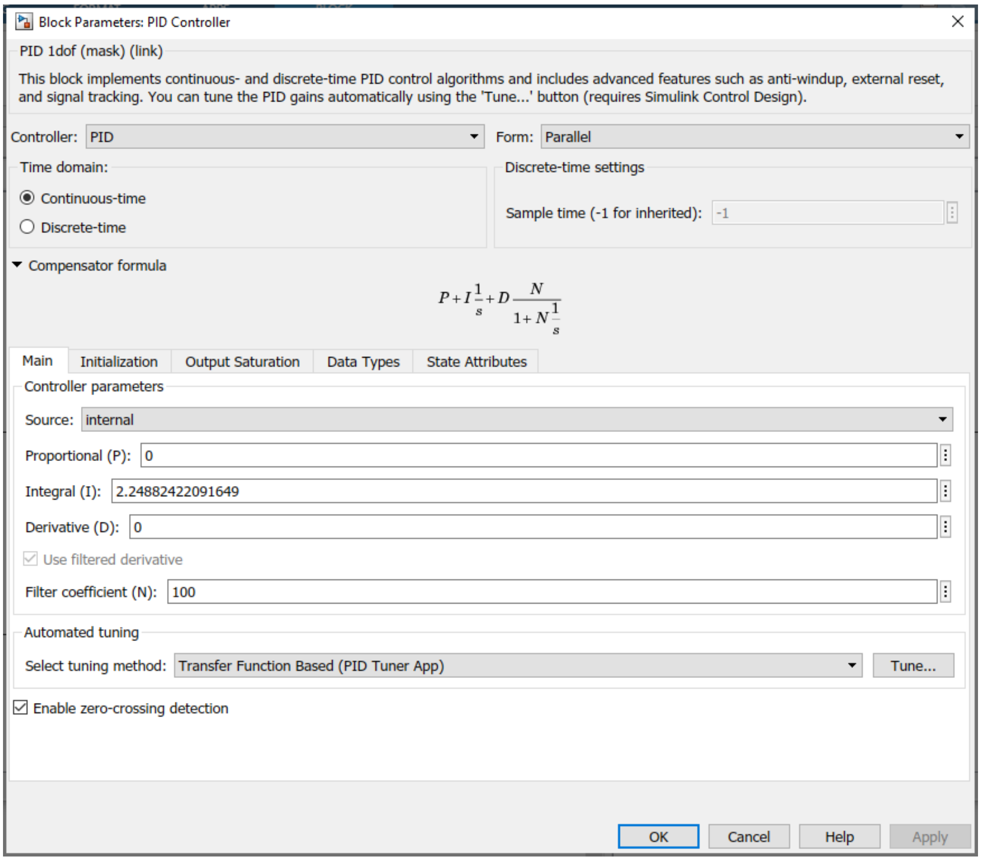


Figure 539 : actualisation automatique des paramètres du PID

Cliquer sur **OK**.
Lancer la simulation et visualiser la réponse corrigée dans le scope.

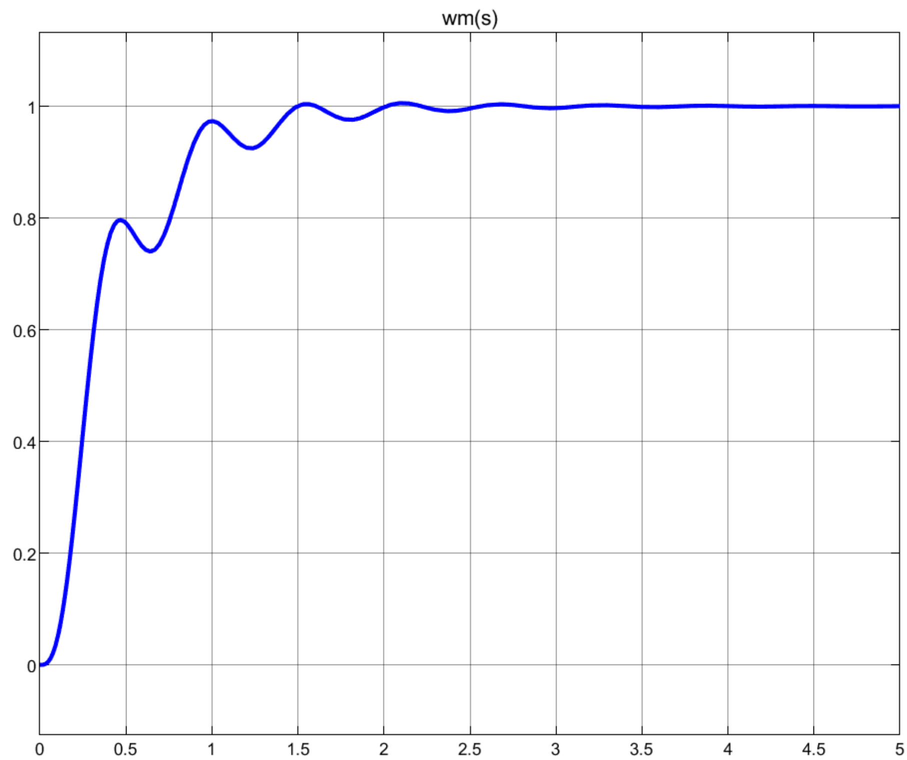


Figure 540 : réponse du système après réglage du PID

III. Réglage manuel d'un PID avec l'outil « Control System Designer »

Il est également possible de régler un PID tout en visualisant l'influence des réglages sur les réponses temporelles et fréquentielles de la fonction de transfert en boucle ouverte et de la fonction de transfert en boucle fermée. Pour cela, nous utiliserons l'application « Control System Designer ».

A. Ouverture du modèle

Ouvrir le fichier ***moteur_cc_ass_vit_control_sys_des_PID.slx.***

Ce fichier contient le modèle du moteur à courant continu asservi en vitesse avec un PID qui n'a pas encore été réglé (Gain proportionnel à 1 et les autres gains sont nuls).

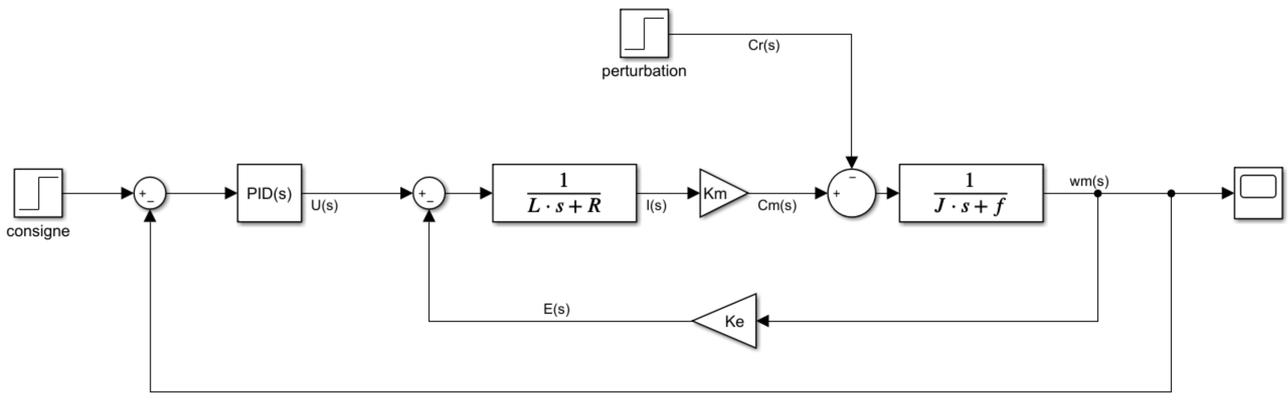


Figure 541 : modèle du moteur à courant continu asservi en vitesse avec perturbation

La consigne imposée est de 100 rad/s et une perturbation de couple est appliquée au système à l'instant t=3 s.

Les critères de performances sont les suivants :

- Écart statique nul
- Temps de montée (de 0 à 90%) de 0.8 s
- Temps de réponse à 5% de 1 s
- Dépassement maxi de 10%
- Marge de gain : 20 dB
- Marge de phase 45°
- Rejet des perturbations en régime permanent

Lancer la simulation et observer la réponse du système dans le scope.

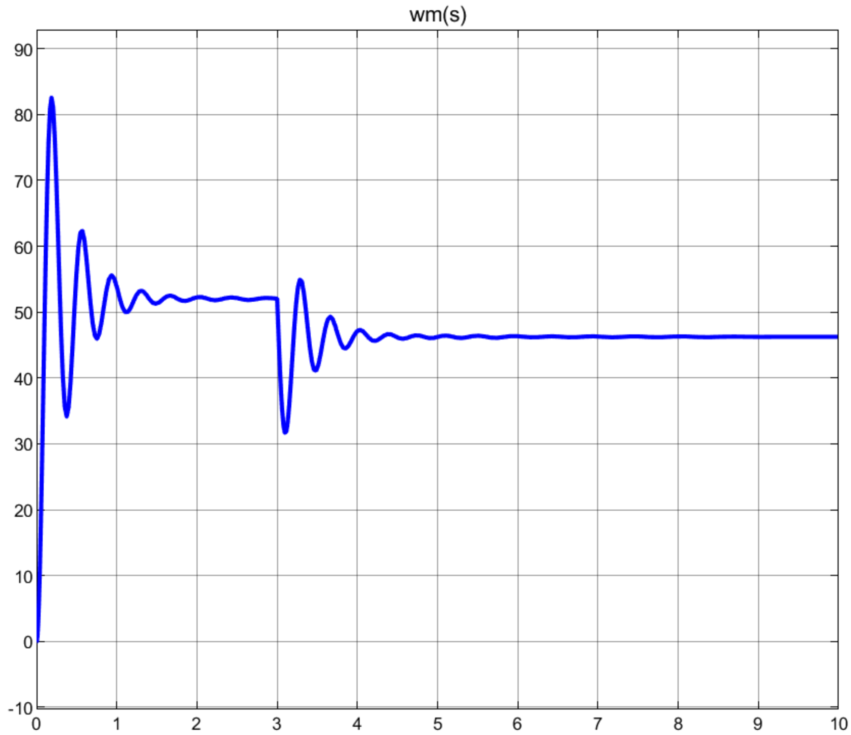


Figure 542 : réponse temporelle du système non corrigé

Nous pouvons constater que la réponse du système n'est pas satisfaisante :

Le système n'est pas précis, mal amorti et ne rejette pas correctement la perturbation.

B. Réglage du PID

1. Lancement de Control System Designer

A partir de l'onglet APPS de la fenêtre de commande de MATLAB, sélectionner l'application « Control System Designer » (Figure 543).

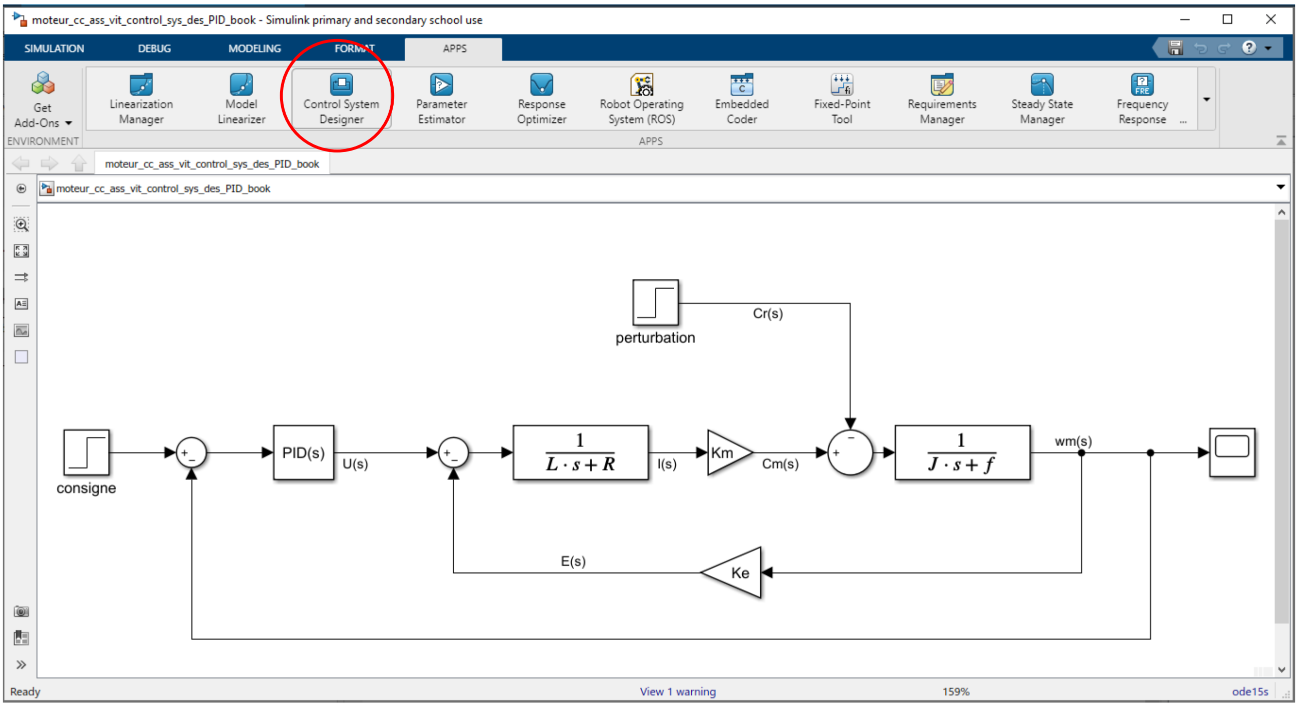


Figure 543 : lancement de l'application « Control System Designer »

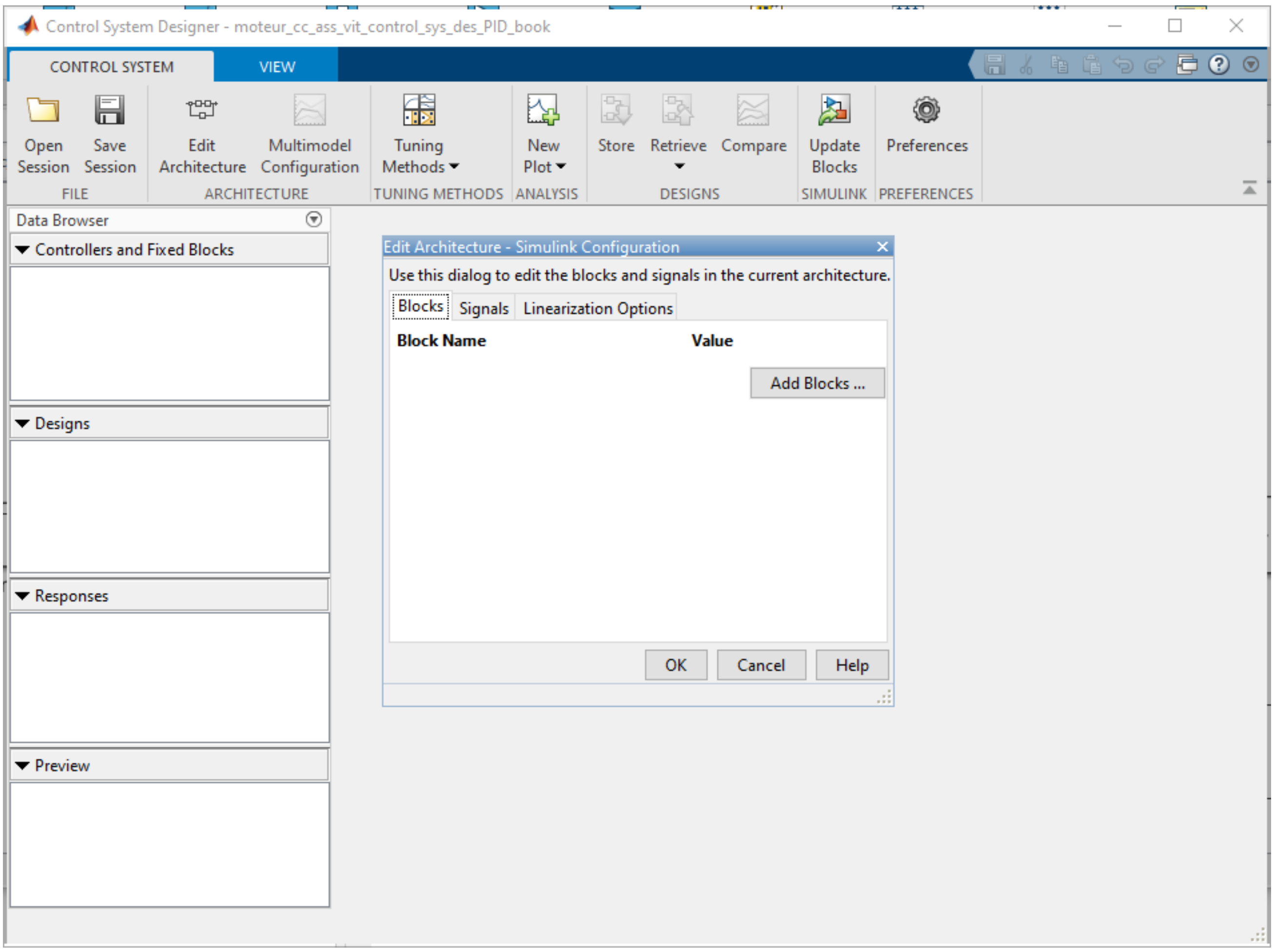


Figure 544 : Control System Designer

Afin de sélectionner le bloc à régler cliquer sur **Add Blocks** et choisir PID Controller comme bloc à régler, puis cliquer sur **OK**. (Figure 545).

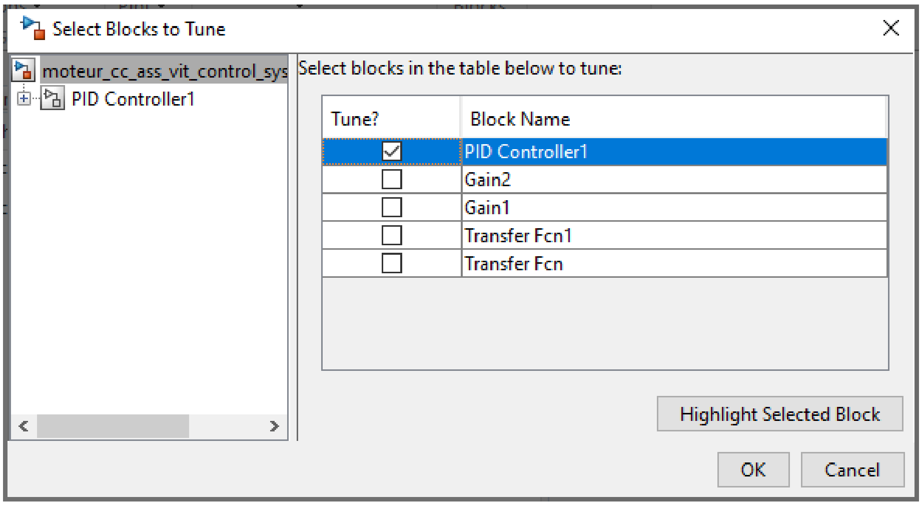


Figure 545 : choix du bloc à régler

Dans la fenêtre **Edit Architecture** (Figure 546) qui apparaît, cliquer sur OK pour valider votre choix.

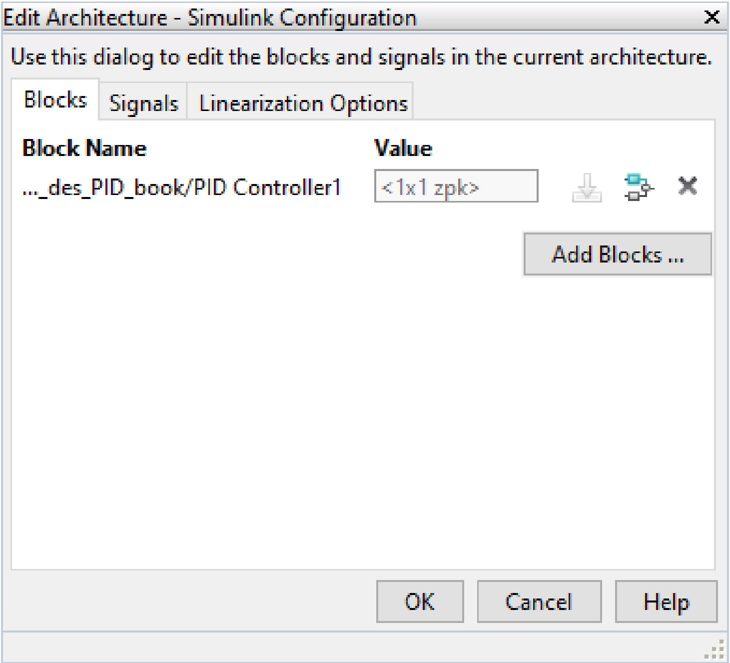


Figure 546 : fenêtre Edit Architecture

2. Diagrammes de Bode et de Black de la FTBO

Nous allons maintenant choisir la méthode de réglage. Dans la fenêtre du Control System Designer, sélectionner **Tuning Method/Bode Editor**.

La fenêtre **Select Response to Edit** apparaît. La fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) est automatiquement détectée. Les points de linéarisation sont indiqués (Figure 547).

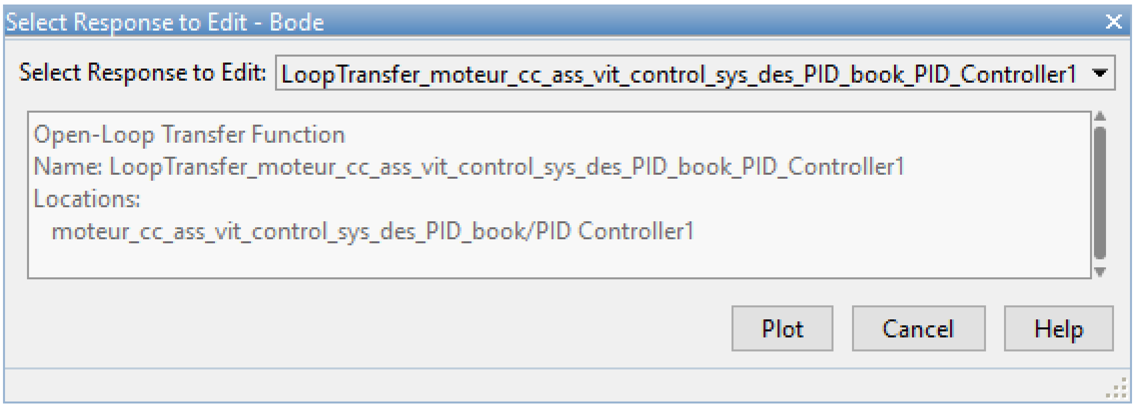


Figure 547 : choix des points de linéarisation pour la FTBO

Nous verrons plus tard comment choisir nous-même les points de linéarisation.

Cliquer sur **Plot** pour tracer le diagramme de Bode de la FTBO. Pour ajouter un quadrillage, cliquer avec le bouton droit dans la fenêtre du diagramme de Bode et choisir **Grid**.

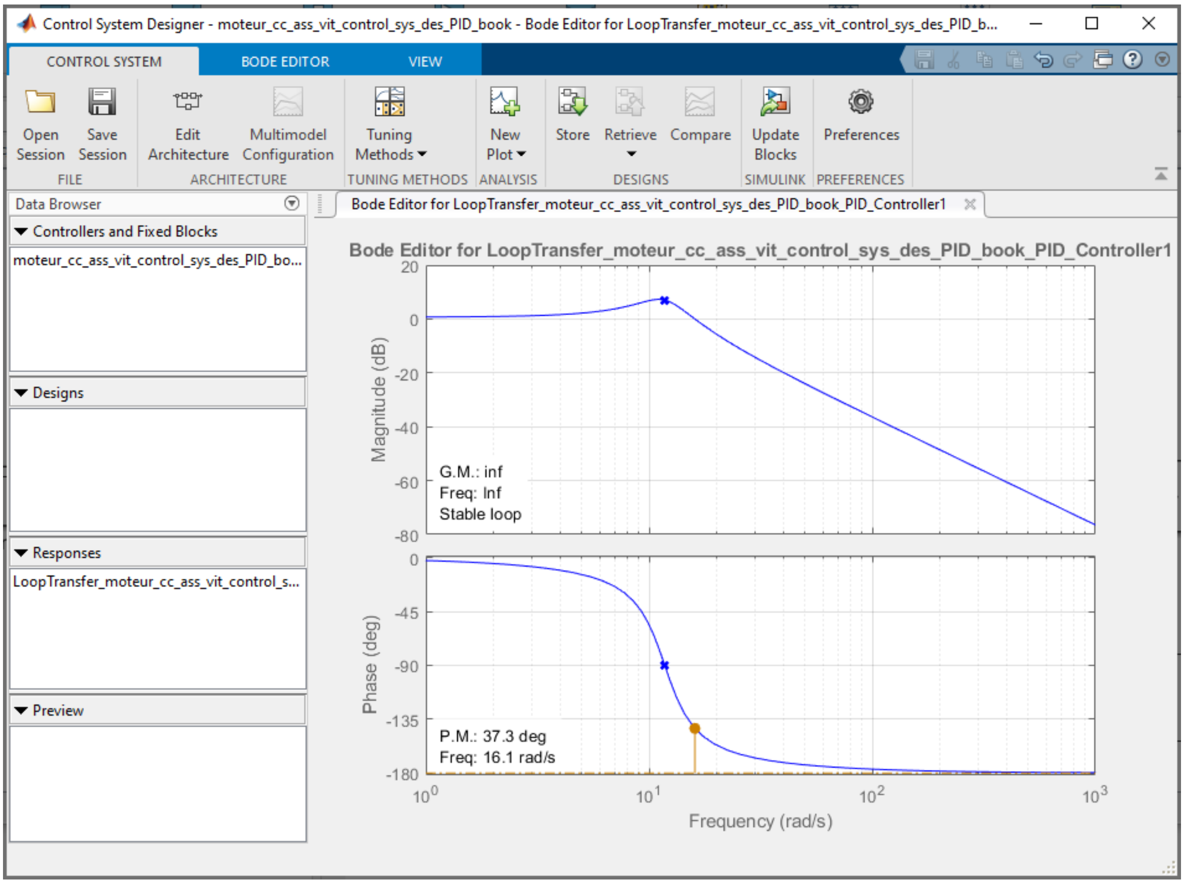


Figure 548 : diagramme de Bode de la FTBO

Il est également possible d'ajouter d'autres types de diagramme pour la FTBO.
Cliquer sur **New Plot/New Nichols** puis cliquer sur **Plot** pour faire apparaître un diagramme de Black.

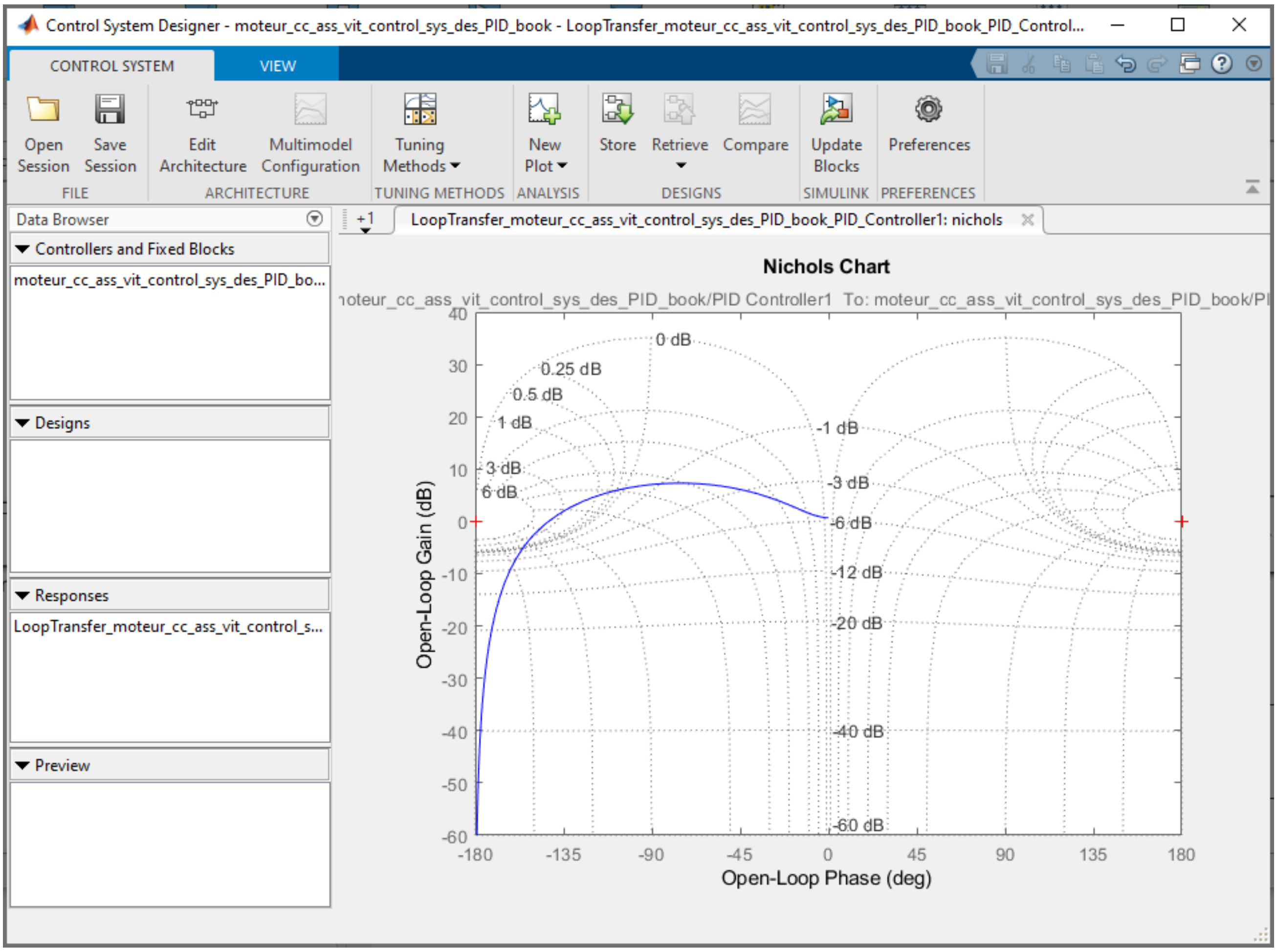


Figure 549 : diagramme de Black de la FTBO

Afin de visualiser les deux graphiques dans la même fenêtre, cliquer sur l'onglet **View** puis **Custom** pour choisir la configuration des fenêtres graphiques (Figure 550).

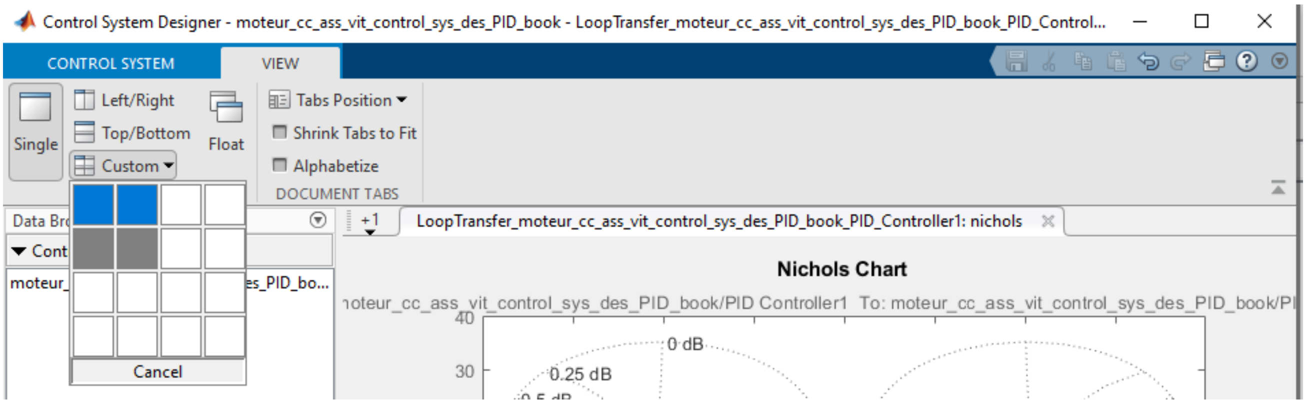


Figure 550 : choix de la configuration des fenêtres graphiques

Choisir un affichage à 4 fenêtres pour obtenir la configuration de la Figure 551.

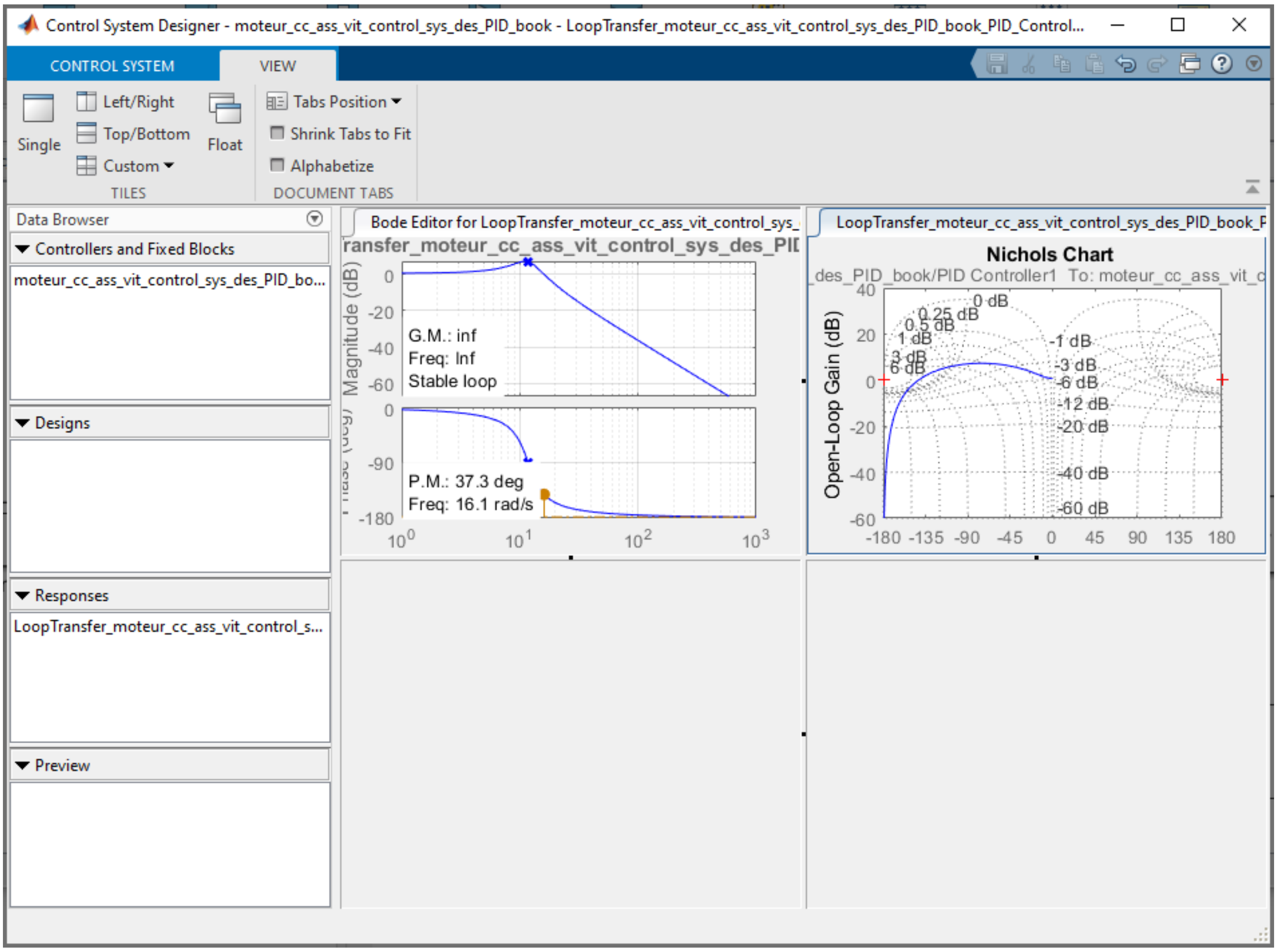


Figure 551 : modification de la configuration des fenêtres graphiques

3. Visualisation des réponses temporelles

Afin d'effectuer le réglage, il faut pouvoir visualiser les réponses temporelles vis-à-vis de la consigne et vis-à-vis de la perturbation.
Pour cela nous allons choisir les points de linéarisation pour obtenir ces deux réponses.
Cliquer sur New Plot/New Step.
Dans la fenêtre **New Step to Plot**, sélectionner **New Input-Output Transfer Response (**Figure 552**)**.

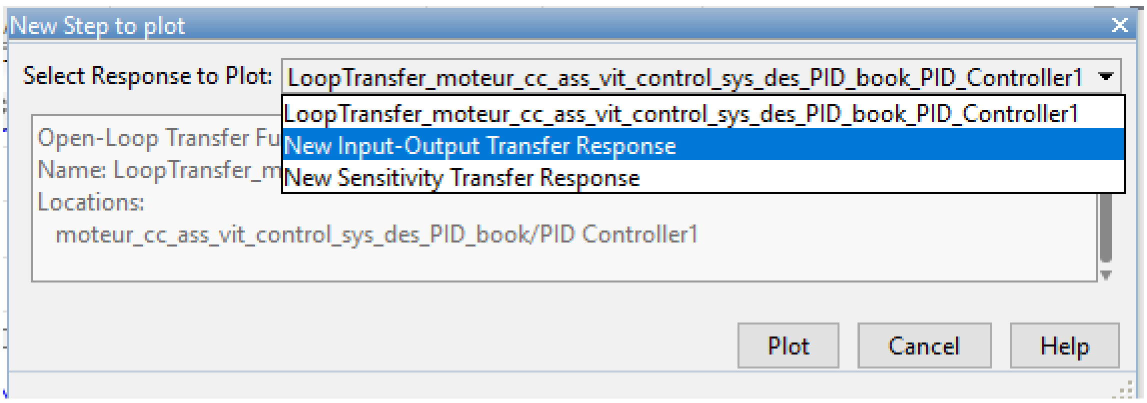


Figure 552 : choix des points de linéarisation

Dans la fenêtre qui apparaît, nommer la fonction de transfert dans le champ **Response Name 'FTBF_consigne'**.

Dans le champ **Specify input Signals** cliquer sur **Add signal to list** et Choisir **Select Signal from Model**.

Dans le modèle Simulink de l'asservissement, cliquer sur le point d'entrée correspondant à la consigne de l'asservissement. Puis cliquer sur **Add signal** dans la fenêtre **New Step to Plot**. Cliquer alors sur le point d'entrée correspondant à la fonction de transfert en boucle fermée vis-à-vis de la consigne.

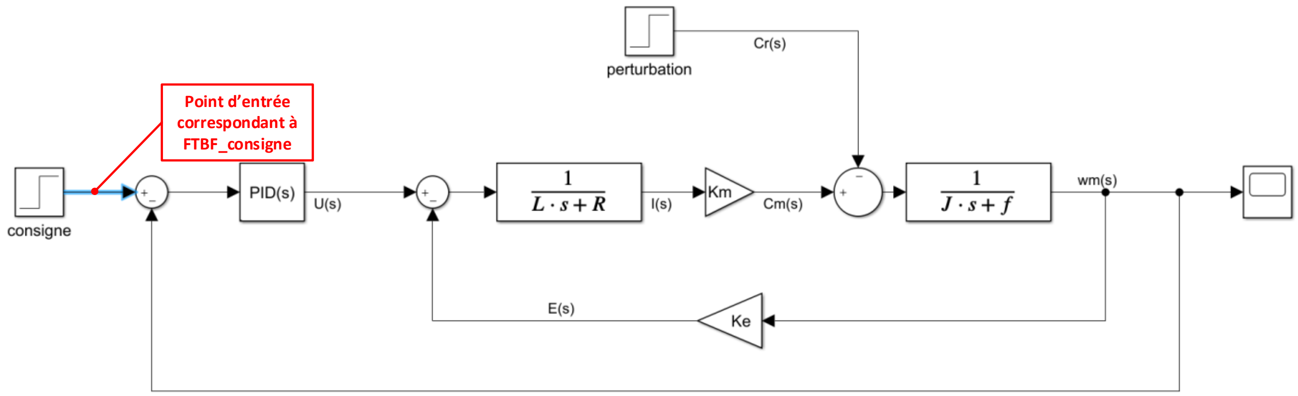


Figure 553 : choix du point d'entrée de la fonction de transfert

Cliquer alors sur **Add signal(s)** dans la fenêtre **New Step to Plot** pour valider votre choix.

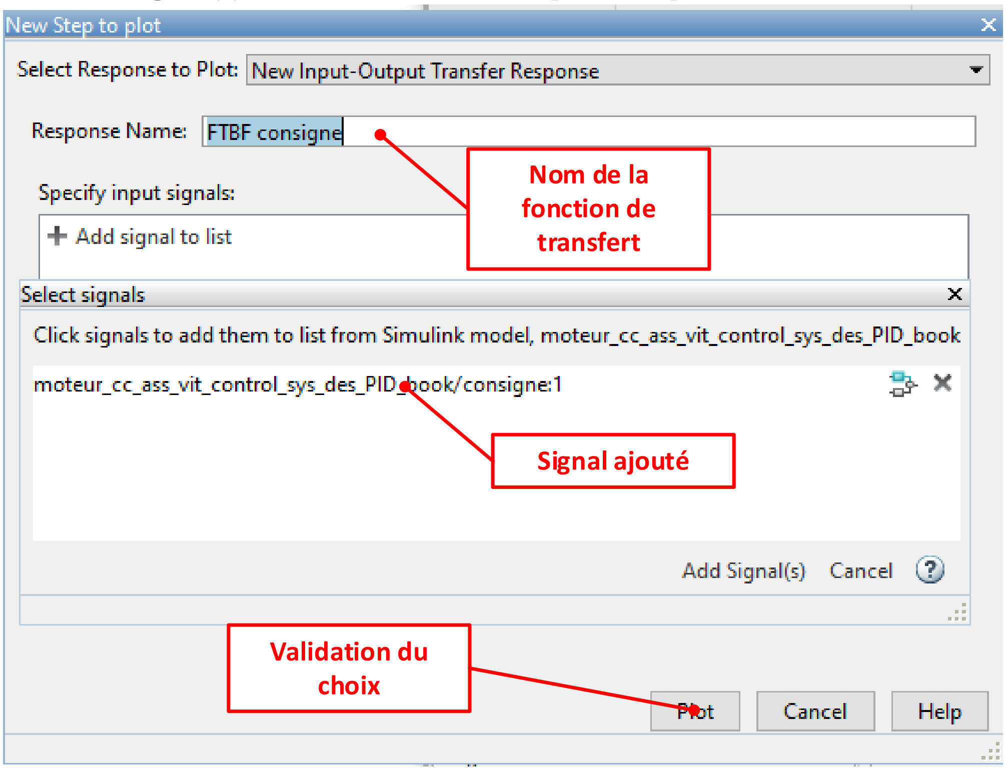


Figure 554 : fenêtre New Step to Plot

Recommencer cette opération avec le champ **Specify output Signal** pour choisir le point de sortie de la fonction de transfert et valider votre choix.

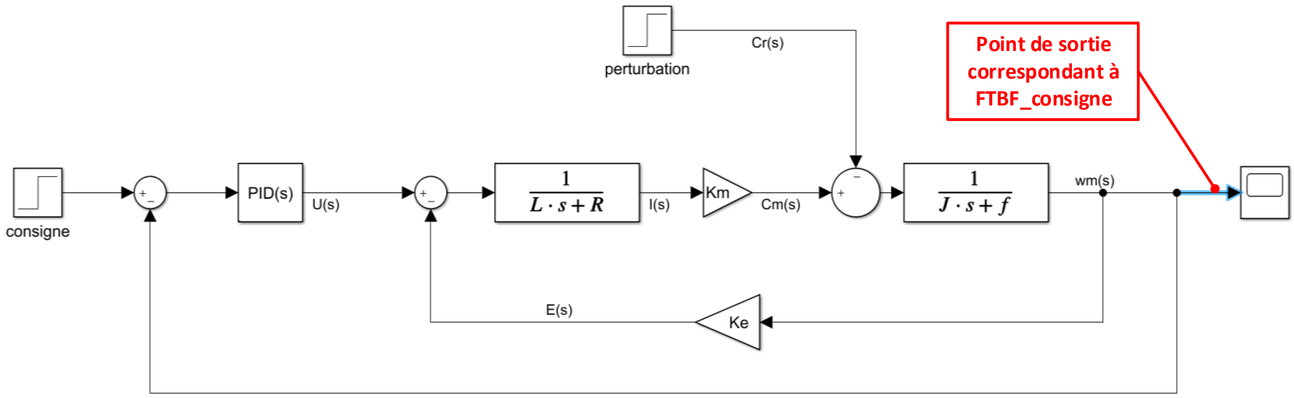


Figure 555 : choix du point de sortie de la fonction de transfert

Vous devez obtenir la configuration de la Figure 556.

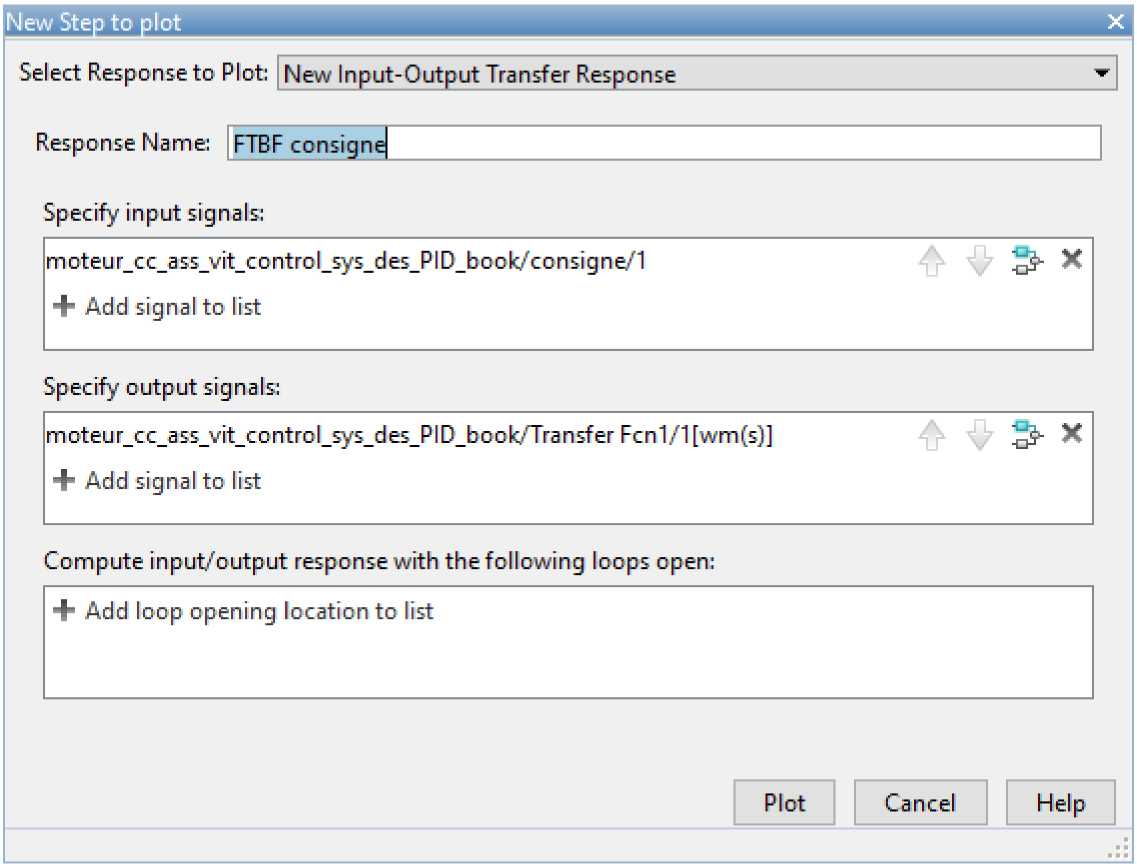
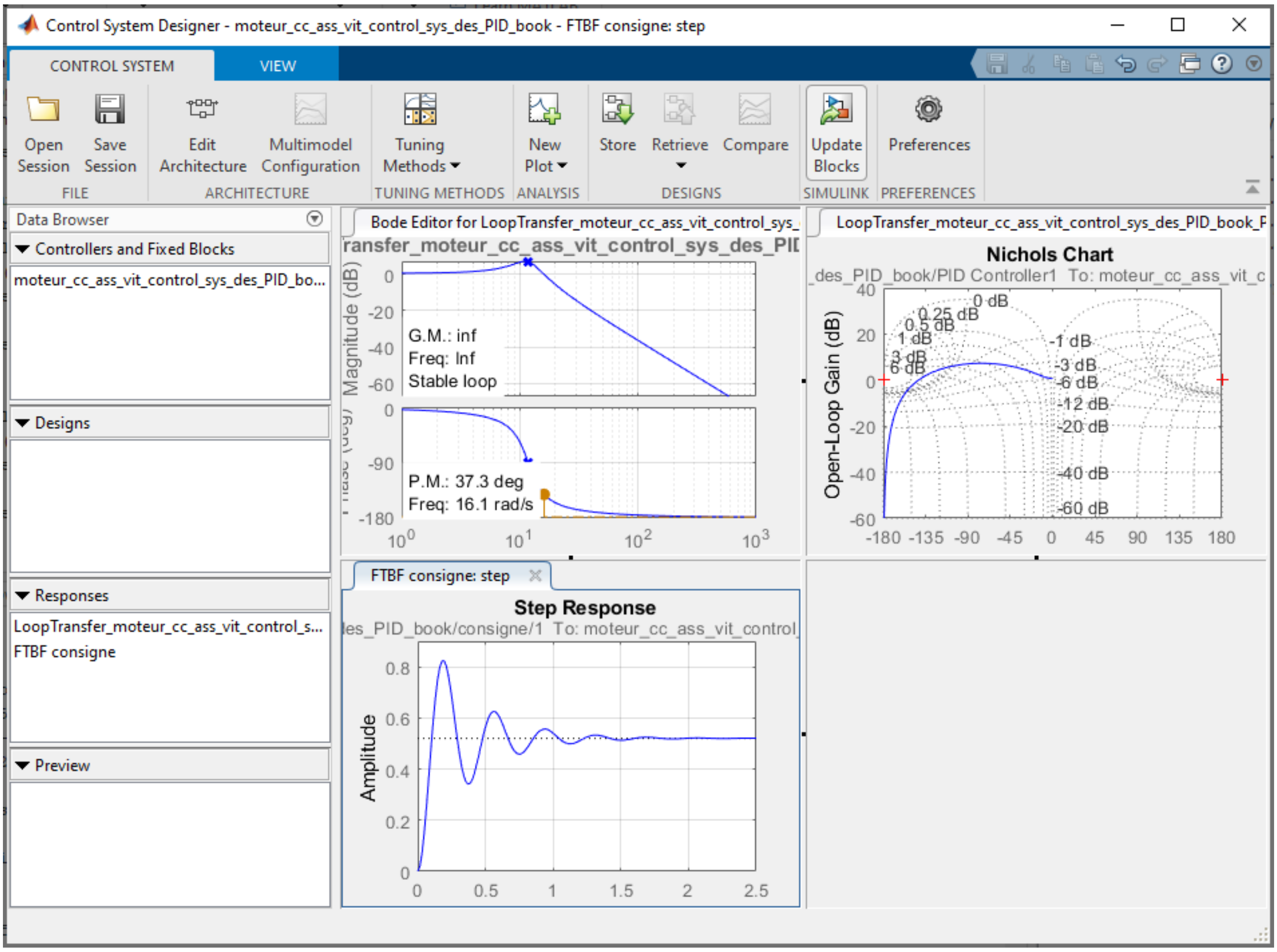


Figure 556 : choix des points d'entrée et de sortie de la FTBF vis-à-vis de la consigne

Cliquer alors sur **Plot** pour tracer la réponse temporelle souhaitée.



Recommencer cette opération pour obtenir la réponse de la fonction de transfert en boucle fermée vis-à-vis de la perturbation.

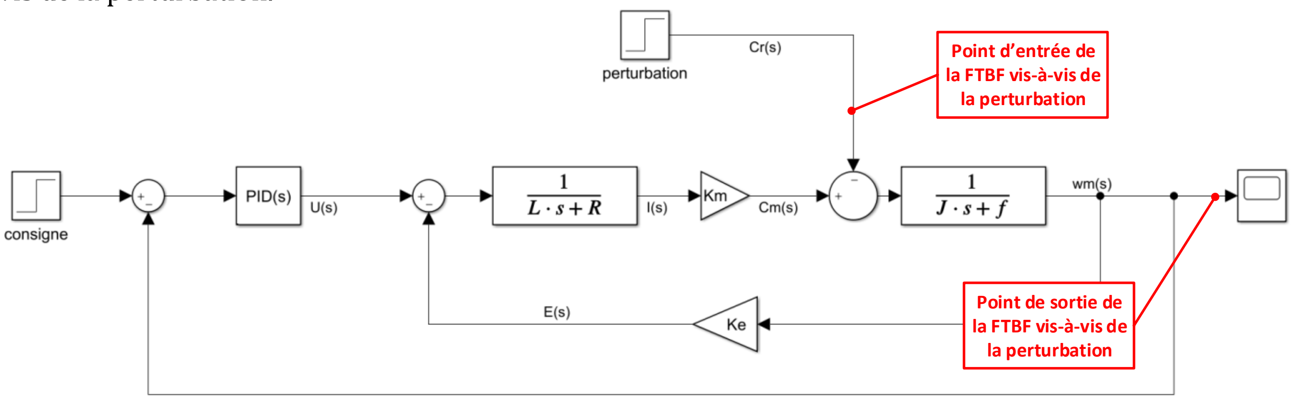


Figure 557 : point d'entrée et de sortie pour la réponse temporelle vis-à-vis de la perturbation

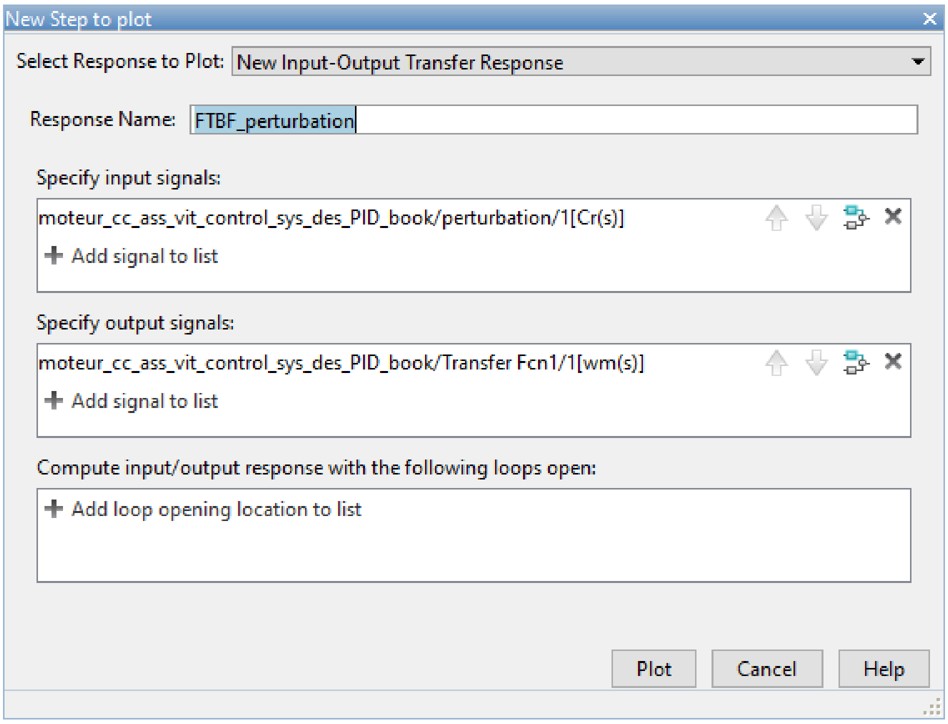


Figure 558 : choix des points d'entrée et de sortie de la FTBF vis-à-vis de la perturbation

Vous devez obtenir la configuration de la Figure 559.

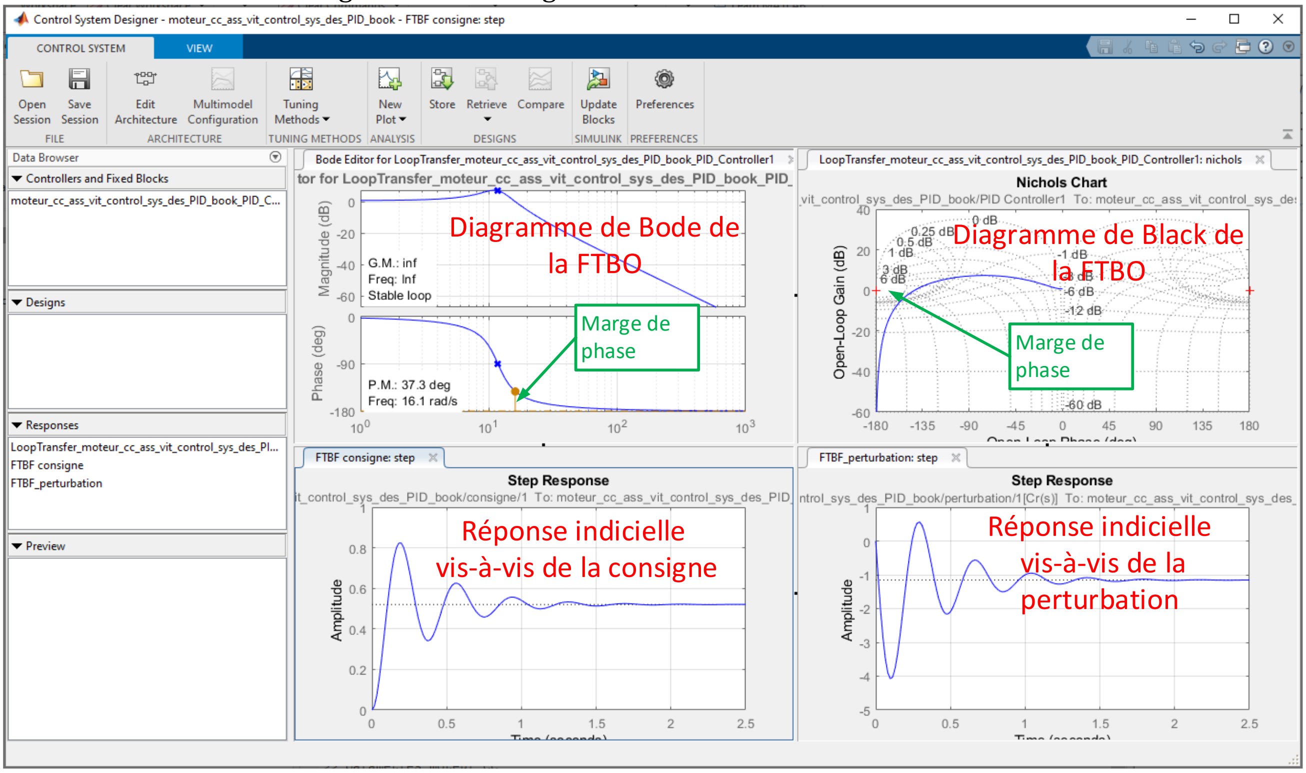


Figure 559 : visualisation des fenêtres utiles pour effectuer le réglage

4. Réglage du PID

Dans la fenêtre graphique du diagramme de Bode de la FTBO, cliquer avec le bouton droit et choisir **Edit Compensator** pour ouvrir la fenêtre de réglage du PID.

Sélectionner ensuite l'onglet **Parameter** pour pouvoir agir sur les paramètres de réglage du PID.

Il est maintenant possible de procéder aux réglages du PID et de voir évoluer de manière dynamique l'ensemble des tracés.

Faire glisser les différents curseurs et observer l'influence du réglage sur les diagrammes**.**

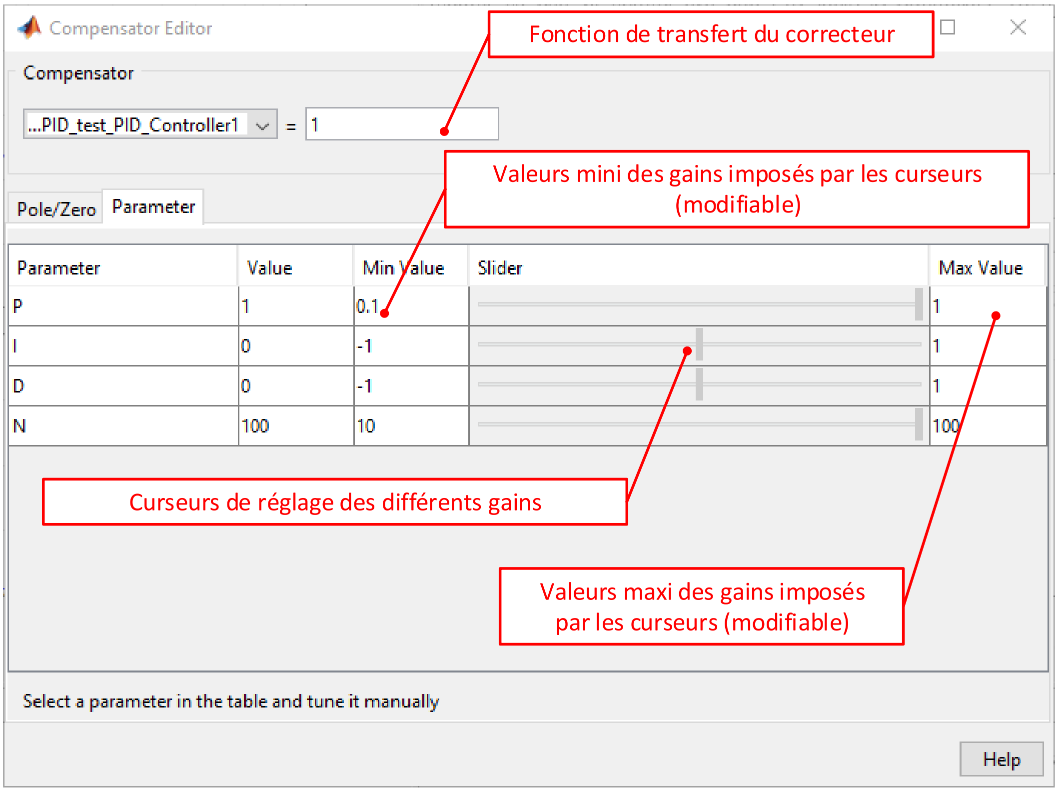


Figure 560 : les fonctions de la fenêtre de réglage du PID

5. Définition et visualisation des critères de performance

Le réglage du correcteur ne peut se faire que si des critères de performance sont définis. Il est possible de définir et de visualiser ces critères sur les courbes des réponses indicielles.

Cliquer droit dans la fenêtre graphique donnant la réponse temporelle de la FTBF vis-à-vis de la consigne et choisir **Properties**, onglet **Options** puis définir que le critère de rapidité est le temps de réponse à 5%.

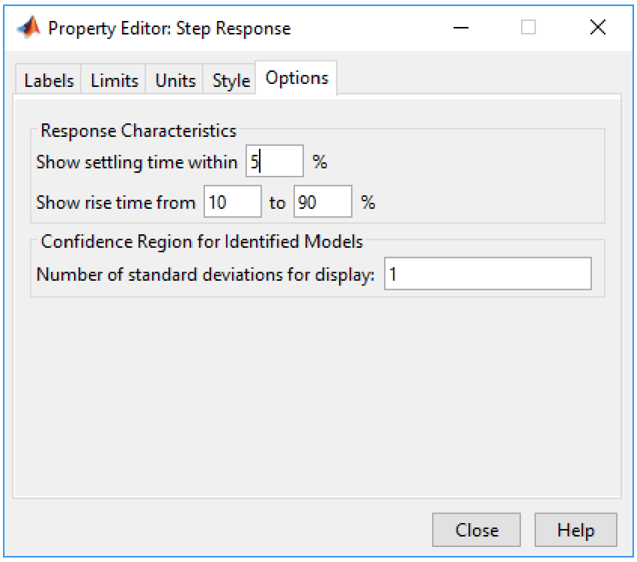


Figure 561 : définition des critères de rapidité

Cliquer droit dans la fenêtre graphique donnant la réponse temporelle de la FTBF et choisir **Characteristics** puis **Settling Time** pour afficher le temps de réponse à 5% (Figure 562).

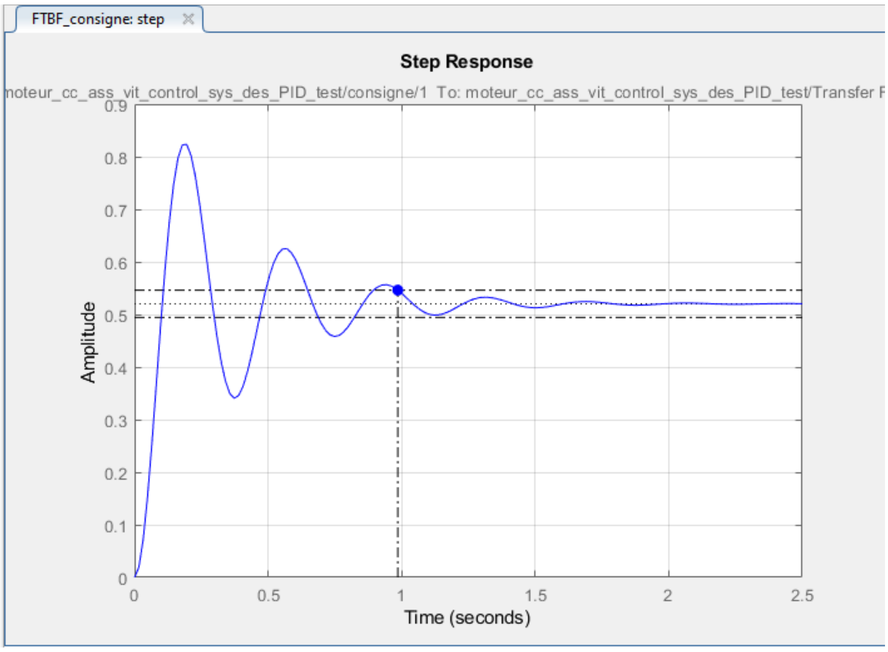


Figure 562 : visualisation du temps de réponse à 5%

Clique droit dans la fenêtre graphique donnant la réponse temporelle de la FTBF et choisir **Design Requirement New** et entrer les critères de performance pour le réglage du PID conformément à la Figure 563.

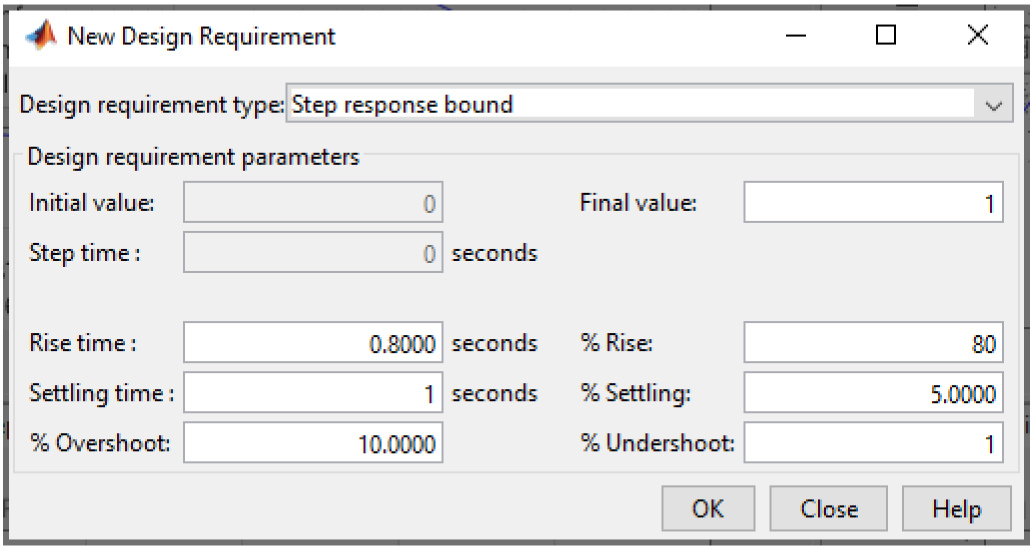


Figure 563 : définition des critères de performances

On impose ici :

- un temps de montée (de 0 à 90%) de 0.8 s
- un temps de réponse à 5% de 1 s
- un dépassement maxi de 10%

La fenêtre graphique permet de visualiser la zone dans laquelle doit se situer la réponse indicielle pour satisfaire le cahier des charges (Figure 564).

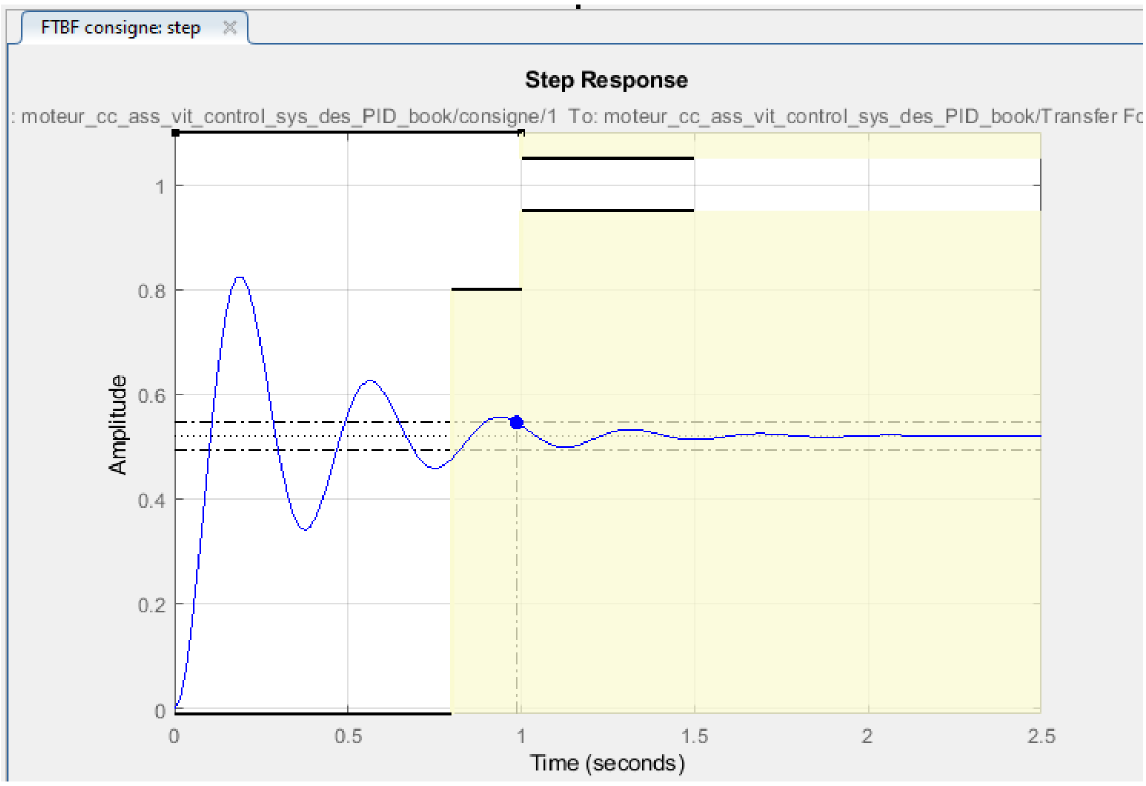


Figure 564 : visualisation des critères de performances dans la fenêtre graphique

La réponse indicielle doit se trouver en dehors de la zone jaune qui est définie par les différents critères pour que le cahier des charges soit respecté.

6. Réglage du PID à l'aide des curseurs

La réponse n'est pas satisfaisante. A l'aide des curseurs, effectuer manuellement le réglage du PID. On peut voir évoluer dynamiquement les tracés La fenêtre de la Figure 565 montre un réglage satisfaisant du PID.

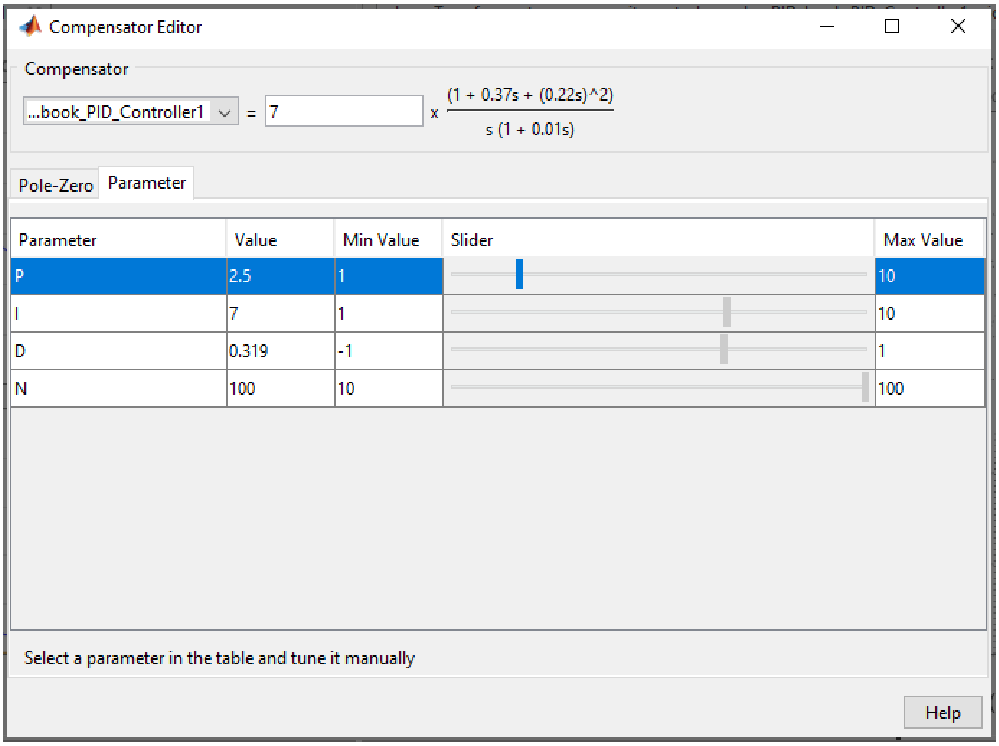


Figure 565 : réglage satisfaisant le cahier des charges du PID

La fenêtre de la Figure 566 montre la réponse indicielle corrigée de la FTBF.

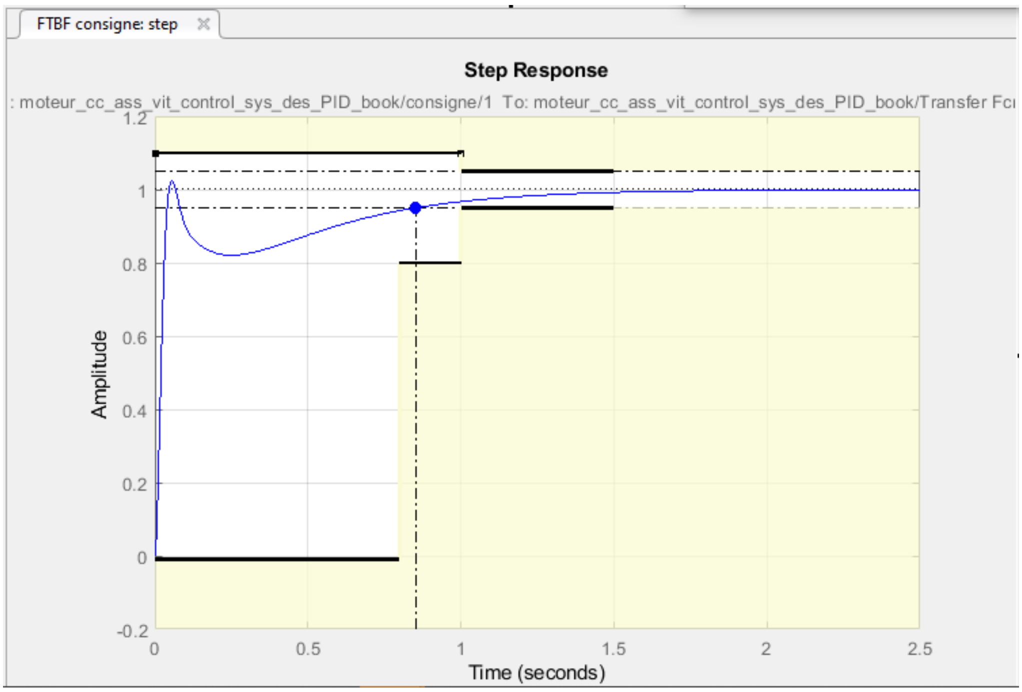


Figure 566 : résultat du réglage manuel du PID sur la réponse temporelle

Le réglage étant satisfaisant vis-à-vis de la consigne, nous pouvons maintenant vérifier le comportement vis-à-vis de la perturbation.

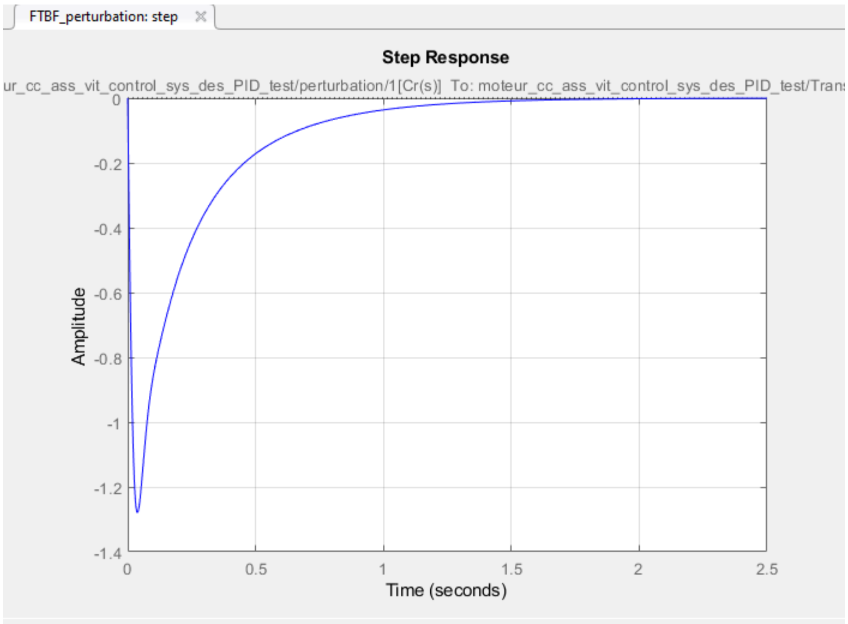


Figure 567 : réponse indicielle du système vis-à-vis d'un échelon de perturbation

Nous constatons que la perturbation est rapidement rejetée et que son influence peut être considéré comme négligeable au bout de 0.8 s . Le réglage effectué est donc satisfaisant.

Les diagrammes de Bode et de Black de la FTBO permettent de visualiser l'influence de ces réglages et d'apprécier les critères de marge de gain et de marge de phase.

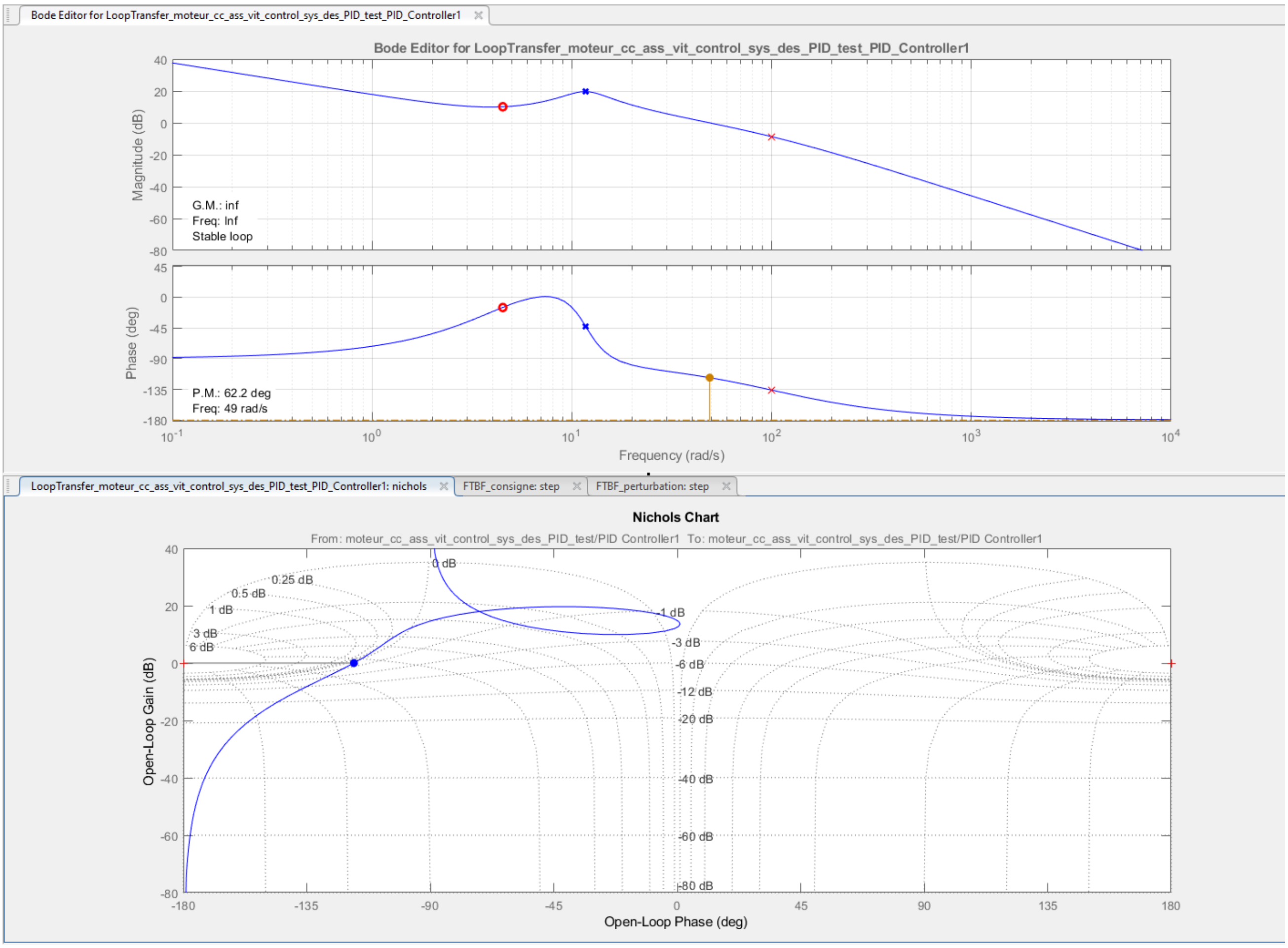


Figure 568 : influence des réglages effectués sur les diagrammes fréquentiels de la FTBO

7. Exportation du réglage dans le modèle Simulink

Cliquer maintenant sur **Update Block** dans la fenêtre de commande du **Control System Designer** exporter les réglages effectués dans le PID du modèle Simulink.

Retourner dans le modèle Simulink puis **Lancer** la simulation et visualiser la réponse du moteur avec le PID réglé.

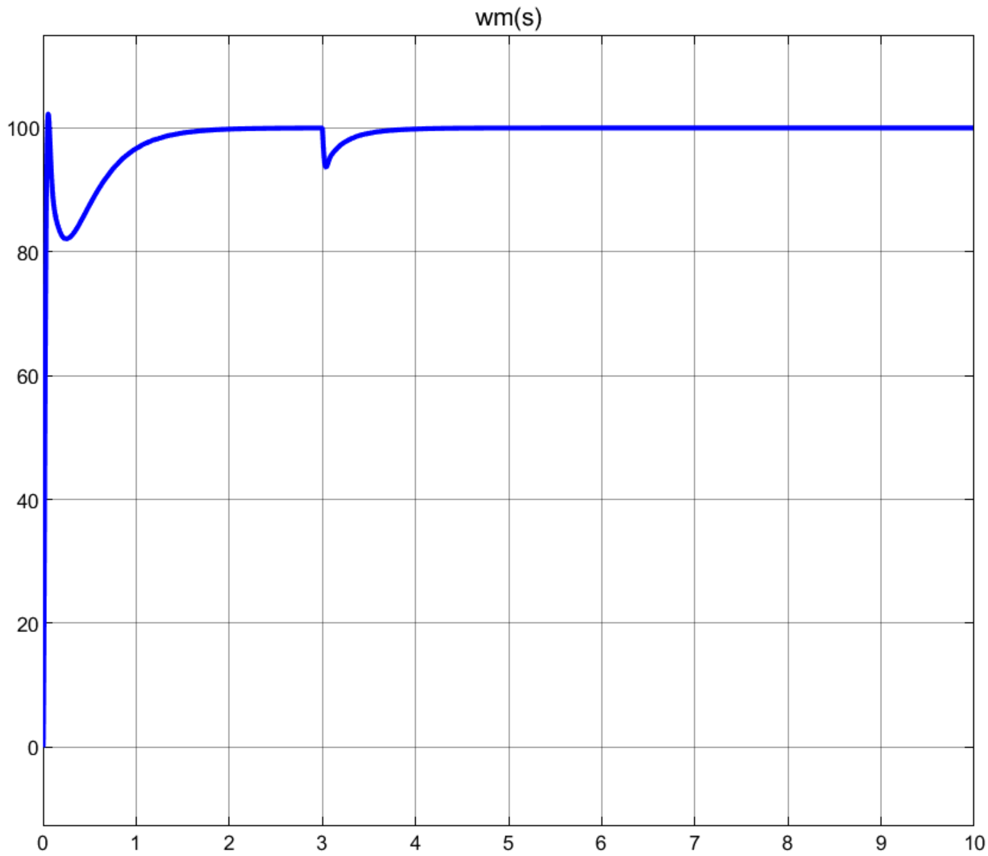


Figure 569 : réponse temporelle après réglage du PID

Nous constatons sur la Figure 569 que la réponse temporelle est plus rapide, bien amortie et que la perturbation est bien rejetée par le système. Les critères de performances sont respectés.

IV. Conception et réglage d'un correcteur de forme quelconque

Dans de nombreuses applications de contrôle commande, le correcteur peut prendre d'autres formes que celle d'un simple correcteur PID. **MATLAB** offre la possibilité de construire un correcteur de forme quelconque à partir de l'outil « **Control System Designer** ». La démarche sera sensiblement la même que celle présentée dans la partie III. La fonction de transfert du correcteur sera construite par étape en lui ajoutant de nouveaux éléments dans le but d'améliorer les performances du système. L'outil « **Control System Designer** » permet d'intégrer dans la fonction de transfert du correcteur :

- des intégrateurs
- des pôles complexes
- des pôles réels
- des zéros complexes
- des zéros réels
- des correcteurs à avance de phase (**Lead**)
- des correcteurs à retard de phase (**Lag**)
- des filtres rejecteurs (**Notch**)

A. Ouverture du modèle

Ouvrir le fichier « ***moteur_cc_ass_vit_control_sys_des_tf*** »

Ce fichier contient le modèle de l'asservissement en vitesse d'un moteur à courant continu (Figure 570). Le correcteur a été remplacé par une fonction de transfert que l'on va construire à l'aide de l'outil « **Control System Designer** ». Pour l'instant cette fonction de transfert est un gain pur de valeur 1.

La consigne imposée est de 100 rad/s et une perturbation de couple est appliquée au système à l'instant t=3 s.

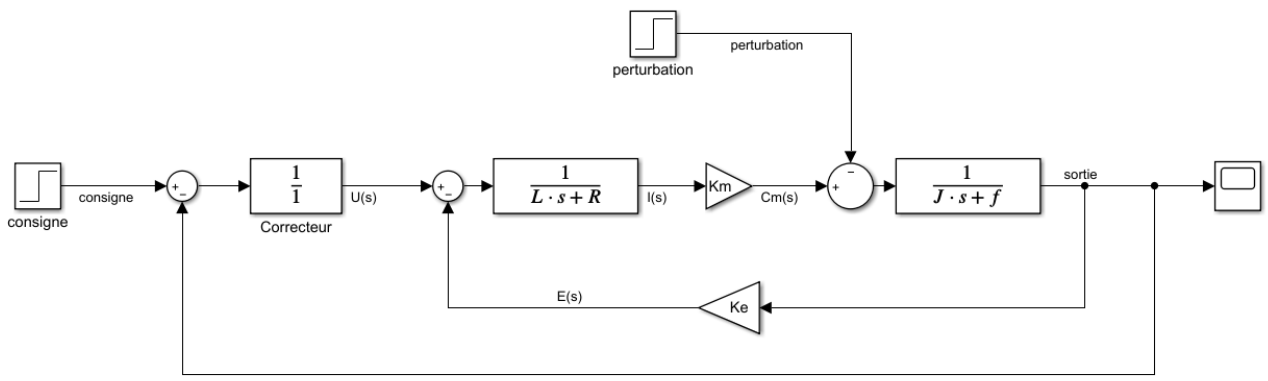


Figure 570 : modèle de l'asservissement du moteur à continu avec correction par fonction de transfert à régler

Exécuter le script ***parametres_moteur_cc.m.***

Lancer la simulation et **visualiser** la réponse dans le scope.

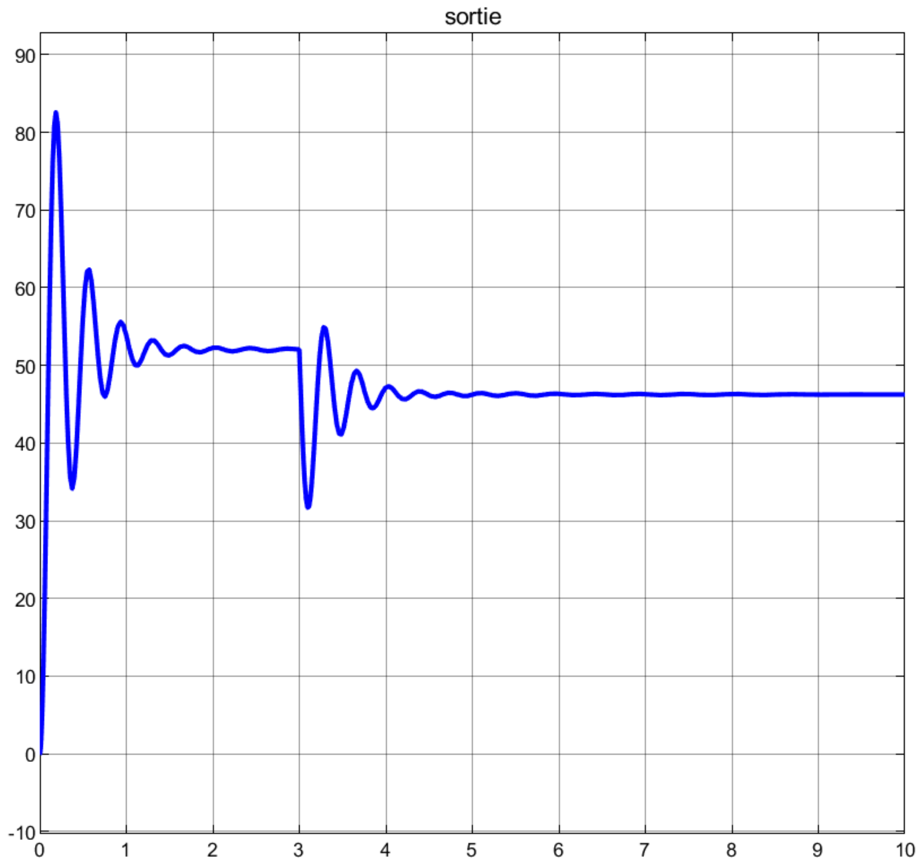


Figure 571 : réponse du système non corrigé

Nous pouvons constater que la réponse du système n'est pas satisfaisante. Le système n'est pas précis, mal amorti et ne rejette pas correctement la perturbation.

B. Conception du correcteur

A partir de l'onglet APPS de la fenêtre de commande de MATLAB, sélectionner l'application « Control System Designer » (Figure 572).

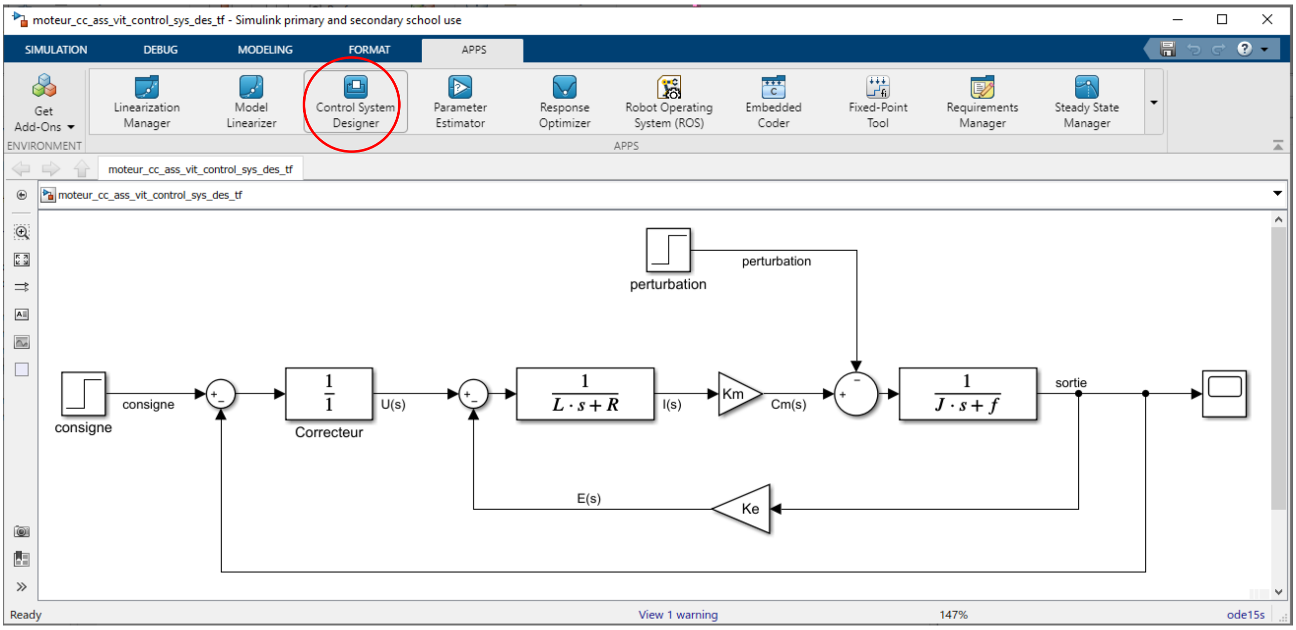


Figure 572 : lancement de l'application « Control System Designer »

Cette commande entraîne l'ouverture de la fenêtre **Control System Designer** qui propose de choisir les blocs que l'on veut régler, de visualiser les points d'entrée et de sortie de la boucle fermée.

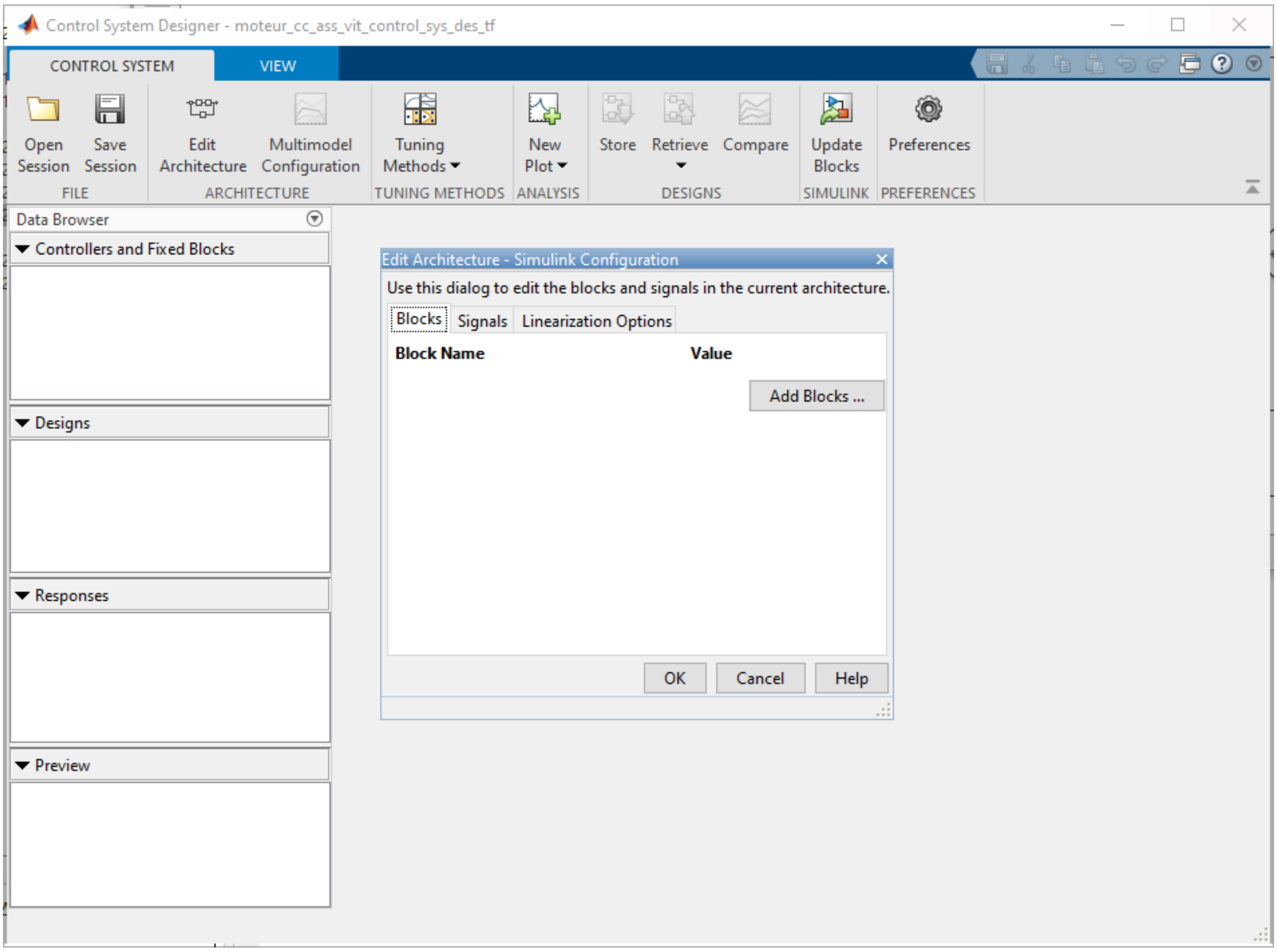


Figure 573 : Control System Designer

Afin de sélectionner le bloc à régler cliquer sur **Add Blocks** et choisir **Correcteur** comme bloc à régler, puis cliquer sur **OK**. (Figure 574).

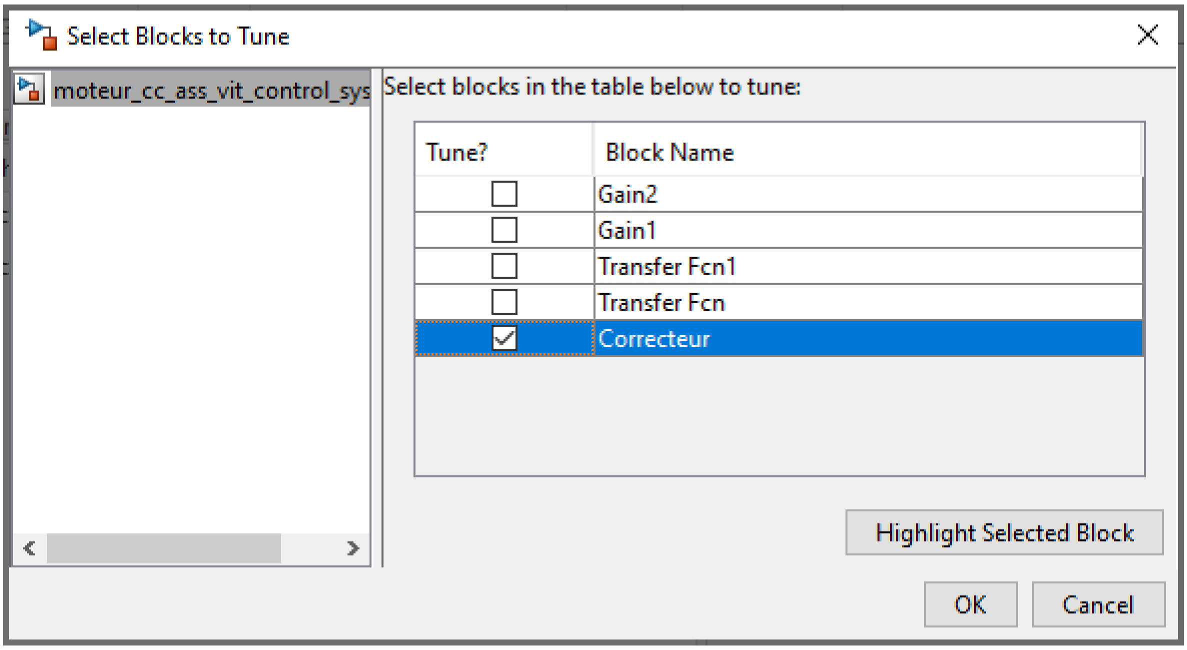


Figure 574 : choix du bloc à régler

Dans la fenêtre **Edit Architecture** (Figure 575) qui apparaît, cliquer sur OK pour valider votre choix.

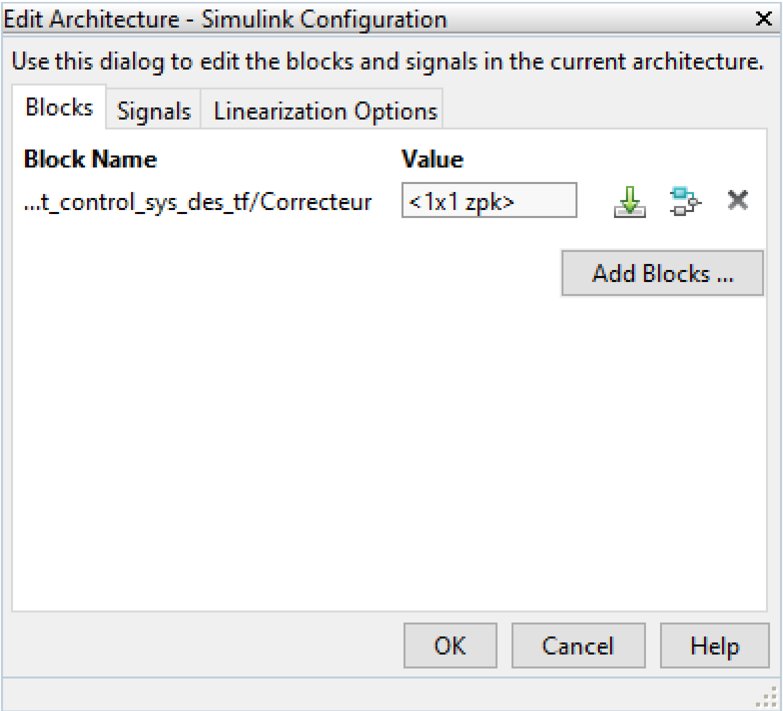


Figure 575 : fenêtre Edit Architecture

1. Diagrammes fréquentiels de la FTBO

Nous allons maintenant choisir la méthode de réglage. Dans la fenêtre du Control System Designer, sélectionner **Tuning Method/Bode Editor**.

La fenêtre **Select Response to Edit** apparaît. La fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) est automatiquement détectée. Les points de linéarisation sont indiqués (Figure 576).

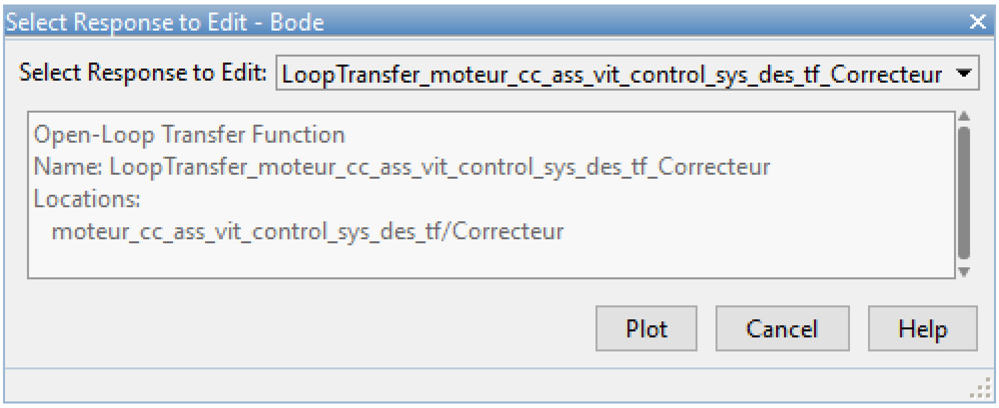


Figure 576 : choix des points de linéarisation pour la FTBO

Cliquer sur **Plot** pour tracer le diagramme de Bode de la FTBO. Pour ajouter un quadrillage, cliquer avec le bouton droit dans la fenêtre du diagramme de Bode et choisir **Grid**.

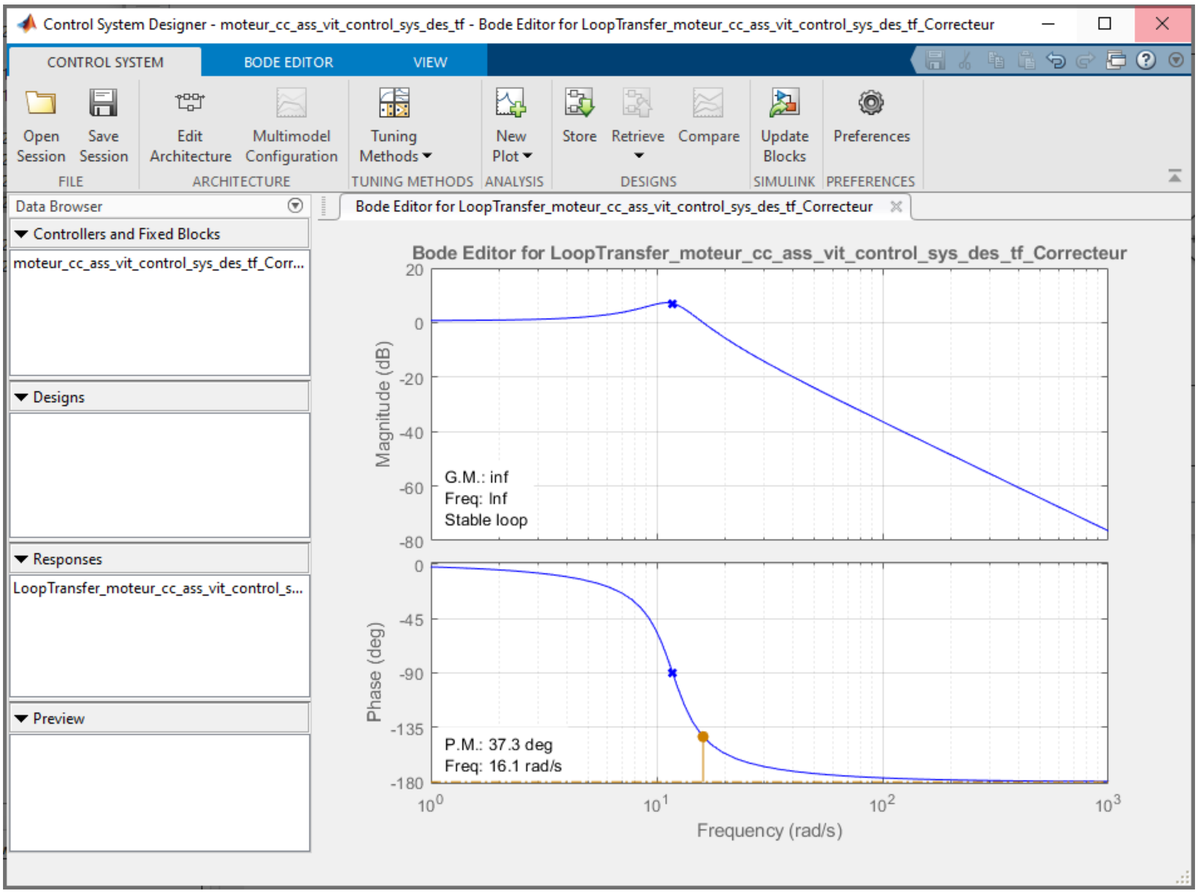


Figure 577 : diagramme de Bode de la FTBO

Il est également possible d'ajouter d'autres types de diagramme pour la FTBO.
Cliquer sur **New Plot/New Nichols** puis cliquer sur **Plot** pour faire apparaître un diagramme de Black.

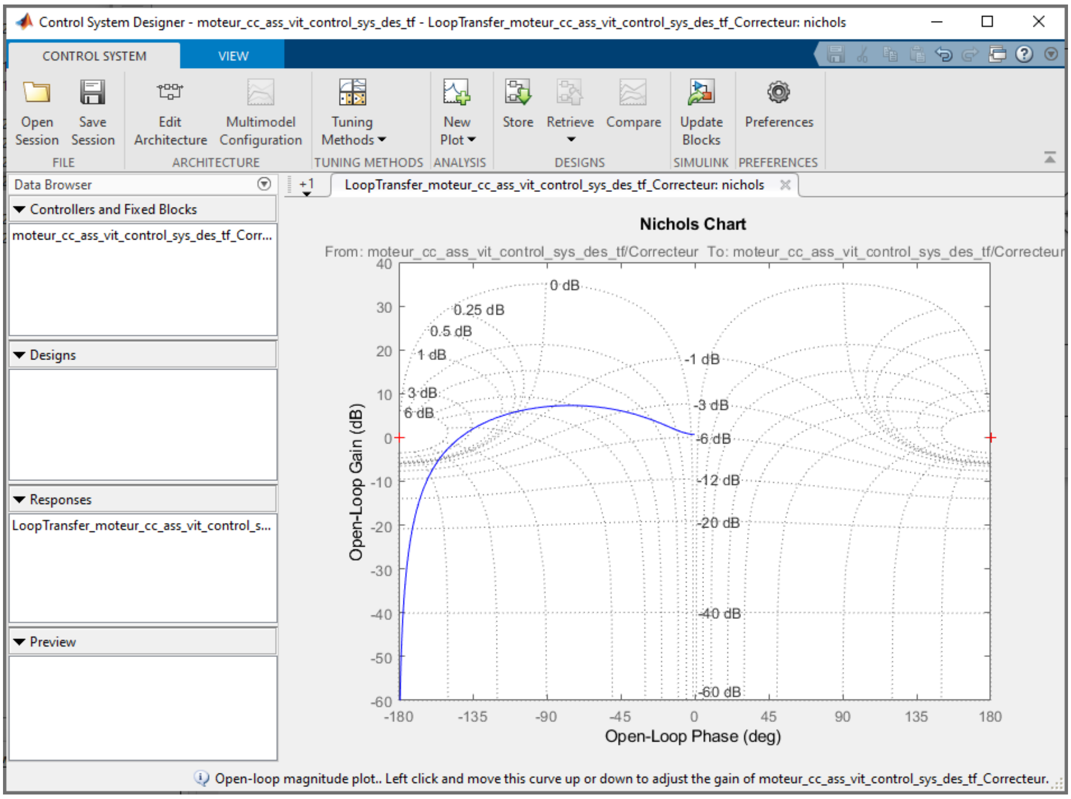


Figure 578 : diagramme de Black de la FTBO

Afin de visualiser les deux graphiques dans la même fenêtre, cliquer sur l'onglet **View** puis **Custom** pour choisir la configuration des fenêtres graphiques (Figure 579).

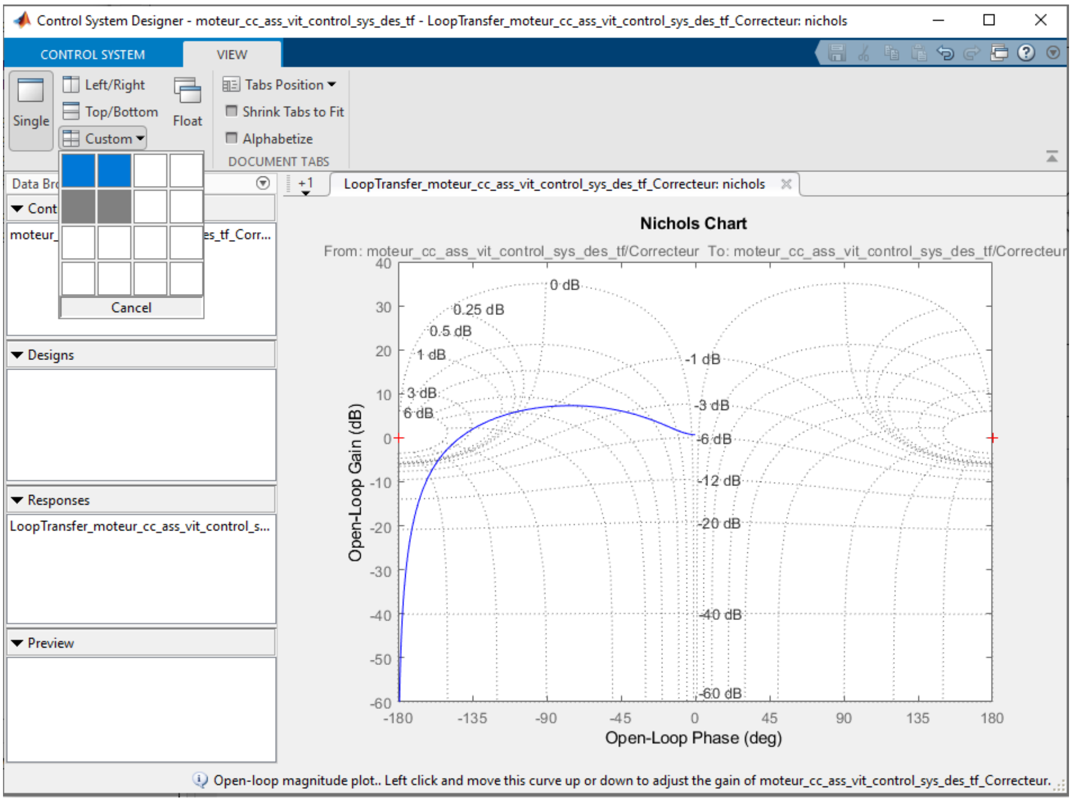


Figure 579 : choix de la configuration des fenêtres graphiques

Choisir un affichage à 4 fenêtres pour obtenir la configuration de la Figure 580.

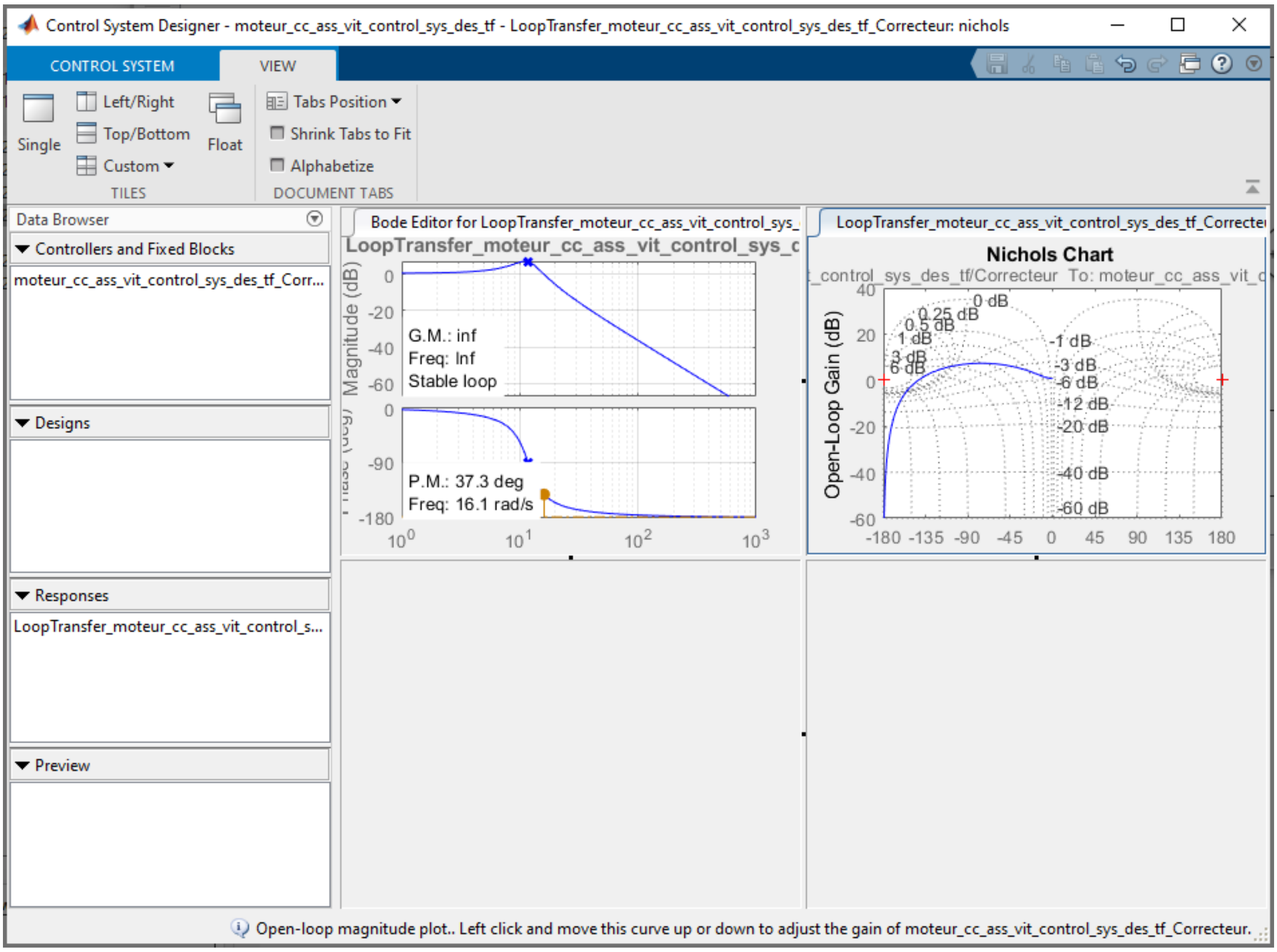


Figure 580 : modification de la configuration des fenêtres graphiques

2. Visualisation des réponses temporelle et fréquentielle de la FTBF

Afin d'effectuer le réglage, il faut pouvoir visualiser les réponses temporelles et fréquentielle de la FTBF vis-à-vis de la consigne. Nous allons donc afficher :

- La réponse indicielle de la FTBF vis-à-vis de la consigne
- Le diagramme de Bode de la FTBF vis-à-vis de la consigne afin de visualiser les éventuels problèmes de résonnance en boucle fermée qui pourraient apparaitre lors des réglages.

Pour cela nous allons choisir les points de linéarisation pour obtenir ces deux réponses.
Cliquer sur **New Plot/New Step.**
Dans la fenêtre **New Step to Plot**, sélectionner **New Input-Output Transfer Response** (Figure 581).

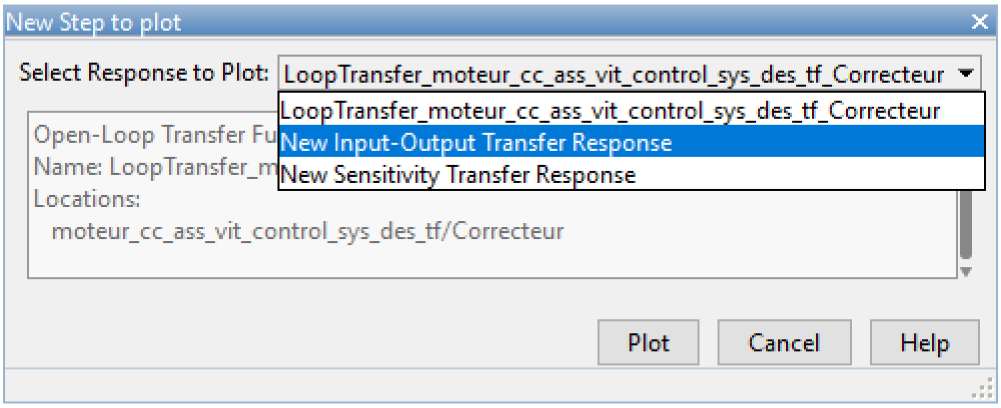


Figure 581 : choix des points de linéarisation

Dans la fenêtre qui apparaît, nommer la fonction de transfert dans le champ **Response Name** '**FTBF_consigne**' (Figure 583).

Dans le champ **Specify input Signals** cliquer sur **Add signal to list** et Choisir **Select Signal from Model**.

Dans le modèle Simulink de l'asservissement, cliquer sur le point d'entrée correspondant à la consigne de l'asservissement. Puis cliquer sur **Add signal** dans la fenêtre **New Step to Plot**. Cliquer alors sur le point d'entrée correspondant à la fonction de transfert en boucle fermée vis-à-vis de la consigne.

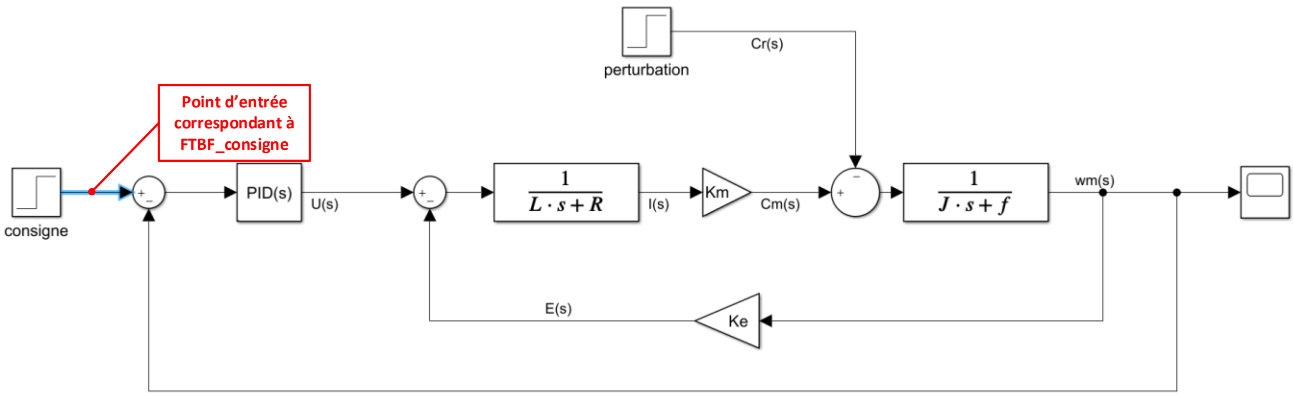


Figure 582 : choix du point d'entrée de la fonction de transfert

Cliquer alors sur **Add signal(s)** dans la fenêtre **New Step to Plot** pour valider votre choix.

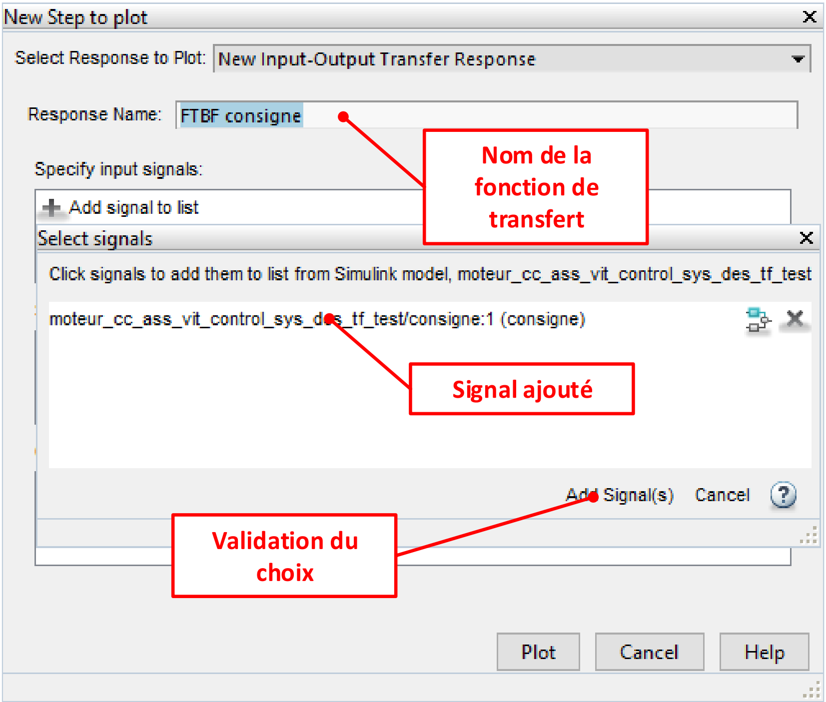


Figure 583 : fenêtre New Step to Plot

Recommencer cette opération avec le champ **Specify output Signal** pour choisir le point de sortie de la fonction de transfert et valider votre choix.

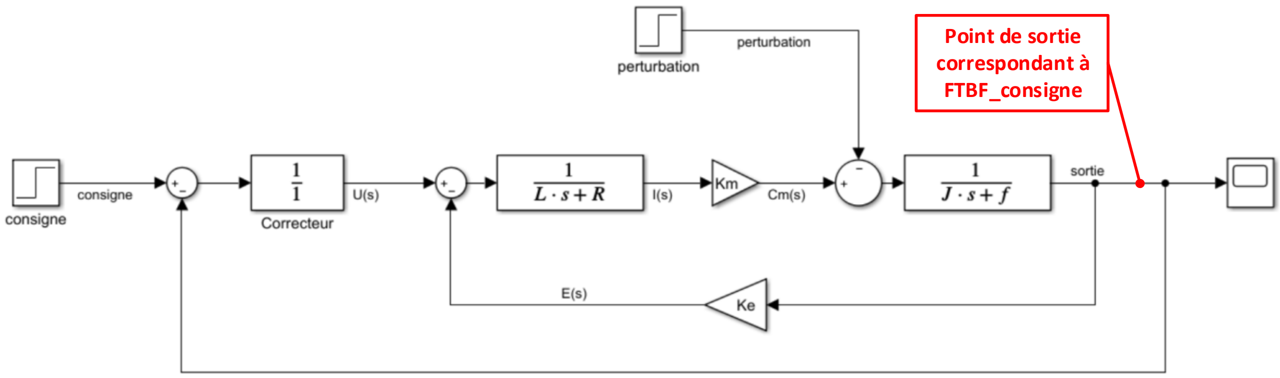


Figure 584 : choix du point de sortie de la fonction de transfert

Vous devez obtenir la configuration de la Figure 585.

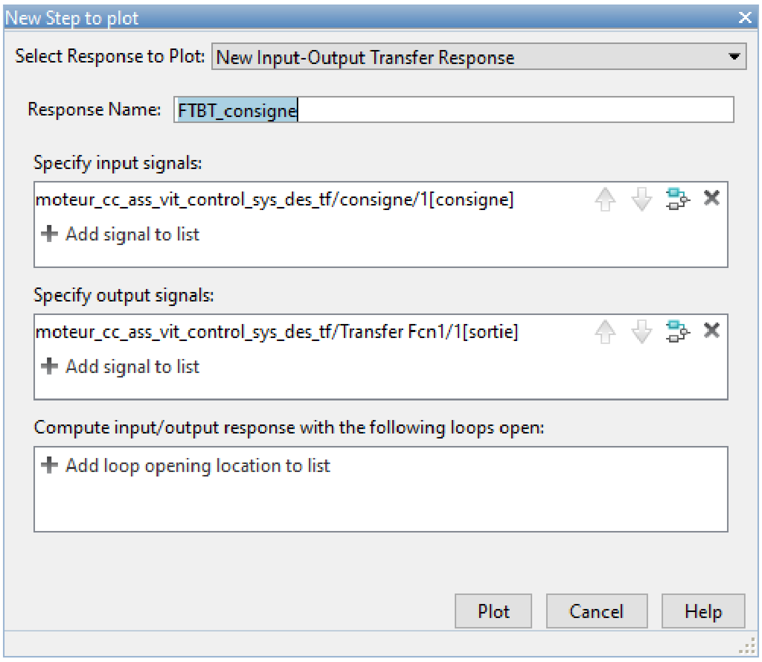


Figure 585 : définition des points de linéarisation de FTBF_consigne

Cliquer sur Plot pour obtenir le tracé de la réponse indicielle de la FTBF.

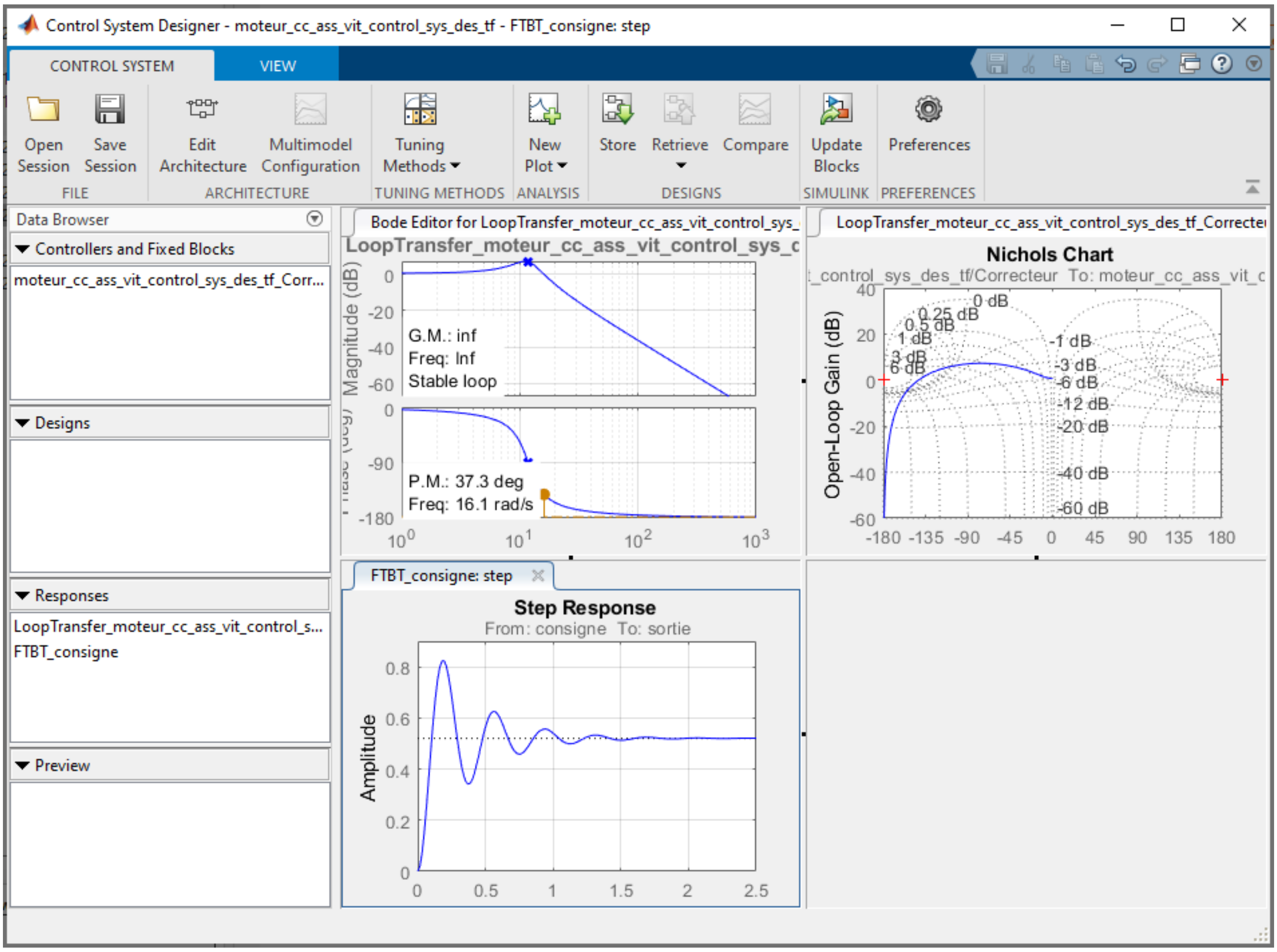


Figure 586 : ajout de la réponse indicielle de la FTBF

Nous allons maintenant tracer le diagramme de Bode de la FTBF vis-à-vis de la consigne.
Pour cela cliquer sur **New Plot/New Bode**.
Choisir la fonction de transfert FTBF_consigne (déjà définie) dans le menu déroulant de la fenêtre **New Bode to Plot** puis cliquer sur **Plot** (Figure 587).

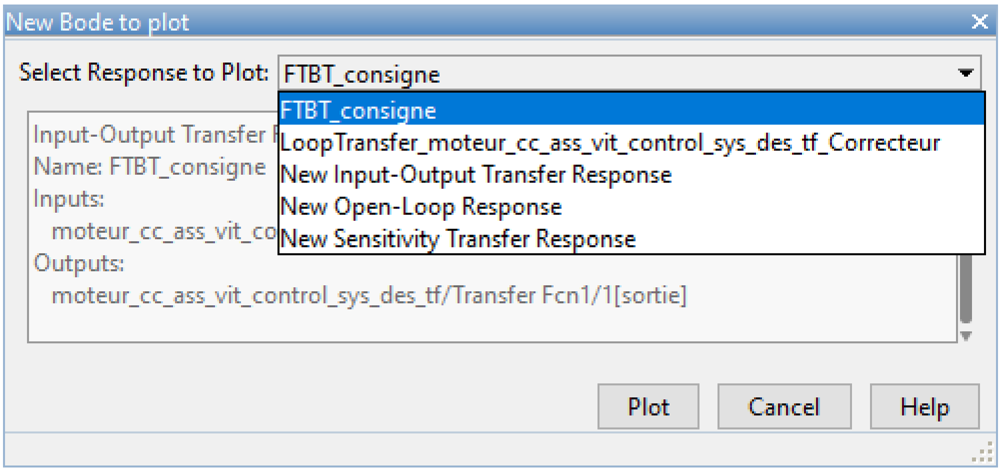


Figure 587 : tracé du diagramme de Bode de la FTBF

Vous devez obtenir la configuration de la Figure 588 qui permet de visualiser tous les diagrammes nécessaires à la conception du correcteur.

Figure 588 : configuration des diagrammes pour effectuer le réglage

3. Synthèse du correcteur

L'outil Control System Designer permet d'ajouter dans le correcteur différents éléments :

- des intégrateurs
- des pôles complexes
- des pôles réels
- des zéros complexes
- des zéros réels
- des correcteurs à avance de phase (**Lead**)
- des correcteurs à retard de phase (**Lag**)
- des filtres rejecteurs (**Notch**)

Pour cela plusieurs méthodes permettent d'intégrer ces fonctions de transfert au correcteur.

Cliquer dans la fenêtre graphique du diagramme de Bode de la FTBO pour faire apparaître l'onglet **Bode Editor** (Figure 589)**.**

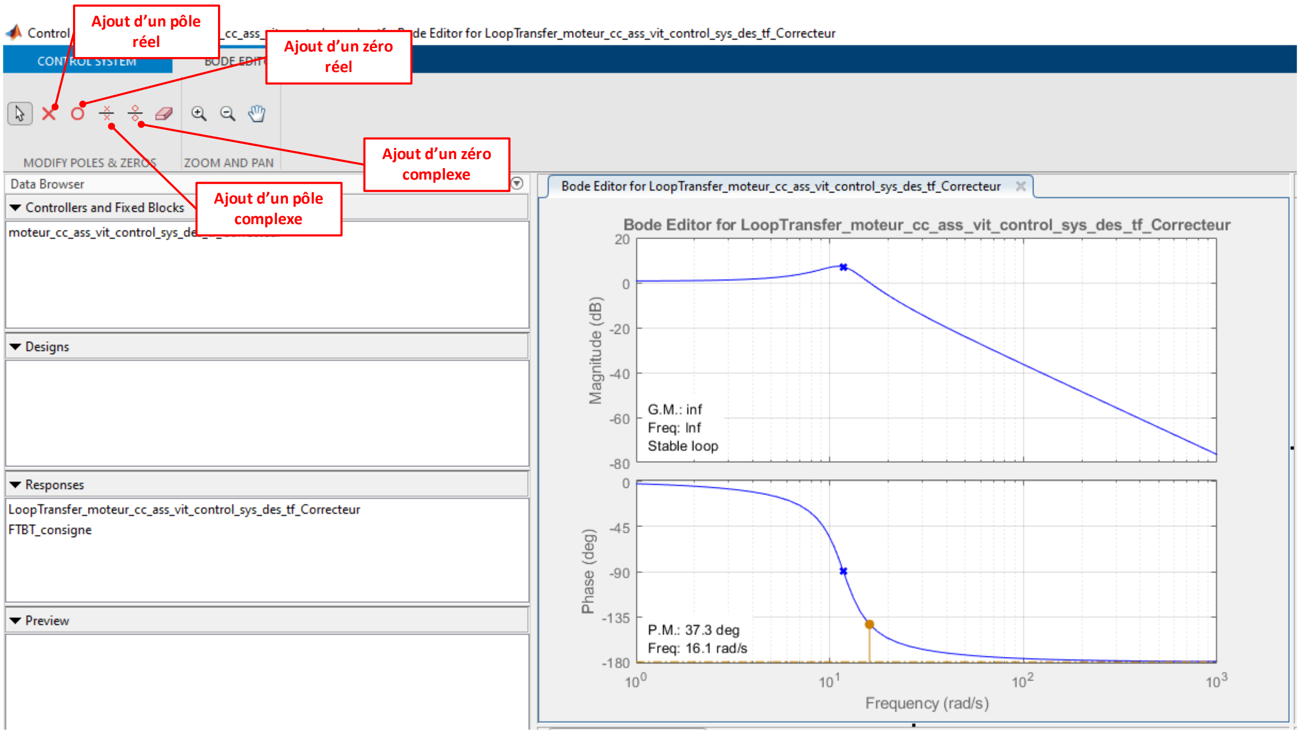


Figure 589 : la barre de commande du Bode Editor

Il est également possible d'ajouter des éléments au correcteur en cliquant avec le bouton droit dans la fenêtre graphique du diagramme de Bode de la FTBO, puis Add Pole/zero pour faire apparaître un menu déroulant qui permet de choisir les éléments à ajouter au correcteur.

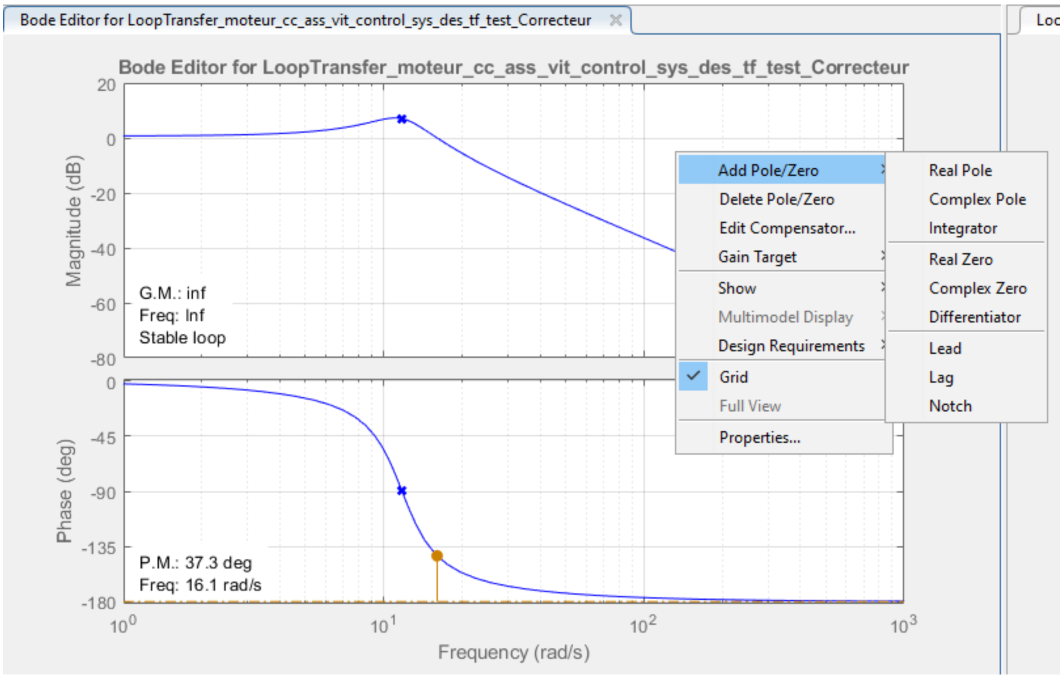


Figure 590 : ajouts d'éléments au correcteur

4. Visualisation de l'influence du gain de la FTBO

Il est possible dans un premier temps de faire varier le gain du correcteur et de visualiser son influence sur l'ensemble des diagrammes.

Dans la fenêtre graphique du diagramme de Bode en gain de la fonction de transfert en boucle ouverte, **déplacer** le pointeur de la souris sur la courbe de gain. Lorsqu'il prend la forme d'une main, utiliser le **glisser déposer** pour faire translater la courbe verticalement.

Cette translation aura comme influence de modifier la valeur du gain du correcteur que nous concevons.

Déplacer la courbe de gain afin d'obtenir un gain basse fréquence de l'ordre de **20dB** pour la fonction de transfert en boucle ouverte.

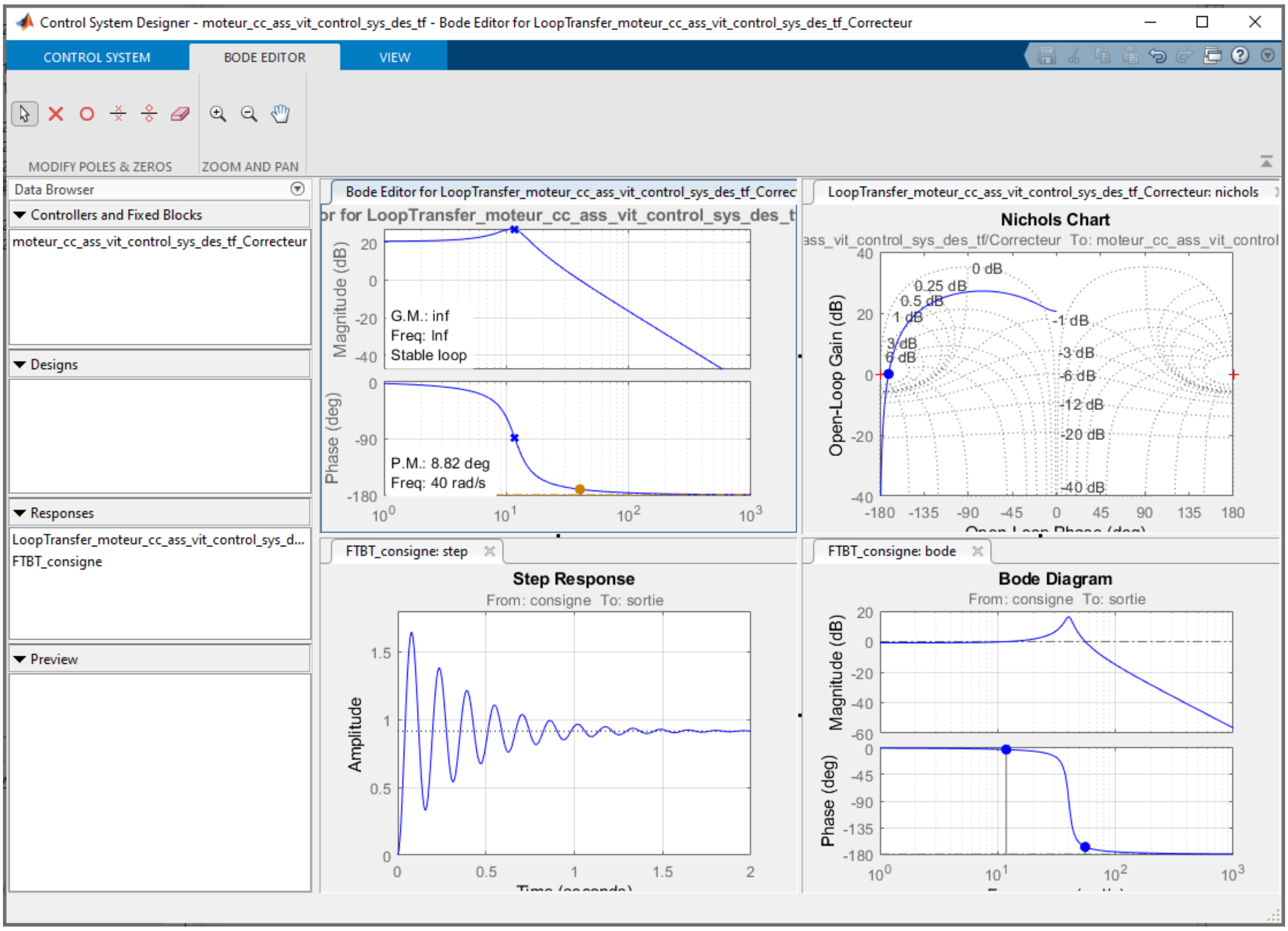


Figure 591 : variation du gain de la fonction de transfert en boucle ouverte

Nous constatons que les autres diagrammes se mettent à jour de manière dynamique en prenant en compte l'augmentation du gain de la fonction de transfert en boucle ouverte.
Sur la réponse indicielle, la précision et la rapidité augmentent, mais l'amortissement diminue laissant apparaître de plus fortes oscillations. Sur le diagramme de Bode de la FTBF, on observe une augmentation de la bande passante à -3dB (amélioration de la rapidité) et une résonnance plus importante.

Il est également possible de visualiser la nouvelle fonction du correcteur dans la fenêtre. Pour cela cliquer avec le bouton droit dans la fenêtre du diagramme de Bode de la FTBO et choisir **Edit Compensator** dans le menu contextuel.

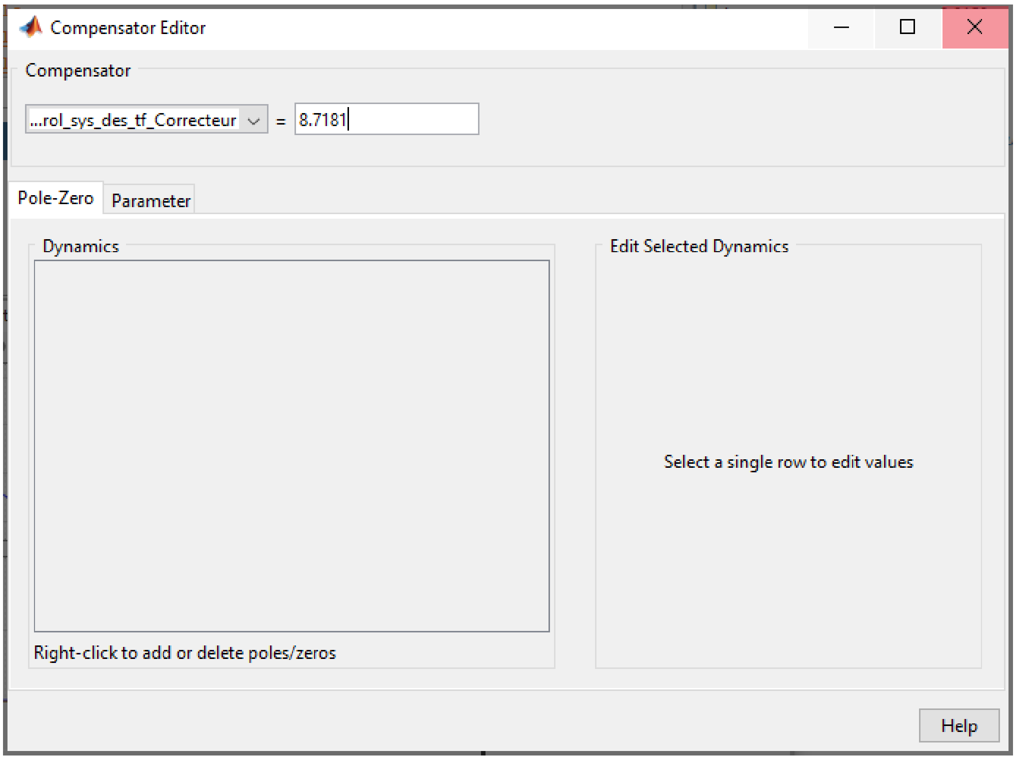


Figure 592 : Edition de la fonction de transfert su correcteur

Il apparaît que le correcteur se limite ici à un correcteur proportionnel de gain **8,7181**.

Il est également possible de modifier le gain du correcteur en utilisant d'autres procédés :

- En faisant translater verticalement le tracé de Nichols
- En indiquant directement la valeur du gain dans la fenêtre **Compensator Editor.**

Dans tous les cas la mise à jour des autres diagrammes est réalisée automatiquement.

5. Ajout d'un intégrateur

Afin de rendre le système précis, il est possible d'ajouter un intégrateur dans le correcteur.
Pour cela **cliquer** avec le bouton droit de la souris, dans la fenêtre **graphique du diagramme de Bode de la FTBO** puis sélectionner **Add Pole zero/Integrator** (Figure 593)**.** Un intégrateur est ajouté à notre correcteur et toutes les courbes sont mises à jour.

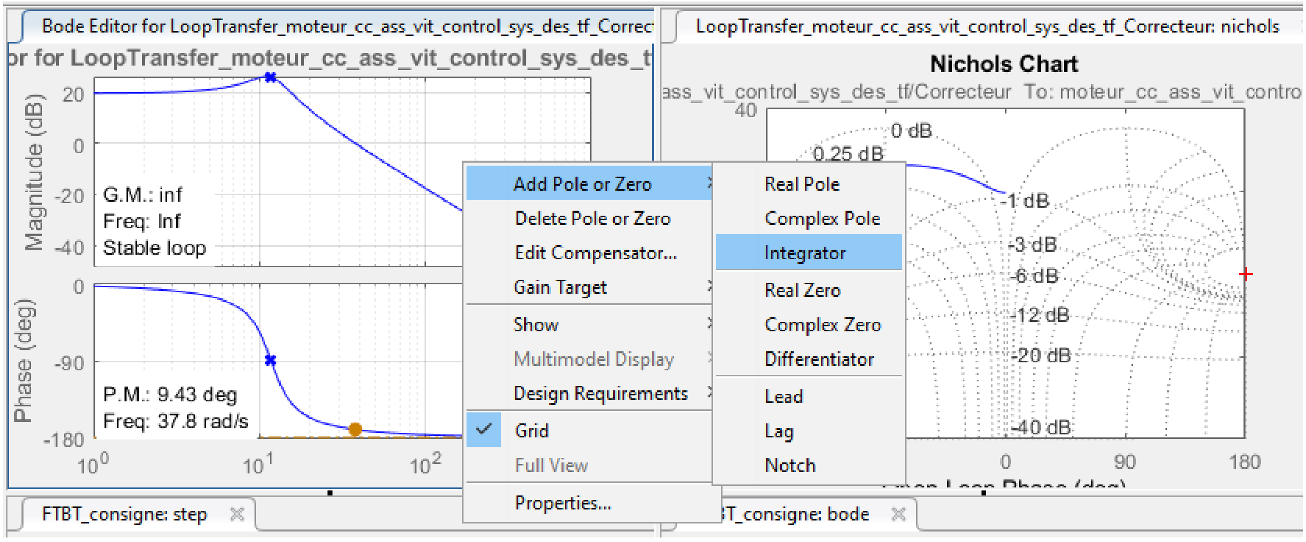


Figure 593 : ajout d'un intégrateur dans le correcteur

L'ajout d'un intégrateur à rendu l'asservissement instable. Les marges de gain et de phase sont négatives et sont visibles sur le diagramme de Bode et le tracé de Nichols.
La réponse indicielle met en évidence cette instabilité (Figure 594).

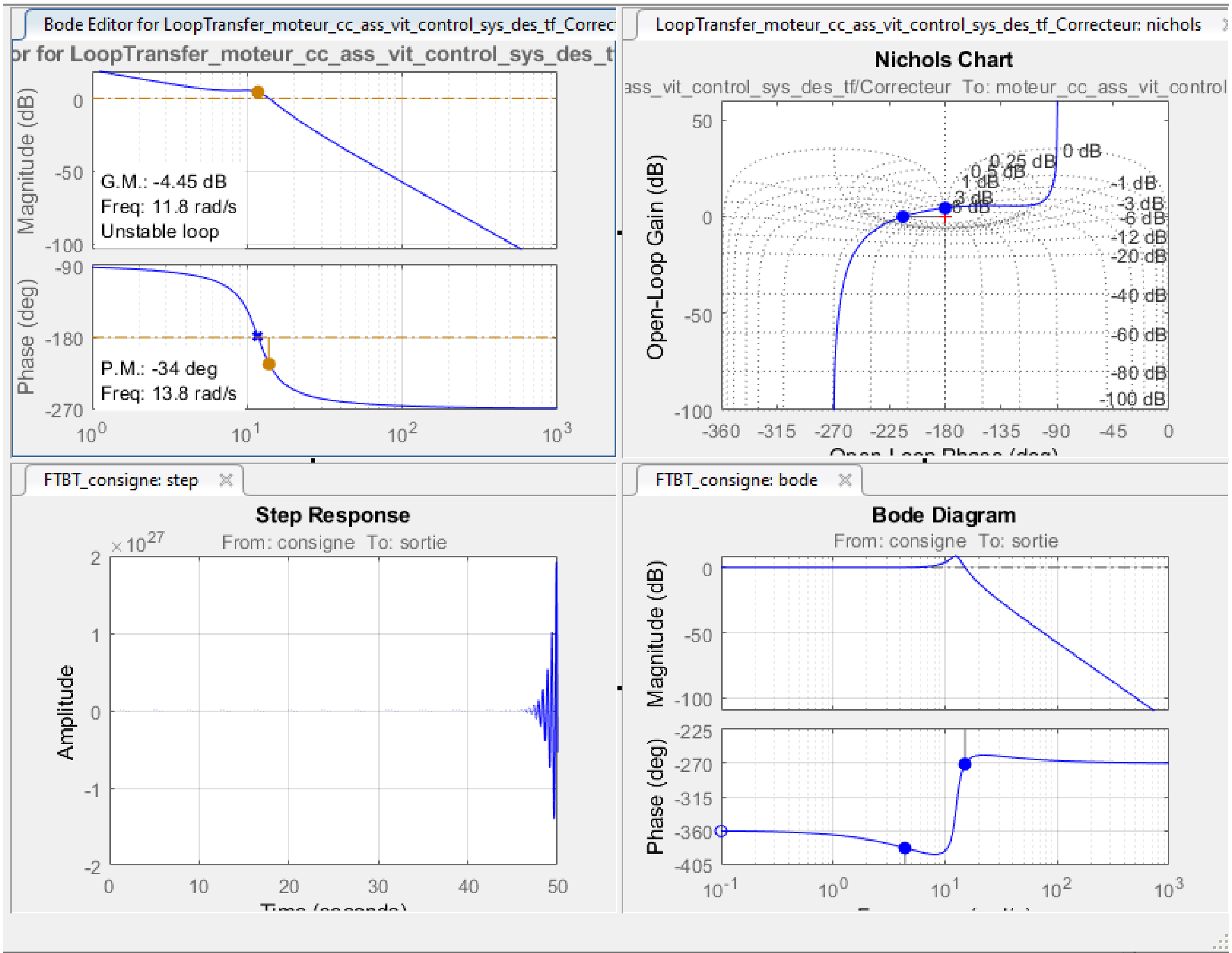


Figure 594 : visualisation de l'instabilité de la réponse indicielle

Il est possible de visualiser la nouvelle fonction de transfert du correcteur (Figure 595).

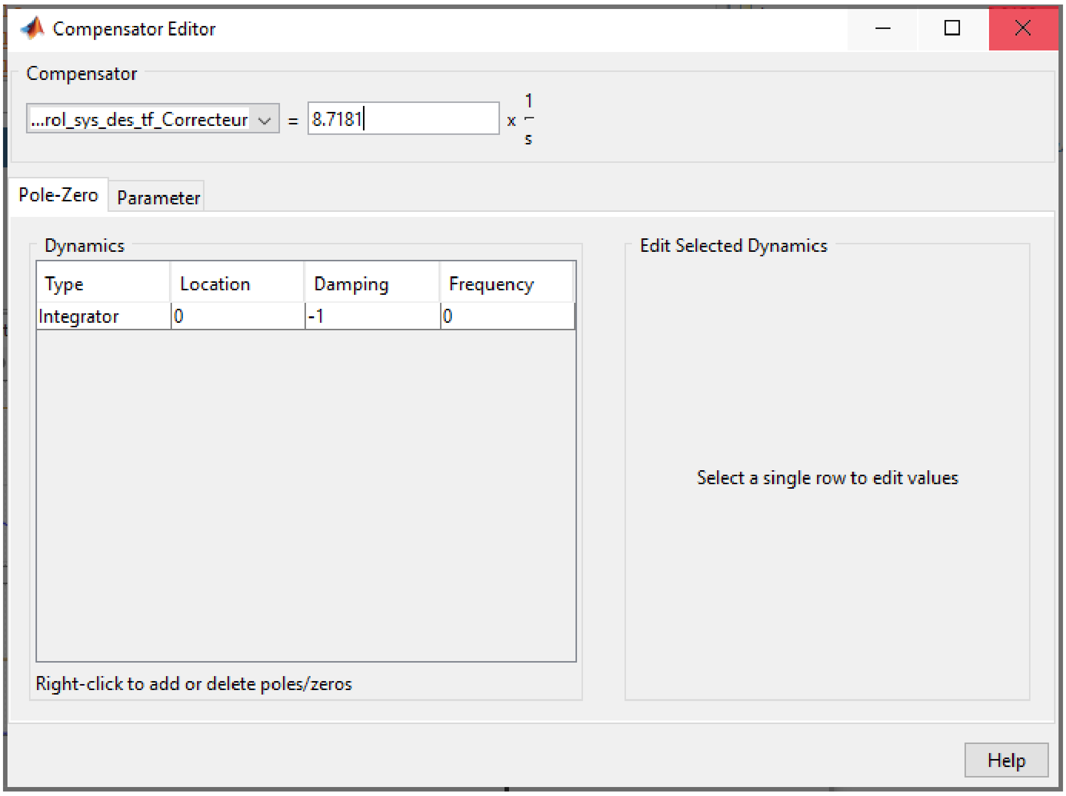


Figure 595 : visualisation de la fonction de transfert du correcteurt

6. Ajout d'un correcteur à avance de phase (Lead)

Afin d'augmenter les marges de gain et de phase, il est possible d'ajouter un correcteur à avance de phase (Lead).

Pour cela **cliquer** avec le bouton droit de la souris, puis sélectionner **Add Pole zero/Lead.**

A l'aide du pointeur de la souris cliquer ensuite au niveau de la pulsation de coupure sur le diagramme de Bode en gain de la fonction de transfert en boucle ouverte. Le pôle du correcteur à avance de phase sera alors placé au niveau de la pulsation de coupure. Le zéro sera placé automatiquement à une pulsation inférieure.

Il est possible de visualiser les pôles et les zéros sur toutes les courbes (Figure 596).

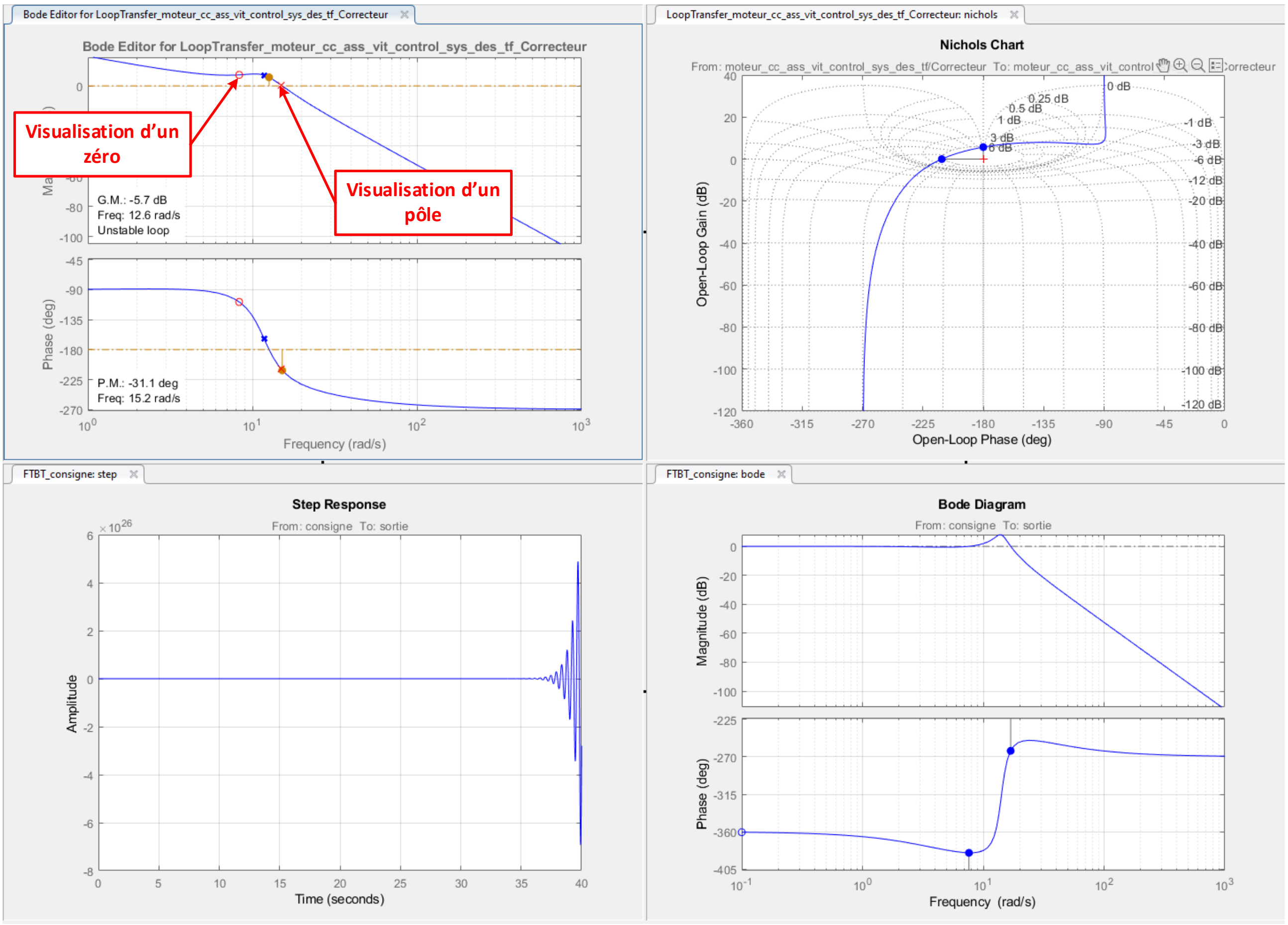


Figure 596 : visualisation des pôles et des zéros sur les courbes

Pour régler le correcteur à avance de phase, il suffit de déplacer à l'aide du pointeur de la souris le pôle et le zéro ainsi ajoutés pour obtenir une marge de gain et de phase positive afin de rendre le système stable.

Positionner le **pôle** autour de la pulsation **1000 rad/s** et le **zéro** autour de la pulsation **4 rad/s**.

Les marges de gain et de phase sont maintenant positives et le système est stable (Figure 597).

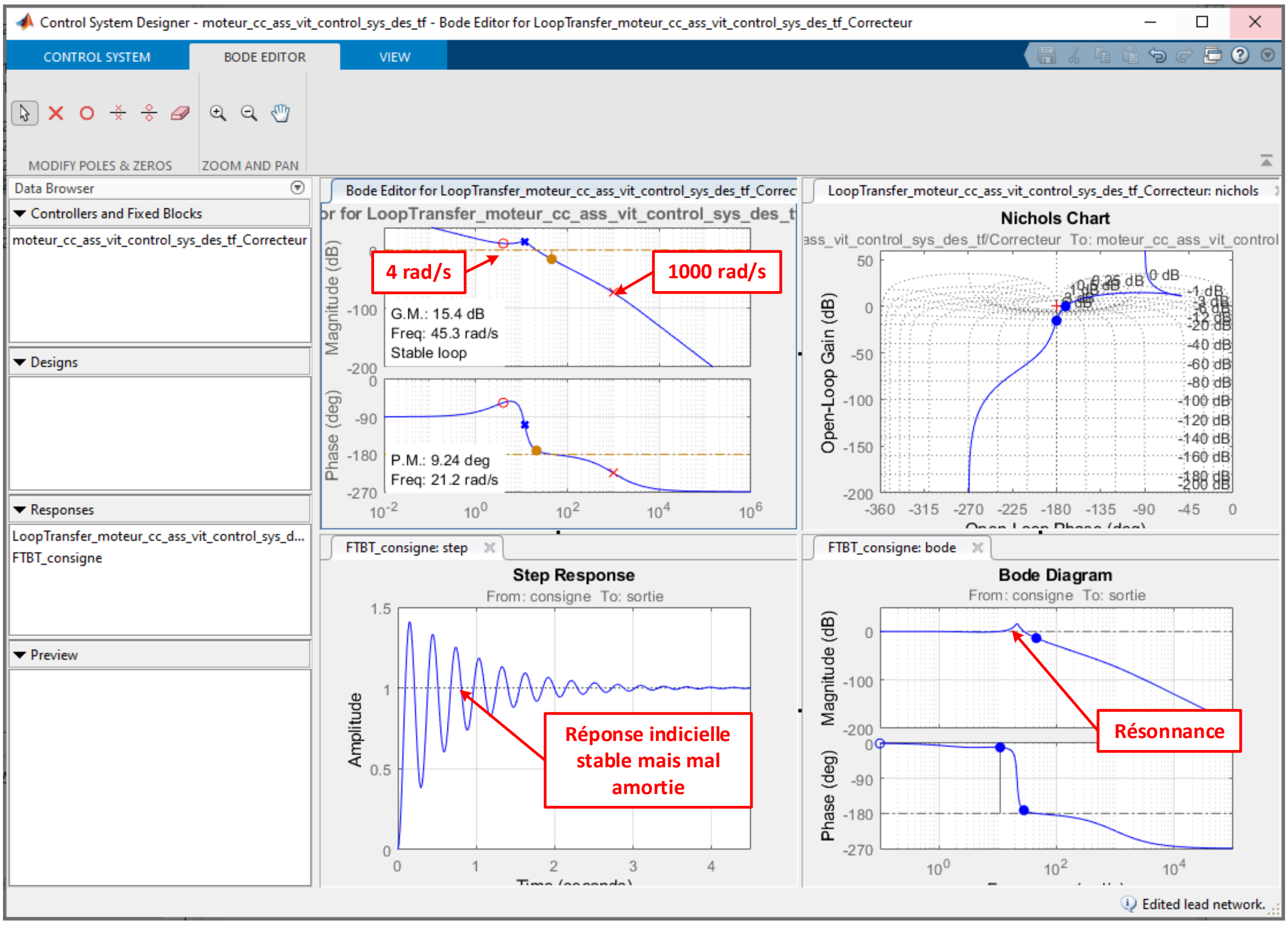


Figure 597 : stabilisation du système par ajout d'un correcteur à avance de phase

La réponse indicielle converge et la précision est bonne.

Le diagramme de Bode en gain de la fonction de transfert en boucle fermée, fait apparaître une forte résonance autour de la pulsation 22 rad/s qui témoigne de la mauvaise qualité de l'amortissement de la réponse indicielle (Figure 597).

Il est possible de visualiser la nouvelle fonction de transfert du correcteur (Figure 598).

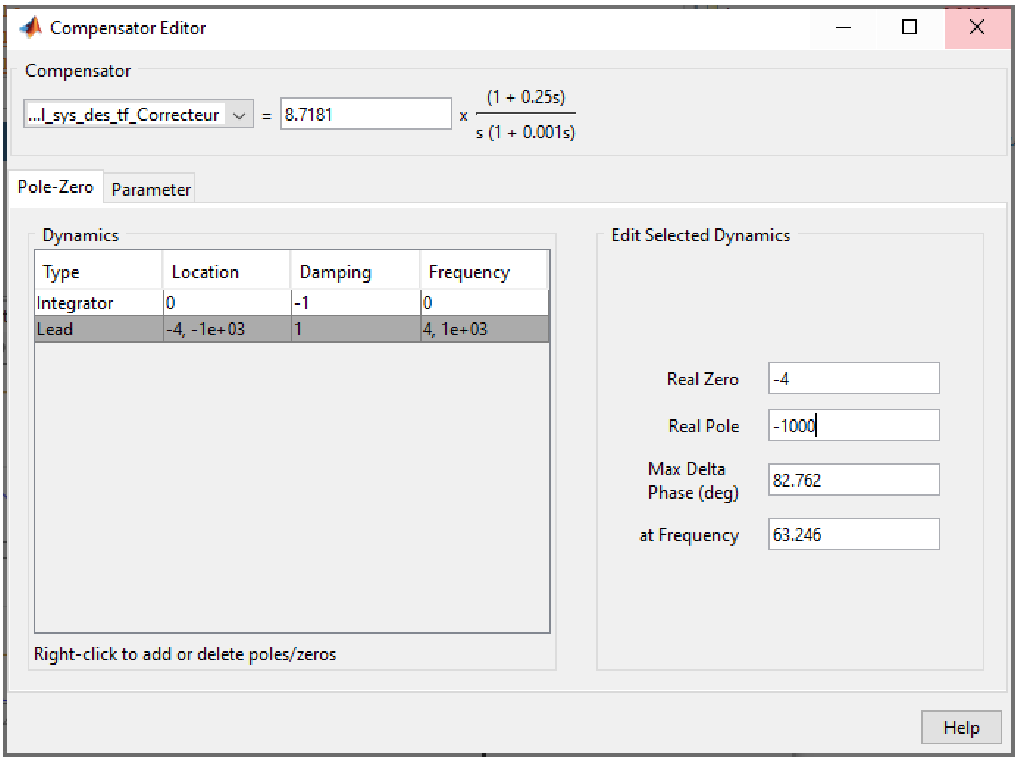


Figure 598 : visualisation de la fonction de transfert du correcteur

7. Ajout d'un filtre rejecteur (Notch)

Afin de compenser le phénomène de résonance constaté sur le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée (pic à la pulsation 20 rad/s). Il est possible d'ajouter un filtre rejecteur (**Notch**). Ce filtre permettra d'atténuer la résonance et de diminuer les oscillations.

Pour cela **cliquer** avec le bouton droit de la souris, puis sélectionner **Add Pole zero/Notch.**

Cliquer ensuite sur le diagramme de Bode en gain de la fonction de transfert en boucle ouverte légèrement en retrait du pic de résonnance constaté sur le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée (environ 10 rad/s).
Le filtre rejecteur est maintenant ajouté au correcteur et les diagrammes sont mis à jour (Figure 599).

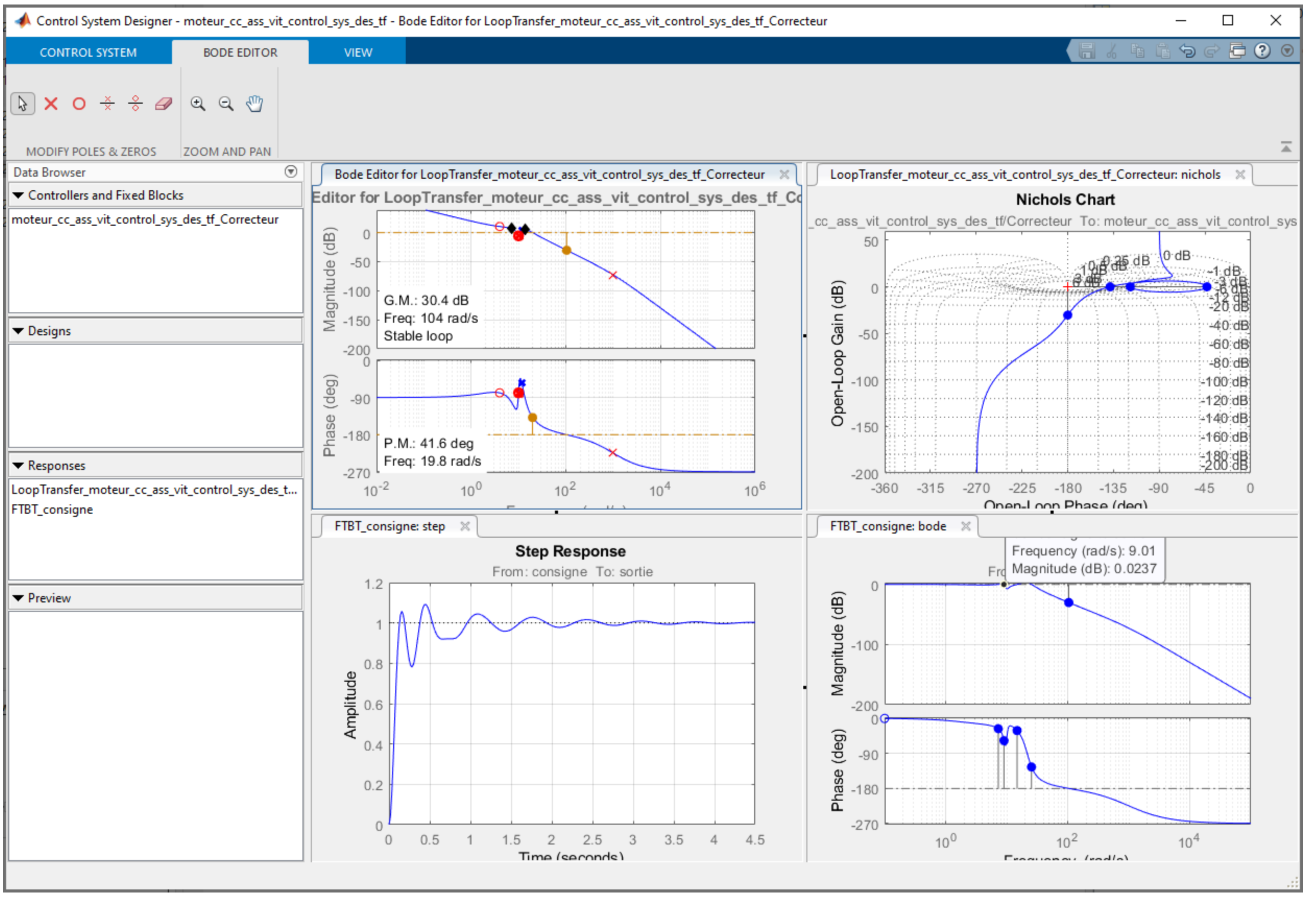


Figure 599 : ajout d'un filtre rejecteur au correcteur

Nous pouvons constater l'influence du filtre rejecteur sur la réponse indicielle et sur le diagramme de Bode de la boucle fermée. Il apparaît cependant que le filtre n'est pas bien réglé dans la mesure où la résonnance du diagramme de Bode de la boucle fermée n'est pas totalement compensée et des oscillations importantes persistent sur la réponse indicielle.

8. Réglage d'un filtre rejecteur

Pour régler le filtre rejecteur, il est possible de modifier graphiquement 3 paramètres :

- La fréquence à laquelle va agir le filtre (**Natural Frequency**)
- L'atténuation en dB que l'on souhaite obtenir (**Notch Depth**)
- La bande de fréquence dans laquelle le filtre doit agir (**Notch Width**)

Ces paramètres sont visualisables dans la fenêtre **Compensator Editor** et peuvent être modifier directement (Figure 600).

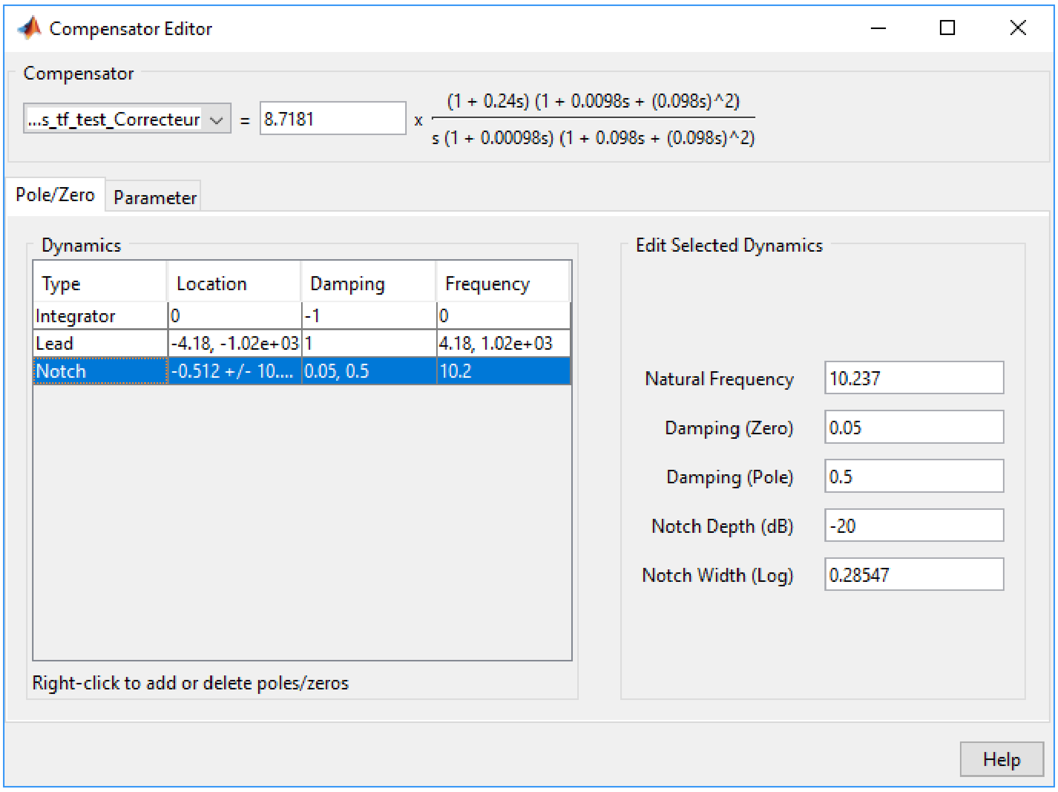


Figure 600 : visualisation des paramètres de réglage du filtre rejecteur

Cependant, ces paramètres peuvent être réglés de manière dynamique à partir du diagramme de Bode en gain de la fonction de transfert en boucle ouverte par simple glisser déposer des poignées représentant les paramètres du filtre indiqués sur la Figure 601.

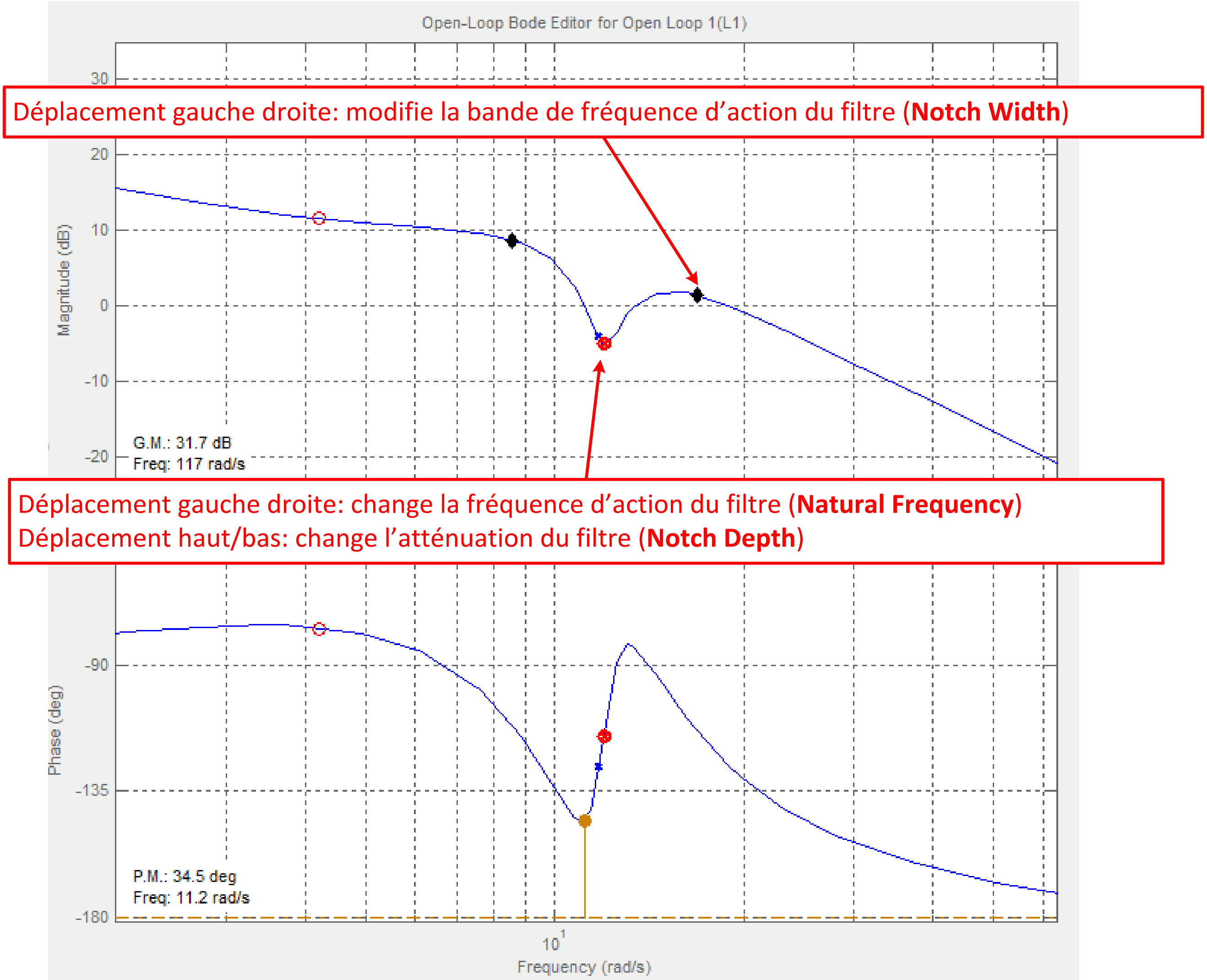


Figure 601 : réglage du filtre rejecteur

En visualisant simultanément le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée et le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte, régler les trois paramètres du filtre de manière à voir disparaître la résonnance sur le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée.

Une fois les réglages effectuées les performances de la boucle fermée sont sensiblement améliorées (Figure 602).

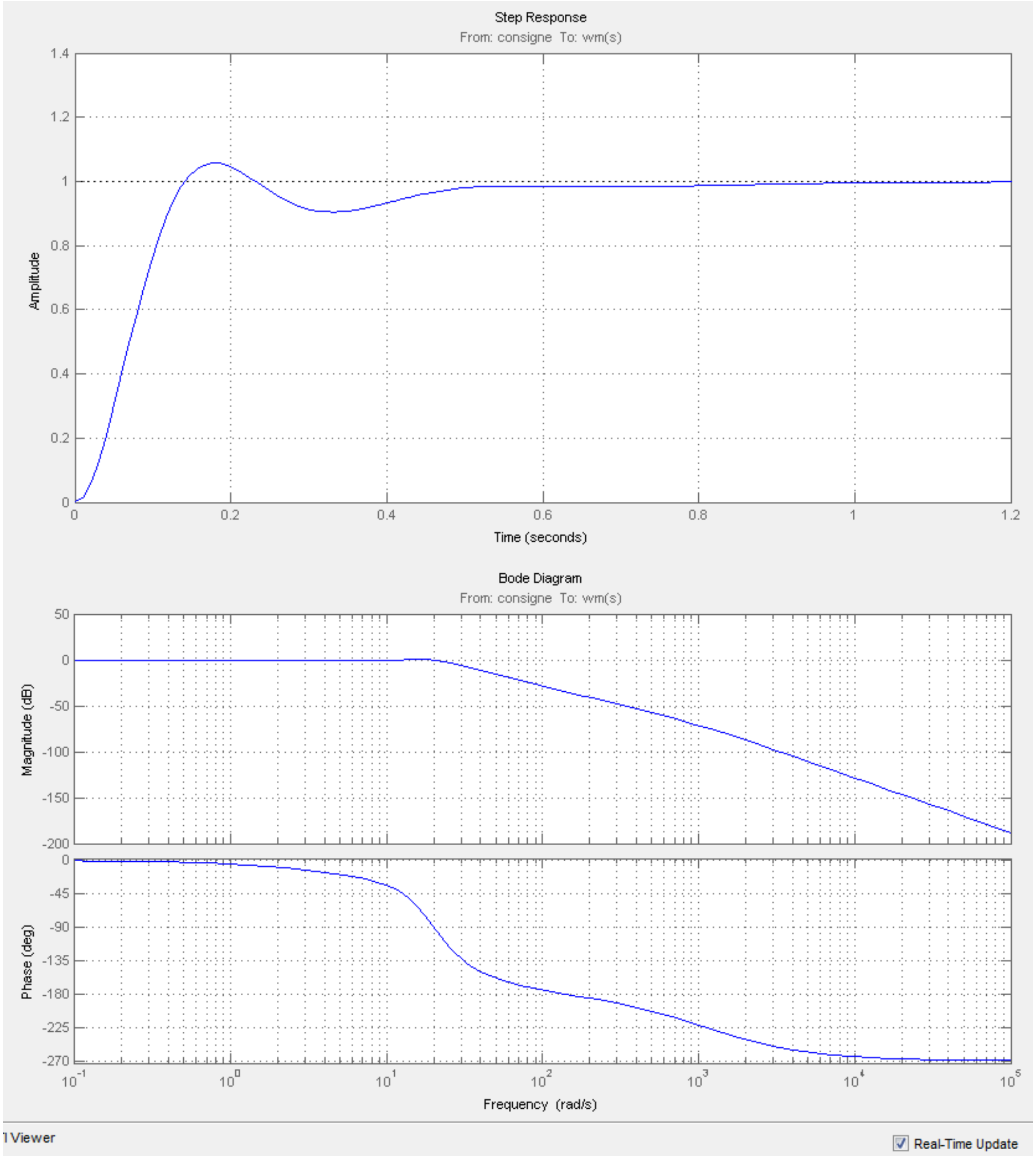


Figure 602 : performances de la boucle fermée après réglage du filtre

La réponse indicielle est précise, rapide et bien amorti. Le correcteur a permis de trouver un bon compromis entre toutes les performances recherchées.

Il est possible de visualiser la fonction de transfert du correcteur dans la fenêtre dans la fenêtre du **Compensator Editor** (Figure 603).

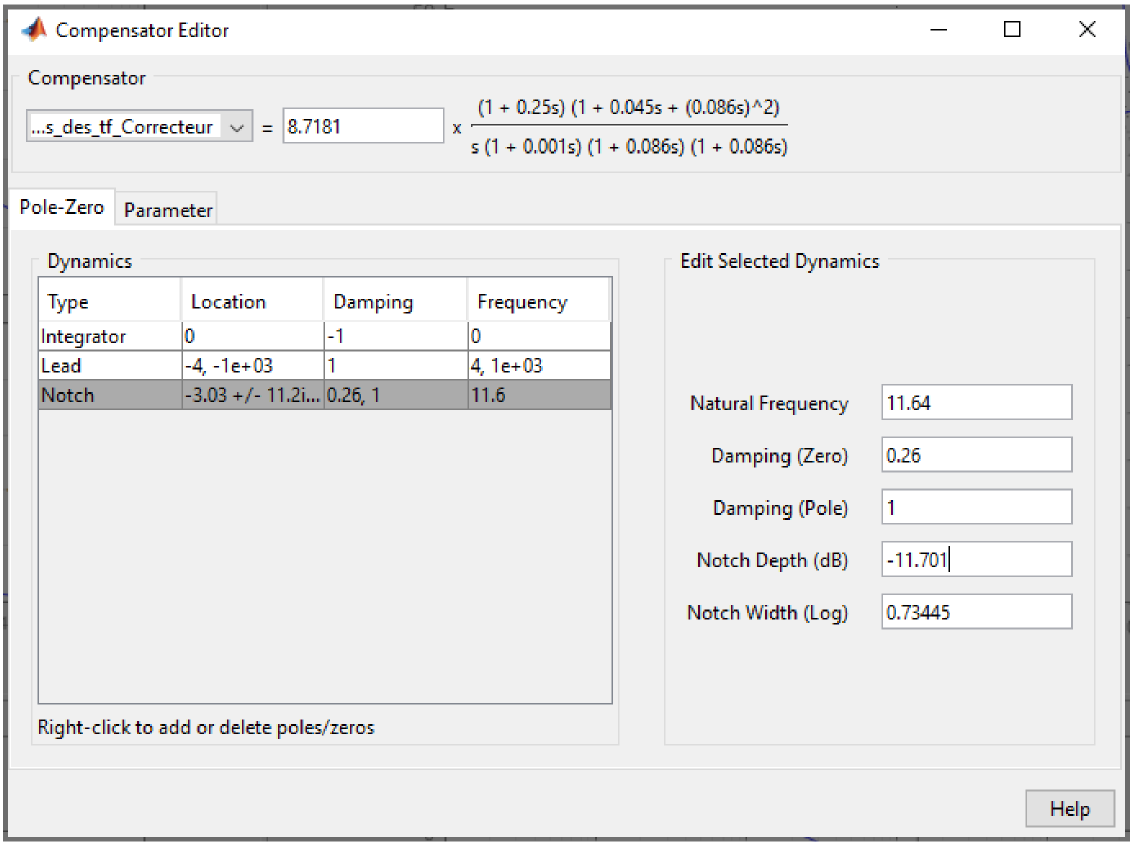


Figure 603 : visualisation de la fonction de transfert du correcteur

Il est également possible de voir l'influence du filtre rejecteur sur l'ensemble des courbes représentant le comportement de la boucle ouverte (Figure 604).

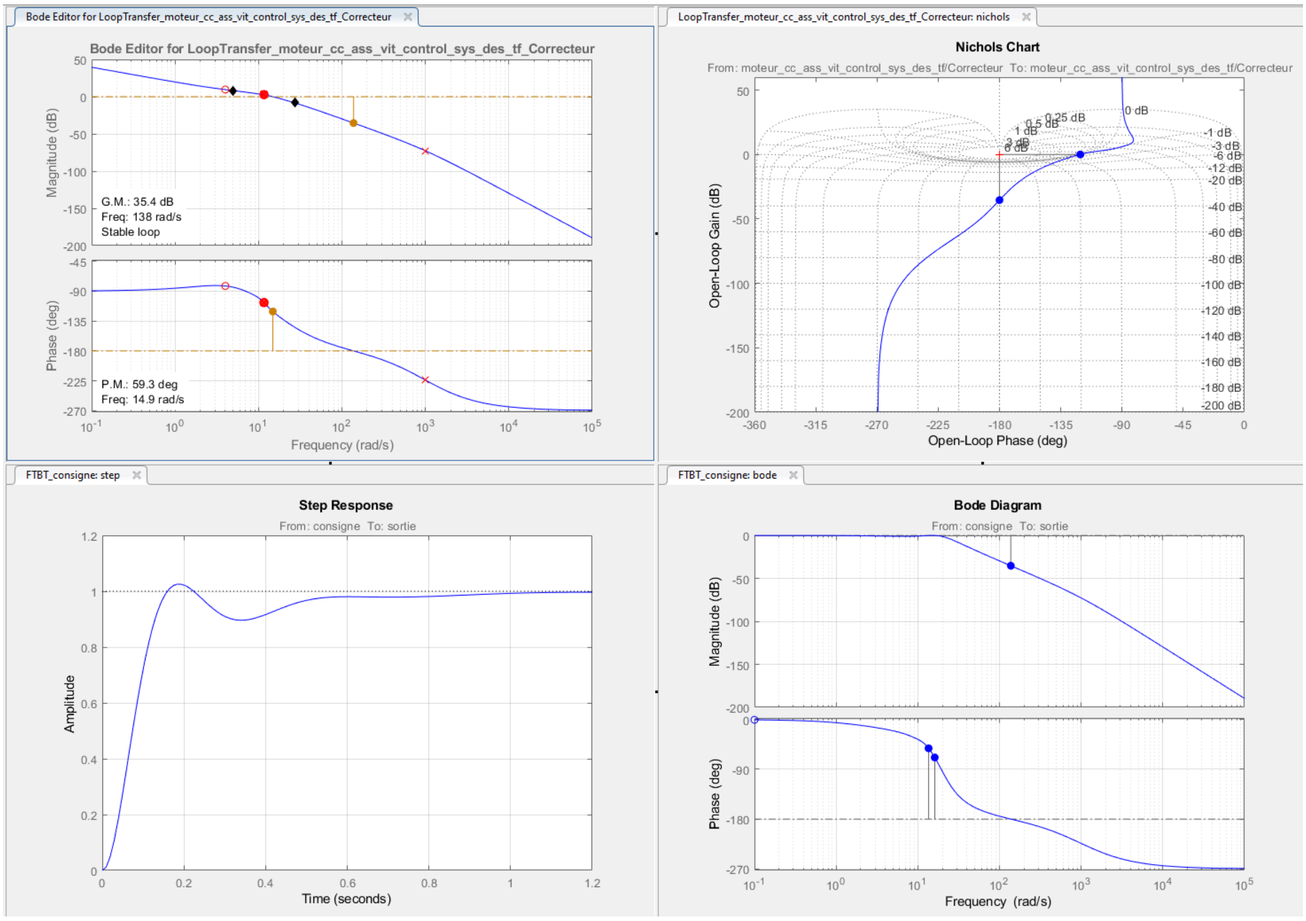


Figure 604 : influence du filtre sur le comportement de la boucle ouverte

9. Exportation de la fonction de transfert du correcteur vers le modèle Simulink

Cliquer maintenant sur **Update Block** dans la barre de commande du **Control System Designer** afin d'exporter la fonction de transfert du correcteur dans modèle Simulink.

Retourner dans le modèle Simulink, **lancer** la simulation et visualiser la réponse du système dans le scope.

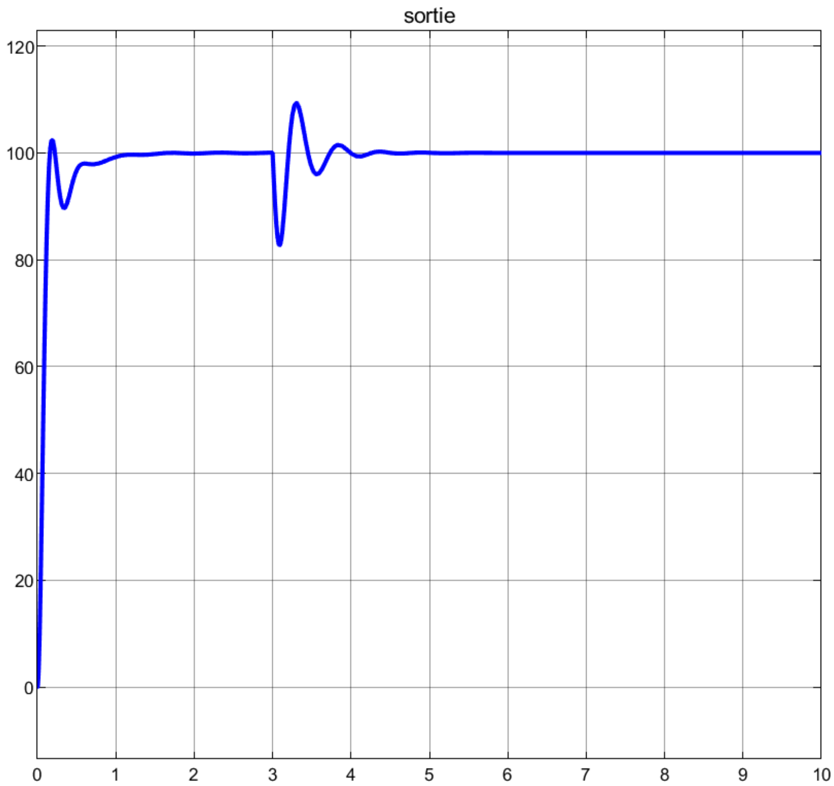
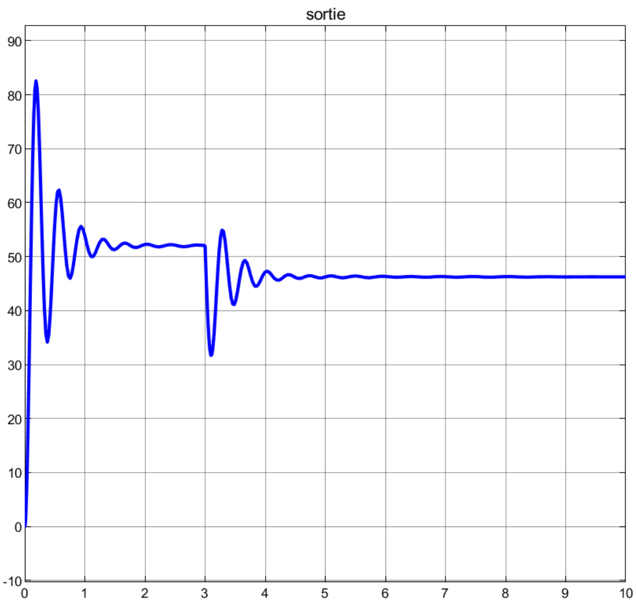


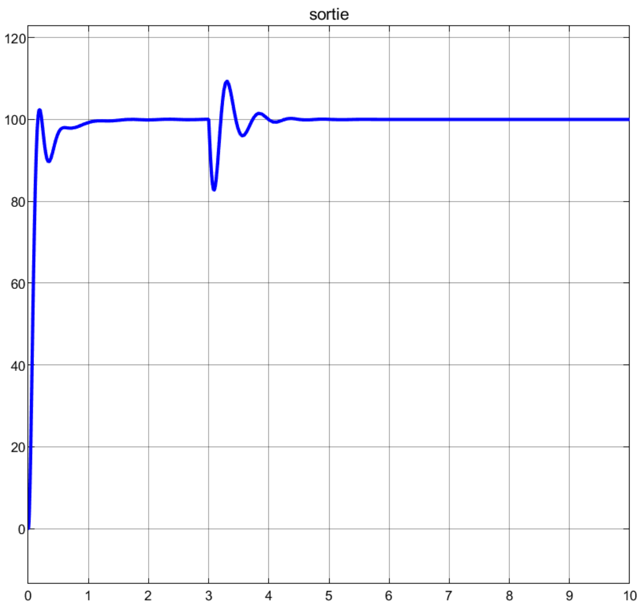
Figure 605 : réponse indicielle corrigée

La réponse indicielle corrigée (Figure 605) est précise, la rapidité et l'amortissement sont satisfaisants et la perturbation bien rejetée.

La comparaison des réponses corrigée et non corrigée permet de visualiser l'apport du correcteur (Figure 606).



Réponse indicielle non corrigée



Réponse indicielle corrigée

Figure 606 : comparaison des réponses indicielles corrigée et non corrigée

Chapitre 11 : Ingénierie numérique avec MATLAB

I. Introduction

Dans un processus de conception ou de validation des performances d'un système, l'ingénieur est amené à mettre en place des modèles qui lui permettent de décrire le comportement des éléments qui composent le système. La phase de modélisation va permettre d'établir des équations qui caractérisent le comportement d'un système. Sauf cas particuliers, la résolution de ces équations n'est en général pas possible en utilisant un processus de résolution analytique. La démarche de résolution est donc le plus souvent menée en utilisant un processus de calcul numérique. L'ingénieur doit être en mesure de coder avec un langage performant et adapté le processus de résolution qui correspond au problème traité. Ce chapitre présente les méthodes et les algorithmes qui sont à la base des compétences en ingénierie numérique :

- Utilisation et gestion des fonctions
- Dérivation numérique
- Résolution des équations algébriques
- Intégration numérique
- Filtrage des signaux
- Résolution des équations différentielles
- Résolution des systèmes d'équations…

La maitrise et l'utilisation courante de ces algorithmes permettra au futur ingénieur de renforcer ses compétences et d'être en mesure de résoudre une grande partie des problèmes auxquels il sera confronté.

II. Les fonctions

A. Organisation et structure

La bonne utilisation des fonctions est un élément déterminant de la conception des algorithmes en langage MATLAB. Il faut donc commencer ce chapitre par définir les modalités de création et d'utilisation des fonctions. Il existe en langage MATLAB de très nombreuse fonctions prédéfinies qui peuvent être utilisées directement en se référant à l'aide du logiciel afin de prendre connaissance des entrées (arguments) et des sorties de la fonction.

Il est par contre indispensable de définir ses propres fonctions pour les besoins d'un algorithme. L'utilisation des fonctions permet de structurer le code et le rendre plus lisible. Ainsi un script principal pourra faire appel durant son exécution à des fonctions définies préalablement. En langage MATLAB, il existe plusieurs manières de définir et d'utiliser les fonctions.

La première méthode consiste à définir les fonctions dans des fichiers différents du script principal. Sur la Figure 607, le script **Main_script_1** fait appel aux fonctions **function_1** et **function_2** durant son exécution. Le script **Main_script_2** fait appel aux fonctions **function_3**, **function_4** et **function_2** durant son exécution. L'intérêt de coder les fonctions dans des scripts séparés permet donc à des scripts différents de faire appel à une même fonction ou d'appeler une fonction directement à partir de la fenêtre de commande. C'est très pratique et c'est en général la méthode à privilégier. Pour pouvoir être appelée, une fonction doit se trouver dans le « **path** » de MATLAB, il est donc inutile d'indiquer le chemin d'accès à la fonction. L'inconvénient est que deux fonctions différentes ne pourront pas porter le même nom.

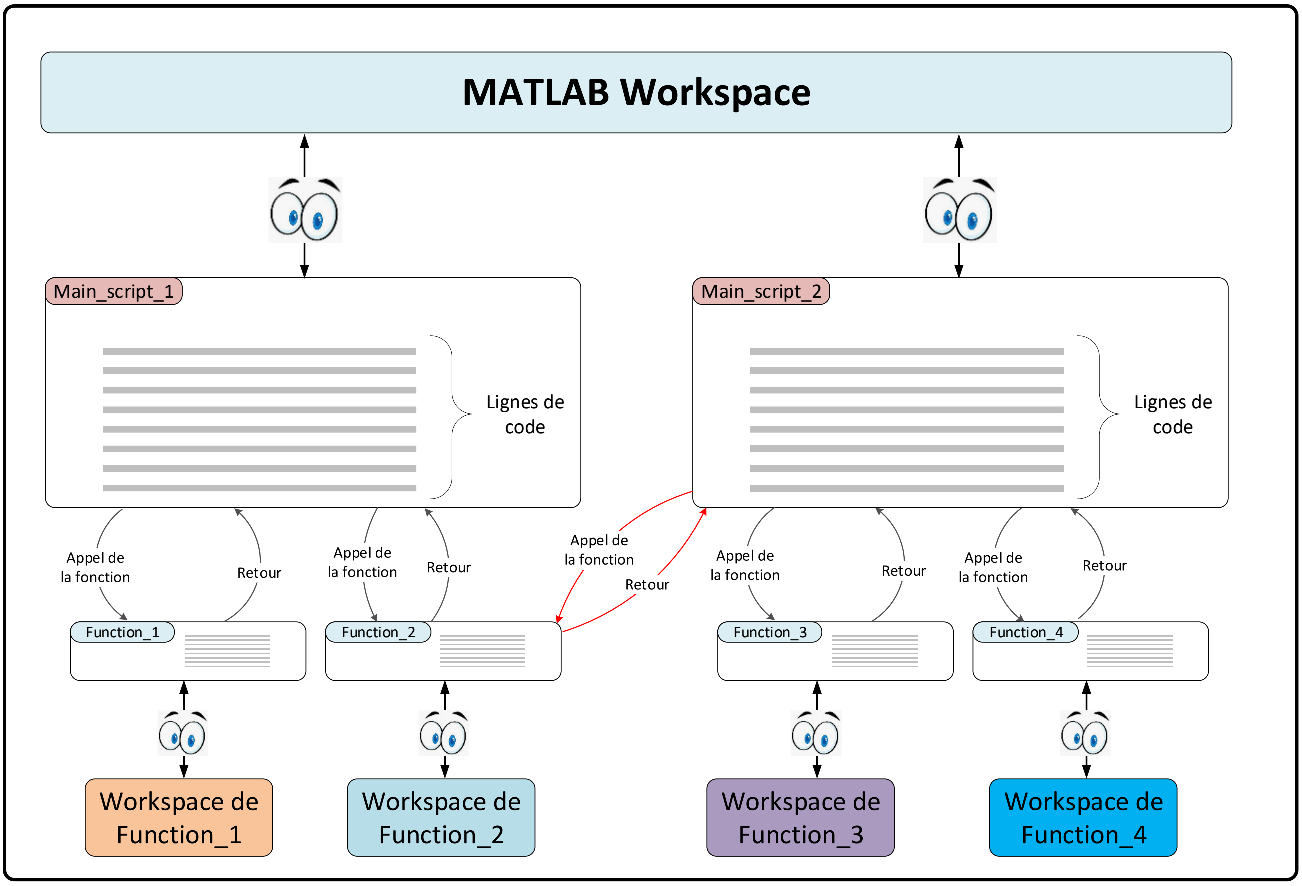


Figure 607 : organisation des scripts et des fonctions, méthode 1

La seconde méthode consiste à définir les fonctions directement dans les scripts dans lesquels elles seront utilisées. Ces fonctions sont obligatoirement placées à la fin du script.
Sur la Figure 608, le script **Main_script_1** fait appel aux fonctions **function_1** et **function_2** durant son exécution. Le script **Main_script_2** fait appel aux fonctions **function_3**, **function_4** durant son exécution. **Mainscript_2** ne pourra pas faire appel aux fonctions **function_1** ou **function_2**. Ce type de structure est adaptée à des fonctions qui n'auront d'intérêt que pour le script dans lequel elles sont définies.

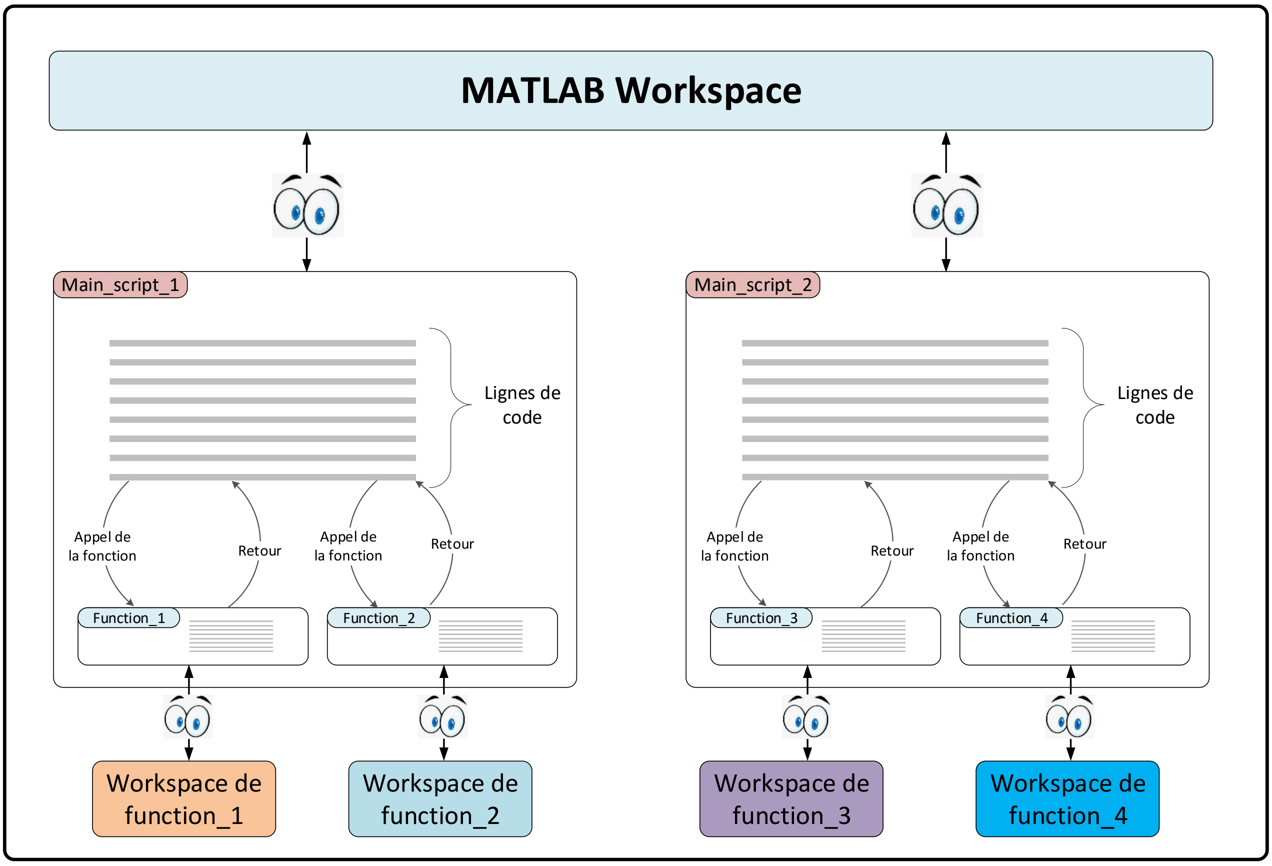


Figure 608 : organisation des scripts et des fonctions, méthode 2

B. Portée des variables

D'une manière générale, chaque fonction possède son propre **workspace** et utilise ses propres variables. Que ce soit dans le cas de la Figure 607 ou dans le cas de la Figure 608 les variables du **workspace** de MATLAB ne seront pas accessibles dans les différentes fonctions. De même les variables utilisées dans les fonctions n'apparaitront pas dans le **workspace** de MATLAB et ne pourront pas être utilisées dans le script. Si des variables doivent être partagées entre le script et les fonctions, des commandes spécifiques permettent de le préciser, mais cela n'aura pas lieu par défaut.

C. Création et définition d'une fonction

Vous pouvez trouver les fichiers de toutes les fonctions présentées dans ce paragraphe dans le dossier **Algorithmique_avec_MATLAB/ Fonctions.**

Prenons l'exemple d'une fonction élémentaire **my_0_function** (Figure 609) permettant de réaliser un calcul simple en prenant un nombre **x** comme argument et renvoyant la valeur calculée de **y** en fonction de **x**.

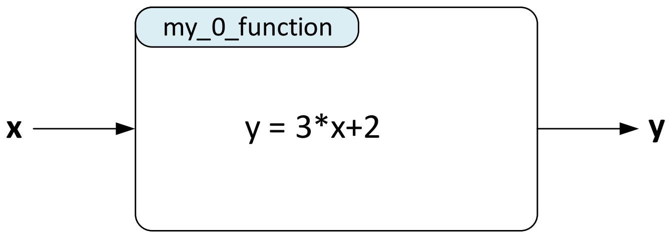


Figure 609 : my_0_function

La première méthode consiste à créer la fonction dans un fichier dédié à la fonction. Ce fichier doit respecter les règles suivantes (Figure 610) :

- commencer par le mot clé **function**
- préciser le nom de la fonction : **my_0_function**
- définir l'ensemble des paramètres d'entrée (arguments) : **x**
- définir l'ensemble des paramètres de sortie : **y**
- Le nom du fichier doit correspondre au nom de la fonction : **my_0_function.m**
- Se terminer par le mot réservé **end**

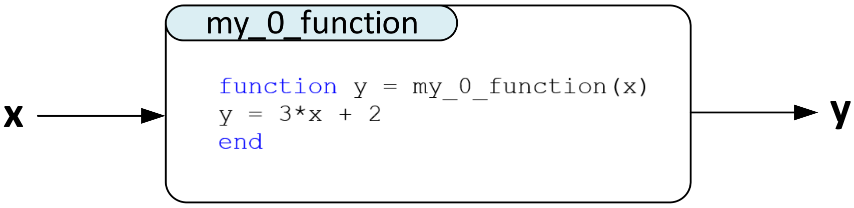


Figure 610 : codage de la fonction my_0_function

Créer le dossier « Mes_fonctions » que vous placerez dans le **path** de MATLAB. Choisir ce dossier comme dossier courant dans MATLAB.

Ouvrir un nouveau script et le sauvegarder sous le nom « **my_0_function.m** ».
Taper les lignes de code suivante :

```
function y = my_0_function(x)
y = 3*x + 2
end
```

Sauvegarder votre saisie.

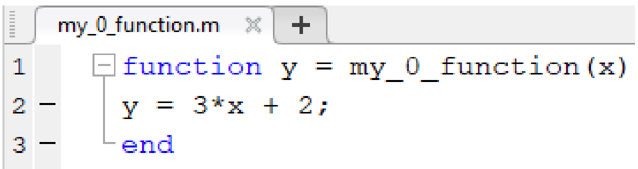


Figure 611 : codage de la fonction my_0_function

La fonction **my_0_function** est prête à être utilisée et apparaît comme une fonction dans le répertoire courant.

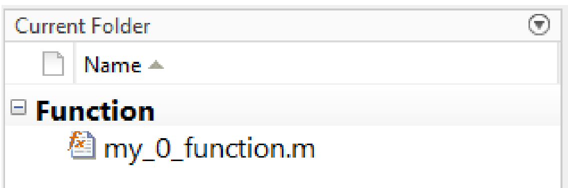


Figure 612 : visualisation de la fonction my_0_function dans le répertoire courant

Dans la fenêtre de commande, faire un appel à la fonction en spécifiant une valeur pour l'argument d'entrée.

```
>> my_0_function(5)
```

```
ans =
  17
```

Il est également possible de stocker le contenu du résultat dans une variable :

```
>> a = my_0_function(5)

a =
  17
```

Cette fonction peut maintenant être utilisée depuis la fenêtre de commande ou être appelée par un script durant son exécution.

Une fonction peut posséder plusieurs entrées et plusieurs sorties. C'est le cas de la fonction **my_1_function** de la Figure 613.

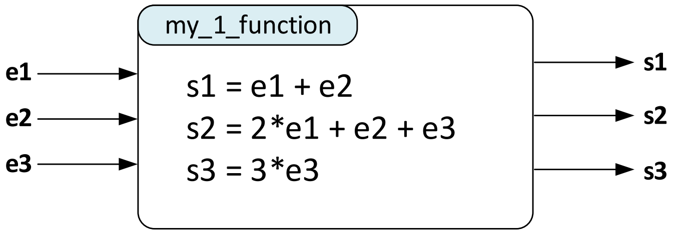


Figure 613 : my_1_function

La fonction sera codée comme indiqué sur la Figure 614.

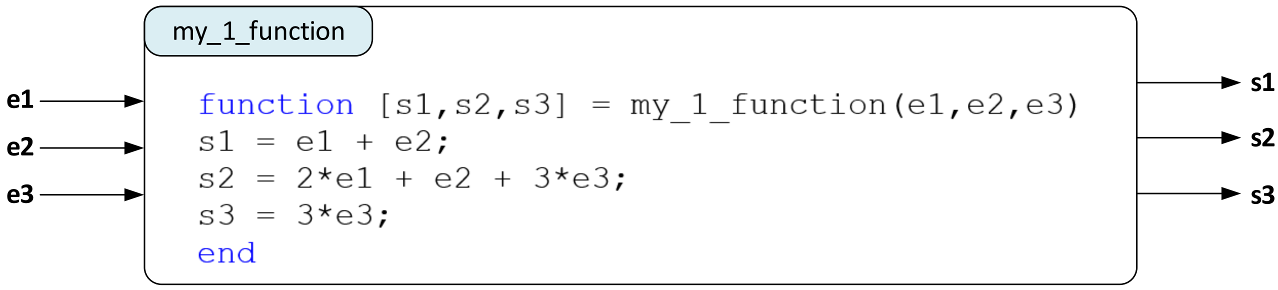


Figure 614 : codage de my_1_function

Ouvrir un nouveau script et le sauvegarder dans le dossier **Mes_fonctions** sous le nom « **my_1_function.m** ».

Taper les lignes de code suivante :

```
function [s1,s2,s3] = my_1_function(e1,e2,e3)
s1 = e1 + e2;
s2 = 2*e1 + e2 + 3*e3;
s3 = 3*e3;
end
```

Sauvegarder votre saisie.

```
function [s1,s2,s3] = my_1_function(e1,e2,e3)
s1 = e1 + e2;
s2 = 2*e1 + e2 + 3*e3;
s3 = 3*e3;
end
```

Figure 615 : codage de la fonction my_1_function

La fonction **my_1_function** est prête à être utilisée et apparaît comme une fonction dans le répertoire courant.

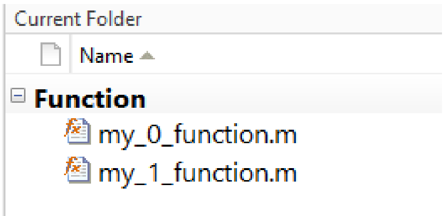


Figure 616 : visualisation de la fonction my_1_function dans le répertoire courant

Dans la fenêtre de commande, faire un appel à la fonction **my_1_function** en spécifiant une valeur pour chaque argument d'entrée.

```
>> my_1_function(1,2,3)

ans =
   3
```

Nous constatons que par défaut la fonction ne renvoie pas toutes ses sorties mais uniquement la première sortie **s1**. Il est possible de lui demander la sortie que l'on souhaite en tapant la commande suivante :

```
>> [~,~,a] = my_1_function(1,2,3)
a =
   9
```

Enfin, il est également possible de stocker le contenu des trois sorties dans des variables :

```
>> [a,b,c] = my_1_function(1,2,3)
a =
   3

b =
  13

c =
   9
```

Cette fonction peut maintenant être utilisée depuis la fenêtre de commande ou être appelée par un script durant son exécution.

D. Utilisation d’une fonction par un script

Nous allons maintenant examiner comment un script fait appel à une fonction et utilise le résultat de cette fonction. L’objectif est de créer un script permettant d’obtenir la représentation graphique d’une fonction avec la variation d’un paramètre. La fonction sera créée dans un fichier séparé **my_2_function.m**.

La fonction à tracer est définie par $y(x) = \sin(x).e^{-\frac{x}{a}}$

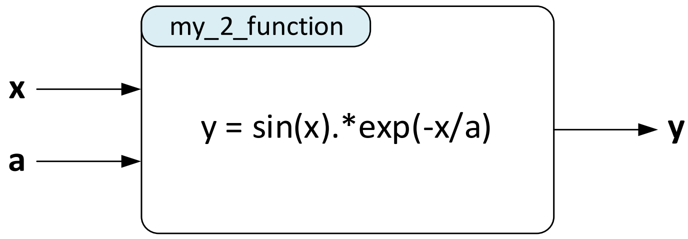


Figure 617 : my_2_function

La fonction sera codée comme indiqué sur la Figure 618.

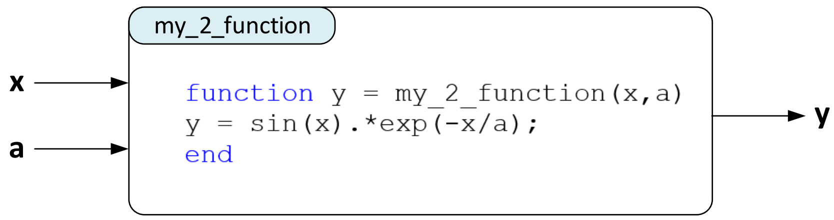


Figure 618 : codage de my_2_function

Ouvrir un nouveau script et le sauvegarder dans le dossier **Mes_fonctions** sous le nom « **my_2_function.m** ».

Taper les lignes de code suivante :

```
function y = my_2_function(x,a)
y = sin(x).*exp(-x/a);
end
```

Sauvegarder votre saisie.

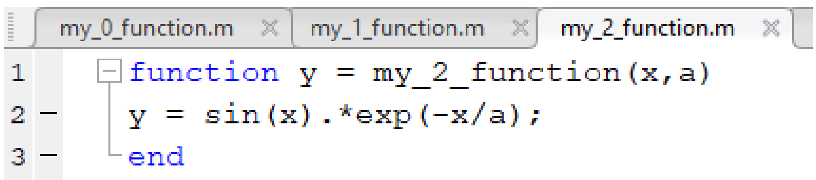


Figure 619 : codage de la fonction my_2_function

La fonction **my_2_function** est prête à être utilisée et apparaît comme une fonction dans le répertoire courant.

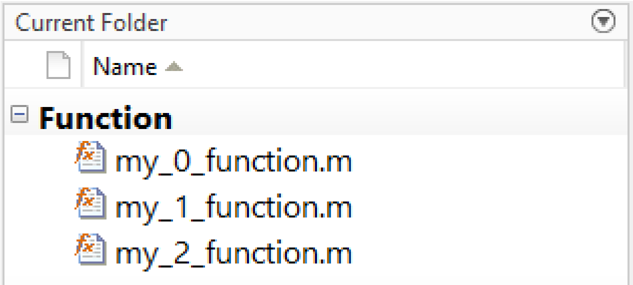


Figure 620 : visualisation de la fonction my_2_function dans le répertoire courant

Créer un nouveau script et saisir les lignes de commandes suivantes ou **ouvrir** directement le fichier « **script_0.m** ».

```
%% script_0
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Ce script permet de tracer une série de courbes en faisant varier un paramètre
% L'équation de la courbe est stockée dans la fonction my_2_function.m

% création d'une nouvelle fenêtre graphique
figure;
hold on;

% création du vecteur des temps
t = [0:0.001:60];

% boucle permettant le tracé avec la variation du paramètre
for k = 5:5:40
plot(t,my_2_function(t,k),'LineWidth',2); % appel de la fonction
end

% affichage de la grille
grid on;
grid minor;

% titre et étiquettes des axes
title('sin(t)*exp(-t/a)','Color','red');
xlabel('Temps','Color','blue');
ylabel('Valeur du sinus','Color','blue');
```

Figure 621 : script_0.m

Ici lors de l'appel à la fonction **plot**, la fonction qui sera tracée sera la fonction contenue dans **my_2_function**. Le premier argument de **my_2_function** sera le temps **t** et le second argument sera le paramètre **k** qui va varier pour chacune des courbes.

Sauvegarder et **exécuter** le script.

Le graphique obtenu est visualisable sur la Figure 622.

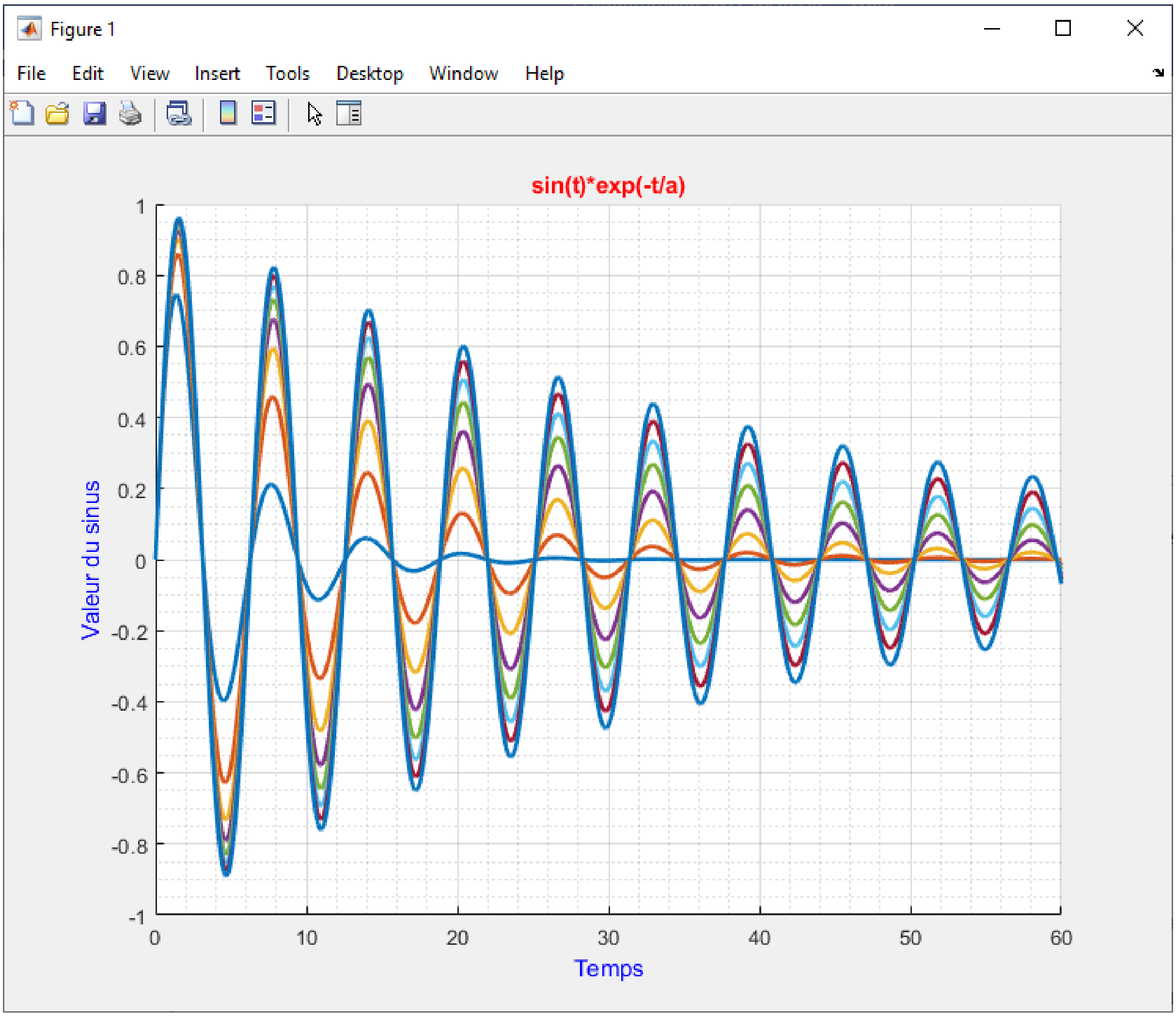


Figure 622 : résultat obtenu suite à l'exécution de script_0.m

Les différentes courbes apparaissent, mais il est impossible de relier une courbe particulière à la valeur du paramètre **a** correspondant, ce qui rend cette série de courbes inexploitables. Nous allons apporter quelques améliorations à ce script en lui permettant de générer automatiquement une légende afin de relier les courbes aux différentes valeurs du paramètre **a**. Nous utiliserons également l'interpréteur Tex afin d'écrire l'équation de manière plus lisible.

Pour créer la légende nous utiliserons un tableau de type **cell** permettant de stocker tout type de données et en particulier des chaines de caractères. A chaque itération, une ligne de la légende est générée puis stockée dans la cellule sous la forme d'une chaine de caractères. La légende est ensuite ajoutée au graphique à l'aide de la commande **legend** qui permet d'afficher directement le contenu de la cellule.

Pour utiliser l'interpréteur Tex, nous ferons appel à la commande **texlabel**.

Modifier le script conformément à la Figure 623 ou **ouvrir** le fichier « **script_0_legende.m** ».

```
%% script_0_legend
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
```

```
% Ce script permet de tracer une série de courbes en faisant varier un paramètre
% La légende est générée automatiquement
% L'équation de la courbe est stockée dans la fonction my_2_function.m

% création d'une nouvelle fenêtre graphique
figure;
hold on;

% création du vecteur des temps
t = [0:0.001:60];

% boucle permettant le tracé avec la variation du paramètre
for k = 5:5:40
plot(t,my_2_function(t,k),'LineWidth',2); % appel de la fonction
end

% affichage de la grille
grid on;
grid minor;

% titre et étiquettes des axes
title('sin(t)*exp(-t/a)','Color','red');
xlabel('Temps','Color','blue');
ylabel('Valeur du sinus','Color','blue');
% Ce script permet de tracer une série de courbes en faisant varier un paramètre
% L'équation de la courbe est stockée dans la fonction my_2_function.m

% création d'une nouvelle fenêtre graphique
figure;
hold on;

% création du vecteur des temps
t = [0:0.001:60];

%création d'une cellule pour stocker les lignes de la légende
Titre_Legende = cell(1,1);
ind_Legende = 1;

% boucle permettant le tracé avec la variation du paramètre
for k = 5:5:40
plot(t,my_2_function(t,k),'LineWidth',2);
Titre_Legende{1,ind_Legende} =  'a=' + string(k); % création de la ligne de la légende
ind_Legende = ind_Legende + 1;
end

% affichage de la légende
legend(Titre_Legende);

% affichage de la grille
grid on;
grid minor;

% titre et étiquettes des axes
titre = texlabel('sin(t).e^((-t/a)) en fonction de t');
title(titre,'Color','red');
xlabel('Temps t en (s)','Color','blue');
ylabel('Valeur du sinus amorti','Color','blue');
```

Figure 623 : ajout d'une légende automatiquement au graphique

Sauvegarder, puis **exécuter** le script pour obtenir la représentation graphique de la Figure 624.

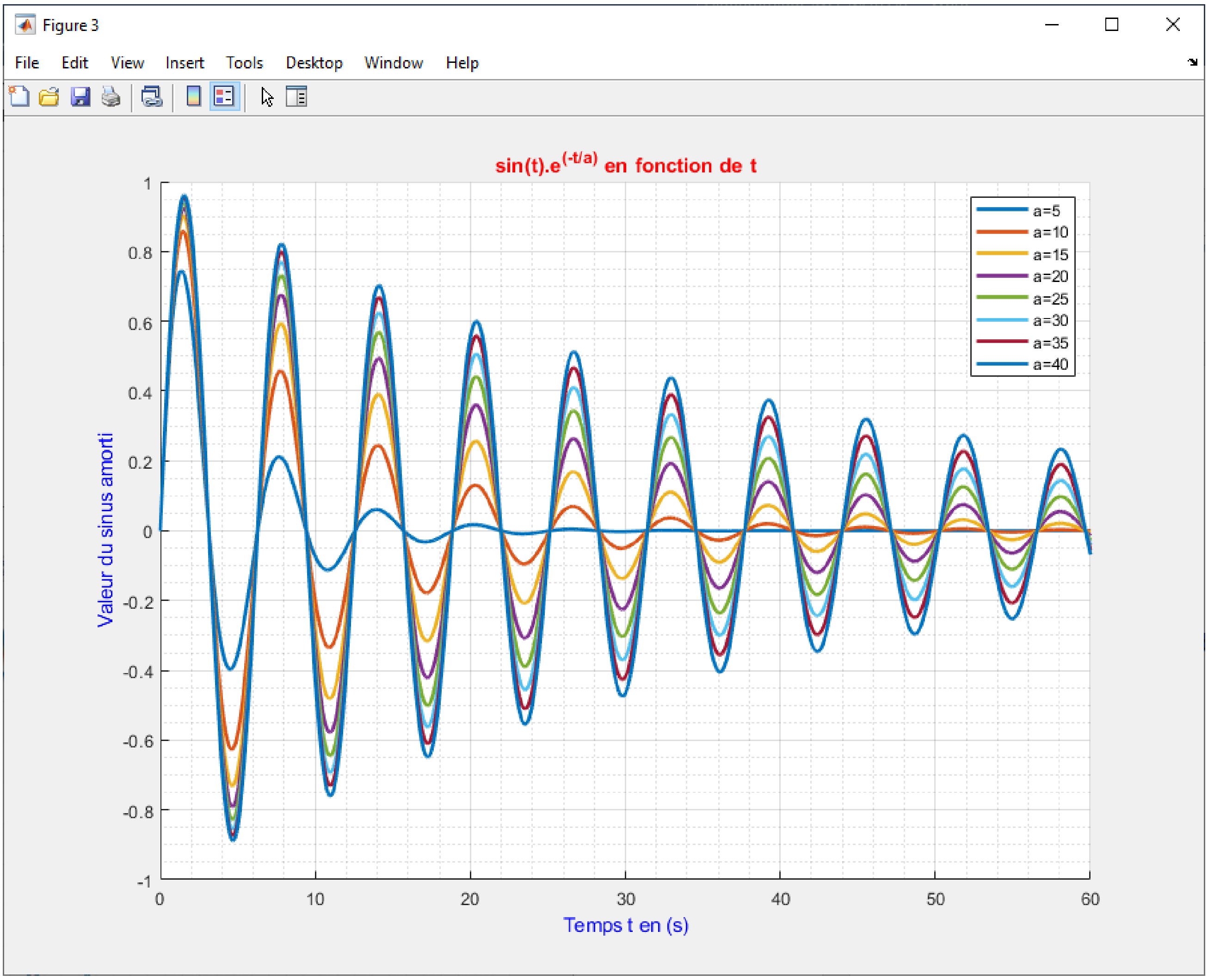


Figure 624 : représentation graphique avec légende automatique

Il est maintenant possible de relier chaque courbe à la valeur du paramètre **a** correspondant. L'équation du titre apparaît de manière plus explicite.

Il est également possible d'intégrer la fonction à tracer directement dans le script. Un exemple est donné dans le fichier « **script_0_legend_all_in_one.m** » (Figure 625). L'exécution de ce script donne un résultat rigoureusement identique.

```
%% script_0_legend_all_in_one.m
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Ce script permet de tracer une série de courbes en faisant varier un paramètre
% L'équation de la courbe est stockée dans la fonction définie en fin de
% fichier

% création d'une nouvelle fenêtre graphique
figure;
hold on;

% création du vecteur des temps
t = [0:0.001:60];
```

```
%création d'une cellule pour stocker les lignes de la légende
Titre_Legende = cell(1,1);
ind_Legende = 1;

% boucle permettant le tracé avec la variation du paramètre
for k = 5:5:40
plot(t,f(t,k),'LineWidth',2);
Titre_Legende{1,ind_Legende} =  'a=' + string(k); % création de la ligne de la légende
ind_Legende = ind_Legende + 1;
end

% affichage de la légende
legend(Titre_Legende);

% affichage de la grille
grid on;
grid minor;

% titre et étiquettes des axes
titre = texlabel('sin(t).e^((-t/a)) en fonction de t');
title(titre,'Color','red');
xlabel('Temps t en (s)','Color','blue');
ylabel('Valeur du sinus amorti','Color','blue');

% définition de la fonction
function y=f(x,a)
y = sin(x).*exp(-x/a);
end
```

Figure 625 : script_0_legend_all_in_one

E. Création d'une fonction prenant en argument une autre fonction

Il est très fréquent d'avoir besoin de créer une fonction qui prendra en argument une autre fonction. A titre d'exemple, nous allons créer une fonction qui correspond à un besoin fréquent des utilisateurs de MATLAB. Afin de pouvoir formater rapidement et efficacement les graphiques que l'on doit tracer il peut être intéressant de créer une fonction qui permettra d'obtenir la représentation graphique d'une courbe en imposant un formatage du graphique prédéfini et qui sera donc le même pour toutes les courbes que l'on souhaite tracer. Pour cela nous allons créer une fonction **my_plot_function** qui prendra en argument une autre fonction **my_3_function** qui contient l'équation de la courbe.

La fonction **my_plot_function (**Figure 626**)** prendra plusieurs arguments en entrée :

- **a** : limite inférieure pour les abscisses
- **b** : limite supérieure pour les abscisses
- **nb_points** : nombres de points à calculer pour le tracé
- **f** : fonction à tracer
- **titre**: titre du graphique
- **Xtitle**: titre de l'axe des abscisses
- **Ytitle**: titre de l'axe des ordonnées

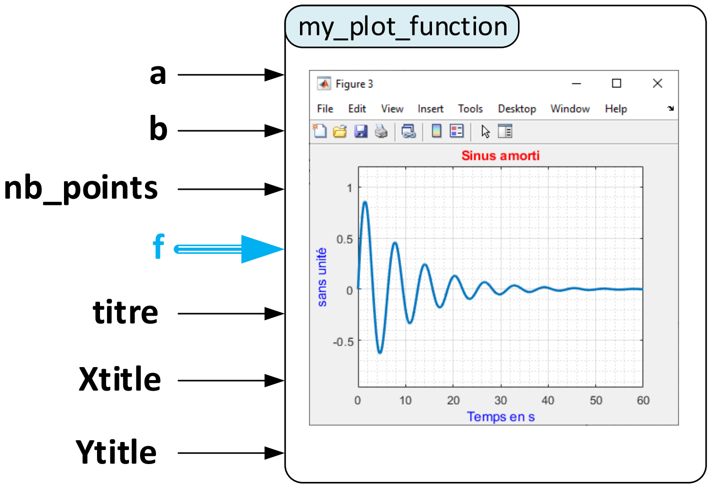


Figure 626 : my_plot_function

Nous pouvons remarquer que cette fonction ne renvoie aucune variable. Son action sera limitée à la génération d'une fenêtre graphique contenant la courbe à tracer.

Ouvrir le fichier contenant la fonction « **my_plot_function.m** » (Figure 627)

```
%% my_plot_function.m
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Trace une courbe avec une mise en forme prédéfinie
%
% my_plot_function(a,b,nb_points,f,titre,Xtitle,Ytitle)
%
% a : limite inférieure pour les abscisses
% b : limite supérieure pour les abscisses
% nb_points : nombres de points à calculer pour le tracé
% f : fonction à tracer
% titre: titre du graphique
% Xtitle: titre de l'axe des abscisses
% Ytitle: titre de l'axe des ordonnées

function my_plot_function(a,b,nb_points,f,titre,Xtitle,Ytitle)
% Création d'une fenêtre graphique
figure;
% création du vecteur des temps
t = [a:(b-a)/nb_points:b];
% tracé de la courbe et utilisation de la fonction prise en argument
plot(t,f(t),'LineWidth',2);
%génération de la grille
grid on;
grid minor;
% titre et étiquette des axes
title(titre,'Color','red');
```

```
xlabel(Xtitle,'Color','blue');
ylabel(Ytitle,'Color','blue');
% spécification des limites sur l'axe des abscisses
xlim([a,b]);
% spécification des limites sur l'axe des ordonnée
% axis donne les limites ymin et ymax
% les limites sur l'axe des ordonnées sont fixées à 20% au dessus des
% valeurs mini et maxi de la courbe
l = axis;
ymin = l(3); ymax = l(4);
ylim([1.2*ymin,1.2*ymax]);
end
```

Figure 627 : my_plot_function

Saisir la commande suivante dans la fenêtre de commande.

```
>> help my_plot_function

 my_plot_function.m
 Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
 Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
 avec MATLAB - Simulink
 Trace une courbe avec une mise en forme prédéfinie
  my_plot_function(a,b,nb_points,f,titre,Xtitle,Ytitle)

 a : limite inférieure pour les abscisses
 b : limite supérieure pour les abscisses
 nb_points : nombres de points à calculer pour le tracé
 f : fonction à tracer
 titre: titre du graphique
 Xtitle: titre de l'axe des abscisses
 Ytitle: titre de l'axe des ordonnées
```

La fenêtre de commande renvoie le commentaire placé en début de fonction de précédé du signe %%. Ce commentaire constitue une aide pour l'utilisateur de la fonction. Il est très important de bien documenter sa fonction en vue de son utilisation ultérieure.

Il faut maintenant créer la fonction **my_3_function** qui sera utilisée en argument : $y(x)=\sin(x).e^{-\frac{x}{10}}$

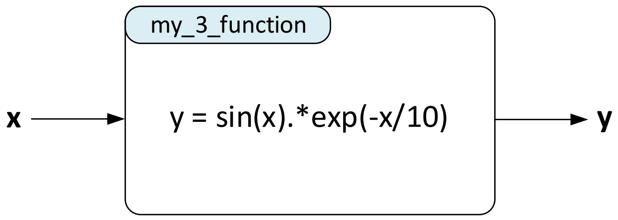


Figure 628 : my_3_function

Ouvrir un nouveau script et créer la fonction **my_3_function.**
Sauvegarder cette fonction sous le nom « **my_3_function.m** ».

my_1_function.m | my_2_function.m | my_3_function.m

```
function y = my_3_function(x)
y = sin(x).*exp(-x/10);
end
```

Figure 629 : my_3_function

Quand une fonction que l'on a codée utilise en argument une autre fonction, il est impératif de placer le signe « **@** » devant la fonction qui est utilisée en argument. Pour utiliser la fonction **my_plot_function** avec **my_3_function** en argument, il faut taper la commande suivante dans la fenêtre de commande ou dans un script. La fonction sera tracée sur l'intervalle**[0;60]** et contiendra **1000 points**.

```
>> my_plot_function(0,60,1000,@my_3_function,'Sinus amorti','Temps en s','sans unité')
```

On obtient la courbe de la Figure 630.

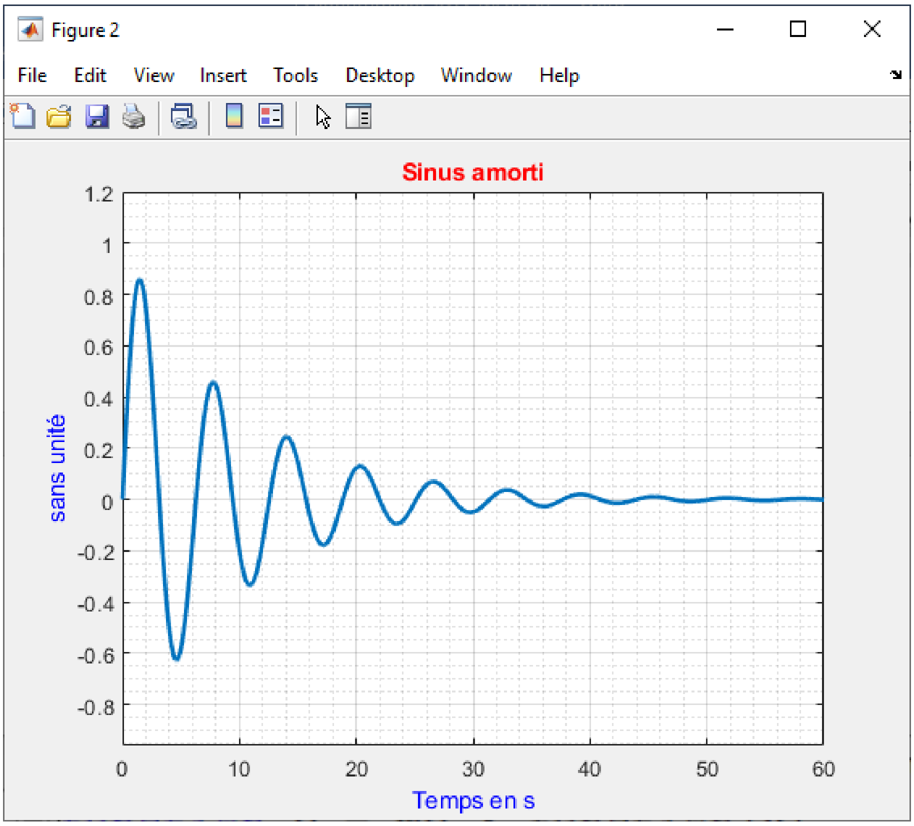


Figure 630 : appel de la fonction my_plot_function

Si l'on souhaite tracer une autre courbe en gardant la même mise en forme, il suffit de modifier l'équation contenu dans **my_3_function** et de faire un nouvel appel à la fonction **my_plot_function**.

Si l'on souhaite tracer : $y(x)=\sin(x).\cos^2(x)$, il faut modifier **my_3_function** (Figure 631).

```
function y = my_3_function(x)
y = sin(x).*cos(x).^2;
end
```

Figure 631 : modification de my_3_function

On fait alors un nouvel appel à **my_plot_function** pour un tracé de la courbe sur l'intervalle **[0;20]** avec **1000 points**.

```
>> my_plot_function(0,20,1000,@my_3_function,'Sinus amorti','Temps en s','sans unité')
```

On obtient alors le graphique de la Figure 632.

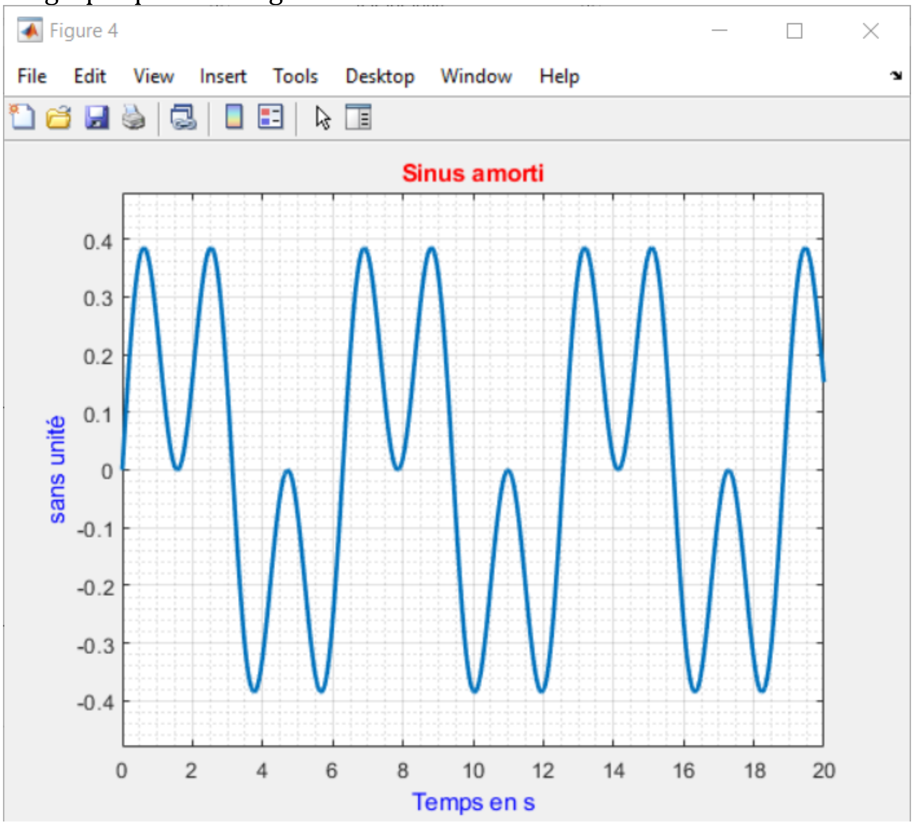


Figure 632 : appel de la fonction my_plot_function

Les mises en forme de la Figure 630 et de la Figure 632 sont strictement identiques et permettent d'uniformiser la présentation tout en accélérant le processus de construction des graphiques.

Il est également possible de créer une fonction ne prenant aucun argument en entrée et ne générant aucune variable en sortie. C'est le cas de **my_4_function** (Figure 633) dont le code est donné Figure 634.

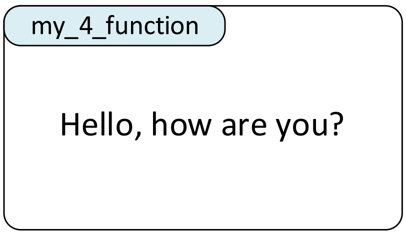


Figure 633 : my_4_function

```
function my_4_function
disp('hello, how are you?')
end
```

Figure 634 : codage de my_4_function

En appelant la fonction dans la fenêtre de commande, on obtient juste l'affichage d'un message.

```
>> my_4_function
hello, how are you?
```

F. Appel d’une fonction à plusieurs arguments

Supposons que l’on veuille trouver les racines du polynôme $y(x) = x^2 - 3$ en utilisant la fonction **my_5_function** (Figure 635) qui donne la définition générale d’un polynôme du second degré. Cette fonction qui prend 4 arguments est codée sur la Figure 636.

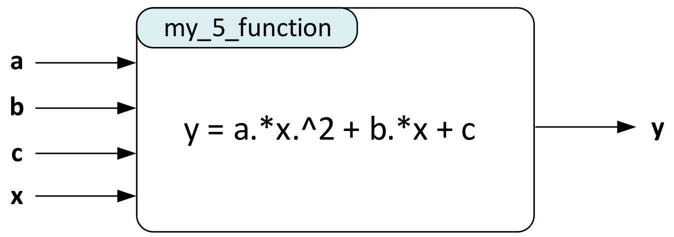


Figure 635 : my_5_function

```
function y = my_5_function(x,a,b,c)
y = a.*x.^2 + b.*x + c;
end
```

Figure 636 : codage de my_5_function

Ouvrir un nouveau script et créer la fonction **my_5_function.**
Sauvegarder cette fonction sous le nom « **my_5_function.m** ».

Nous utiliserons la fonction **fzero (fonction,x0).** La fonction **fzero** (Figure 637) donne la valeur du zéro de la **fonction** qui est donnée en premier argument au voisinage d’une valeur $\mathbf{x_0}$. La valeur de x_0 est donnée en second argument.

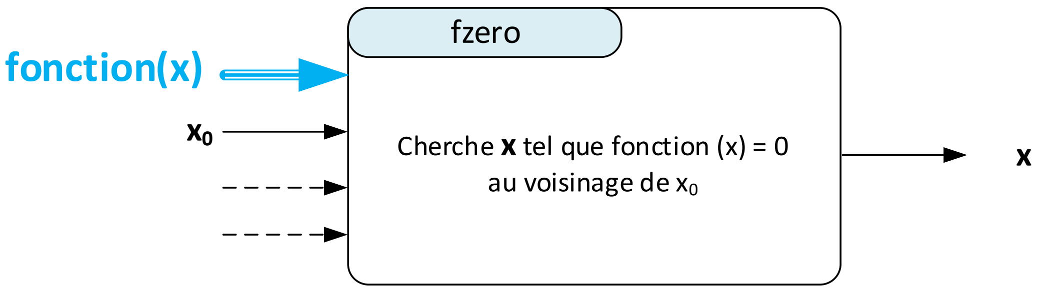


Figure 637 : la fonction fzero

La fonction **fzero** attend en argument une **fonction** à un seul argument (à une seule variable). Or **my_5_function** possède 4 arguments et si rien n’est précisé le calcul ne pourra pas être mené car **fzero** ne pourra pas faire la différence entre ces 4 arguments et ne pourra donc pas trouver la variable.

Il faut donc transformer **my_5_function** en fonction à un seul argument **(x)** en spécifiant tous les autres arguments à une valeur donnée **(a,b,c)**. On utilisera encore le symbole @.

Taper dans la fenêtre de commande les instructions suivantes afin de trouver les racines de $y(x) = x^2 - 3$ au voisinage de x_0=2 et au voisinage de x_0=-2

```
>> racine1 = fzero(@(x)my_5_function(x,1,0,-3),2)

racine1 =

   1.7321

>> racine2 = fzero(@(x)my_5_function(x,1,0,-3),-2)

racine2 =

  -1.7321
```

Le symbole @(x) précise ici que l'unique argument pour la fonction **my_5_function** est la variable x, les autres variables étant fixées à une valeur donnée.

III. Dérivation numérique

A. Aspects théoriques

La Figure 638 montre la courbe représentative de la fonction f(x). La valeur de la dérivée en x_0 de la fonction f(x) notée $f'(x_0)$ est donnée par la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction au point x_0 (repéré 1 sur la figure).

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

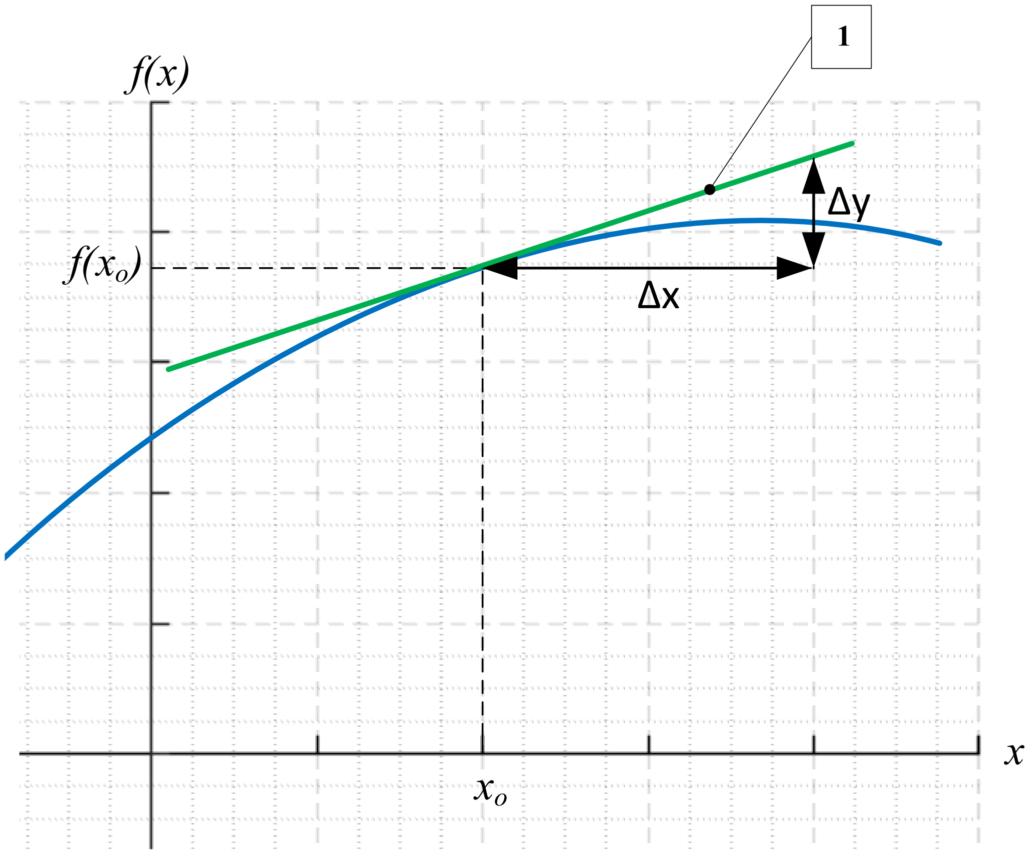


Figure 638 : calcul de la dérivée numérique au point x_0

Afin d'avoir une estimation numérique du coefficient directeur de cette tangente, il est nécessaire de choisir 2 points proches de x_0 et de calculer le coefficient directeur de la droite qui passe par ces deux points. Plusieurs choix sont alors possibles pour initier un processus de dérivation numérique.

1. Différence finie progressive

On choisit les points M_0 et M_+ (Figure 639) pour déterminer le coefficient directeur.

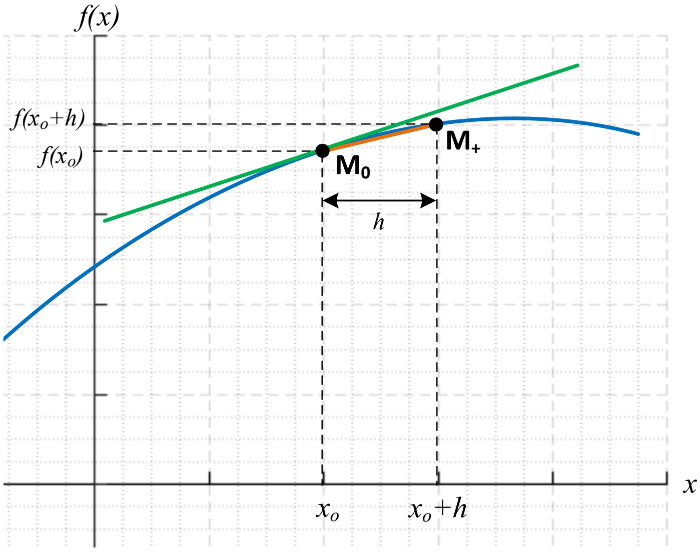


Figure 639 : différence finie progressive

Dans ce cas le coefficient directeur de la droite s'exprime par la formule de différence finie progressive :

$$\boxed{f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \text{ (h tend vers 0)}$$

En faisant tendre h vers 0 on se rapproche du coefficient directeur de la tangente à la courbe en x_0.

2. Différence finie rétrograde

On choisit les points M_- et M_0 (Figure 640) pour déterminer le coefficient directeur.

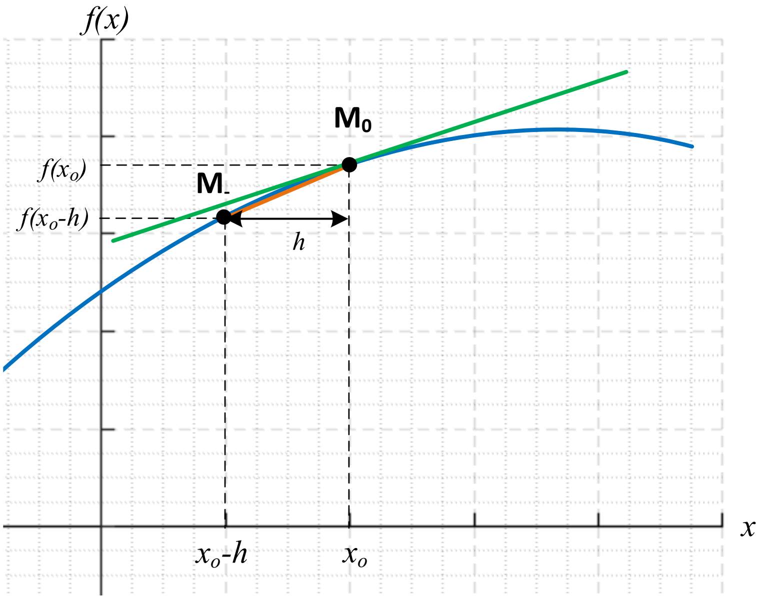


Figure 640 : formule de différence finie rétrograde

Dans ce cas le coefficient directeur de la droite s'exprime par la formule de différence finie rétrograde :

$$\boxed{f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}} \quad \text{(h tend vers 0)}$$

En faisant tendre h vers 0 on se rapproche du coefficient directeur de la tangente à la courbe en x_0.

3. Différence finie centrée

On choisit les points M_1 et M_2 (Figure 641) pour déterminer le coefficient directeur.

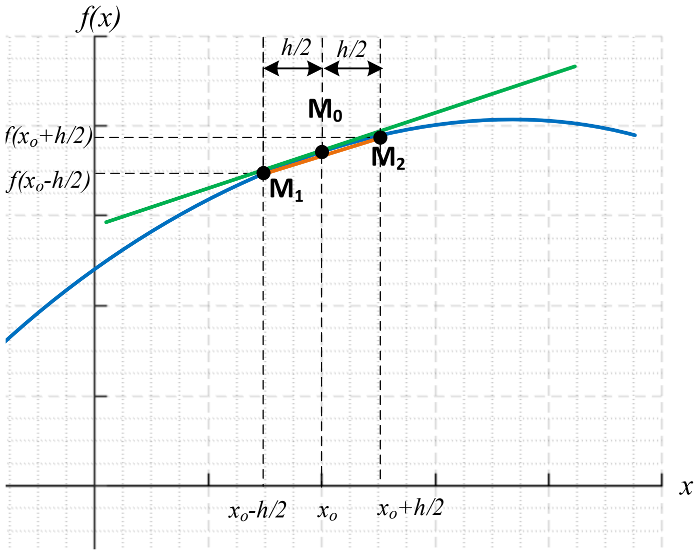


Figure 641 : formule de différence finie centrée

Dans ce cas le coefficient directeur de la droite s'exprime par la formule de différence finie centrée :

$$\boxed{f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \frac{h}{2}) - f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right)}{h}} \quad \text{(h tend vers 0)}$$

En faisant tendre h vers 0 on se rapproche du coefficient directeur de la tangente à la courbe en x_0.

B. Codage en langage MATLAB

Vous pouvez trouver les fichiers de toutes les fonctions présentées dans ce paragraphe dans le dossier **Algorithmique_avec_MATLAB/ Dérivation_numérique.**

L'expression mathématique de la fonction à dériver sera définie dans la fonction **f1.m (**Figure 642). Cette expression peut être modifiée pour tester toutes les fonctions souhaitées. Il faudra juste vérifier que lors de l'appelle de la fonction l'intervalle d'étude [a ; b] appartienne bien au domaine de définition de la fonction.

```
%% f1.m
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% f1.m contient l'expression mathématique de la fonction à dériver
%%
function y = f1(x)
y = sin(x);
end
```

Figure 642 : codage de la fonction f1 qui contient l'expression de la fonction à dériver

1. Différence finie progressive

Pour calculer la dérivée numérique en utilisant la méthode de la différence fine progressive, nous allons créer la fonction **fderiv_forward** (a,b,nb_points,f) (Figure 643).

Cette fonction prendra en arguments :
a : borne inférieure de l'intervalle d'étude
b : borne supérieur de l'intervalle d'étude
nb_points : nombre de points à calculer
f : fonction à dériver

La fonction aura comme sorties :
t : vecteur contenant les instants correspondant aux points ou la dérivée est calculée
df : vecteur contenant les valeurs de la dérivée numérique au différents instants

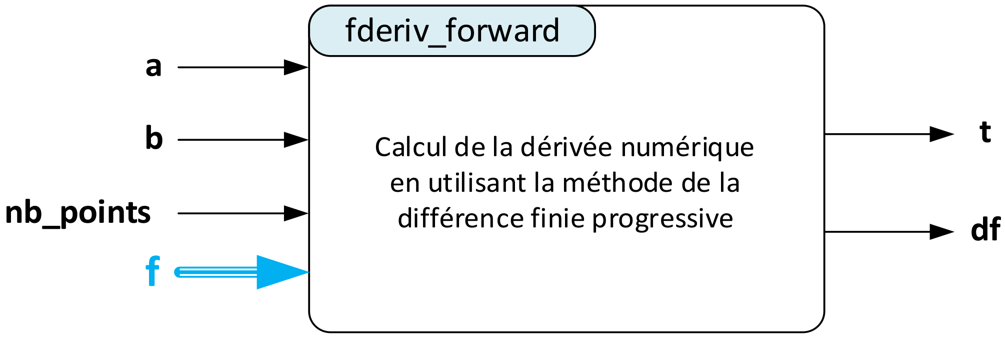


Figure 643 : fonction fderiv_forward (a,b,nb_point,f)

Afin de pouvoir tracer **df** en fonction de **t**, les deux vecteurs doivent contenir le même nombre d'éléments. Par construction de notre algorithme, le vecteur **t** possède une composante de plus que le vecteur **df**. Il faudra donc supprimer la dernière composante du vecteur **t**.

L'objectif sera de comparer les erreurs effectuées lors de l'utilisation des différentes méthodes de dérivation numérique. Afin de pouvoir effectuer cette comparaison, nous devons prendre quelques précautions quant à la génération des sorties des différentes fonctions.

Pour la méthode de différence finie progressive : il n'est pas possible de calculer **df** pour le dernier point de l'intervalle [a ; b] correspondant à **t = b**. Il faudrait pour cela la valeur de la fonction en **t = b + h** (en dehors de l'intervalle d'étude)
Pour la méthode de différence finie rétrograde : il n'est pas possible de calculer **df** pour le premier point de l'intervalle [a ; b] correspondant à **t = a**. Il faudrait pour cela la valeur de la fonction en **t = a - h** (en dehors de l'intervalle d'étude)
Pour la méthode de différence finie centrée : il n'est pas possible de calculer **df** pour le premier point de de l'intervalle [a ; b] correspondant à **t = a** et pour le dernier point de l'intervalle [a ; b] correspondant à **t = b**. Il faudrait pour cela la valeur de la fonction en **t = a – h/2** et en **t = b + h/2** (en dehors de l'intervalle d'étude)

Afin de pouvoir comparer les trois méthodes de dérivation, nous choisirons de travailler avec le même vecteur t pour les trois types de dérivation soit t ∈ [a+h ; b-h]. Par construction de nos algorithmes, le dernier point calculé correspondra à **t = b - h** . Le premier point correspondant à **t = a** devra être systématiquement supprimé afin de rendre la comparaison possible.

La Figure 644 montre le codage de la fonction **fderiv_forward** (a,b,nb_points,f).

```
%% [t,df] = fderiv_forward(a,b,nb_points,f)
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Calcul la dérivée numérique de la fonction f sur l'intervalle [a;b] en
% prenant nb_points pour le calcul
% La méthode est celle de la différence finie progressive

%%
function [t,df] = fderiv_forward(a,b,nb_points,f)
% calcul du pas h
h = (b-a)/nb_points;

% défintion du vecteur t
t = [a:h:b];

% calcul de la dérivée en chaque point
for k = 1:1:nb_points
    df(k) = (f(t(k+1))-f(t(k)))/h;
end

% suppression du dernier élément du vecteur t afin d'égaliser le nombre de composantes des
deux vecteurs
t(end)= [];

% suppression du premier point pour éviter les effets de
% bords
df(1) = [];
t(1) = [];
end
```

Figure 644 : codage de la fonction fderiv_forward (a,b,nb_point,f)

2. Différence finie rétrograde

Pour calculer la dérivée numérique en utilisant la méthode de la différence fine rétrograde, nous allons créer la fonction **fderiv_backward** (a,b,nb_points,f) (Figure 645).

Cette fonction prendra en arguments :

a : borne inférieure de l'intervalle d'étude
b : borne supérieur de l'intervalle d'étude
nb_points : nombre de points à calculer
f : fonction à dériver

La fonction aura comme sorties :
t : vecteur contenant les instants correspondant aux points ou la dérivée est calculée
df : vecteur contenant les valeurs de la dérivée numérique au différents instants

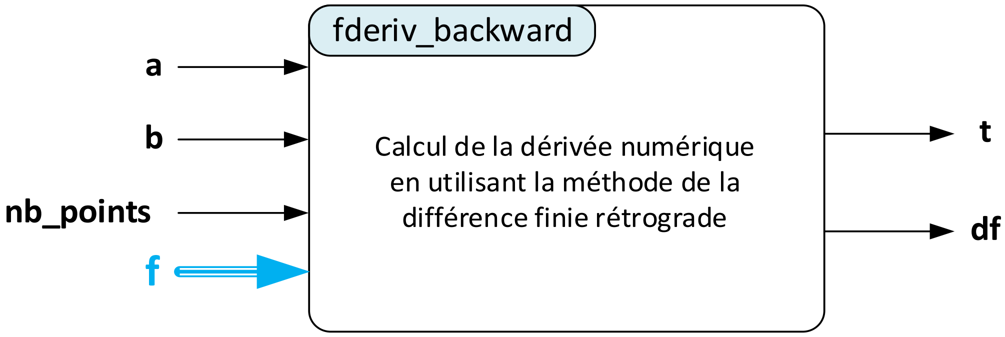


Figure 645 : fonction fderiv_backward (a,b,nb_point,f)

Afin de pouvoir tracer **df** en fonction de **t**, les deux vecteurs doivent contenir le même nombre d'éléments. Par construction de notre algorithme, le vecteur **t** possède une composante de plus que le vecteur **df**. Il faudra donc supprimer la dernière composante du vecteur **t**.

Comme expliqué précédemment nous exploiterons **t** et **df** sur l'intervalle t ∈ [a+h ; b-h]. Le premier point correspondant à **t = a** sera supprimé afin de rendre la comparaison entre les différentes méthodes de dérivation significative.

La Figure 646 montre le codage de la fonction **fderiv_backward** (a,b,nb_points,f).

```
%% [t,df] = fderiv_backward(a,b,nb_points,f)
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Calcul la dérivée numérique de la fonction f sur l'intervalle [a;b] en
% prenant nb_points pour le calcul
% La méthode est celle de la différence finie rétrograde
%%
function [t,df] = fderiv_backward(a,b,nb_points,f)

% calcul du pas h
h = (b-a)/nb_points;

% défintion du vecteur t
t = [a:h:b];

% calcul de la dérivée en chaque point
for k = 2:1:nb_points;
    df(k) = (f(t(k))-f(t(k-1)))/h;
end

% suppression du dernier élément du vecteur t afin d'égaliser le nombre de composantes des
deux vecteurs
t(end)= [];

% suppression du premier point pour éviter les effets de
% bords
df(1) = [];
t(1) = [];
```

```
end
```

Figure 646 : codage de la fonction fderiv_backward (a,b,nb_point,f)

3. Différence finie centrée

Pour calculer la dérivée numérique en utilisant la méthode de la différence finie centrée, nous allons créer la fonction **fderiv_center** (a,b,nb_points,f) (Figure 647).

Cette fonction prendra en arguments :

- **a** : borne inférieure de l'intervalle d'étude
- **b** : borne supérieur de l'intervalle d'étude
- **nb**_points : nombre de points à calculer
- **f** : fonction à dériver

La fonction aura comme sorties :

- **t** : vecteur contenant les instants correspondant aux points ou la dérivée est calculée
- **df** : vecteur contenant les valeurs de la dérivée numérique au différents instants

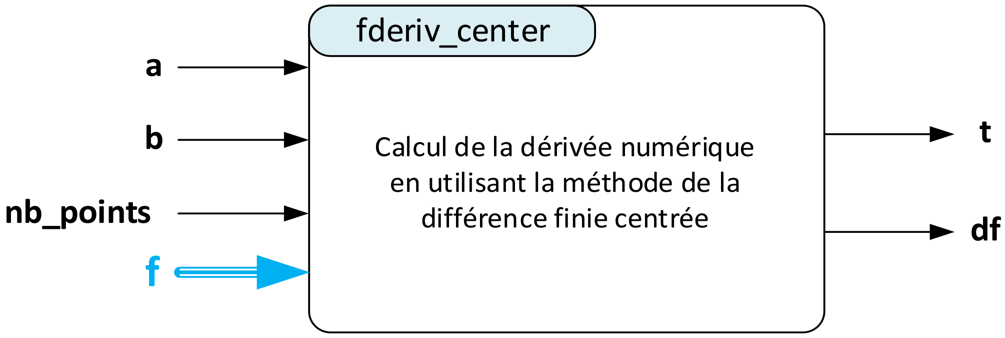


Figure 647 : fonction fderiv_center (a,b,nb_point,f)

Afin de pouvoir tracer **df** en fonction de **t**, les deux vecteurs doivent contenir le même nombre d'éléments. Par construction de notre algorithme, le vecteur **t** possède une composante de plus que le vecteur **df**. Il faudra donc supprimer la dernière composante du vecteur **t**.

Comme expliqué précédemment nous exploiterons **t** et **df** sur l'intervalle t ∈ [a+h ; b-h]. Le premier point correspondant à **t = a** sera supprimé afin de rendre la comparaison entre les différentes méthodes de dérivation significative.

La Figure 648 montre le codage de la fonction **fderiv_center** (a,b,nb_points,f).

```
%% [t,df] = fderiv_center(a,b,nb_points,f)
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Calcul la dérivée numérique de la fonction f sur l'intervalle [a;b] en
% prenant nb_points pour le calcul
% La méthode est celle de la différence finie centrée

%%
function [t,df] = fderiv_center(a,b,nb_points,f)

% calcul du pas h
h = (b-a)/nb_points;

% défintion du vecteur t
t = [a:h:b];
```

```
% calcul de la dérivée en chaque point
for k = 2:1:nb_points
    df(k) = (f(t(k)+h/2)-f(t(k)-h/2))/h;
end
% suppression du dernier élément du vecteur t afin d'égaliser le nombre de composantes des
deux vecteurs
t(end)= [];

% suppression du premier point pour éviter les effets de
% bords
df(1) = [];
t(1) = [];
end
```

Figure 648 : codage de la fonction fderiv_center (a,b,nb_point,f)

4. Calcul exact de la fonction dérivée en utilisant le calcul symbolique

Afin de pouvoir évaluer l'erreur induite par les différentes méthodes de dérivation numérique, nous allons créer une fonction **fderiv_ana_symbolique** (a,b,nb_points,f) qui calcule la dérivée analytique exacte d'une fonction en calcul symbolique (Figure 649). Cette dérivée constituera la référence pour calculer l'erreur.

Cette fonction prendra en arguments :
a : borne inférieure de l'intervalle d'étude
b : borne supérieur de l'intervalle d'étude
nb_points : nombre de points à calculer
f : fonction à dériver

La fonction aura comme sorties :
t : vecteur contenant les instants correspondant aux points ou la dérivée est calculée
df : vecteur contenant les valeurs de la dérivée numérique au différents instants

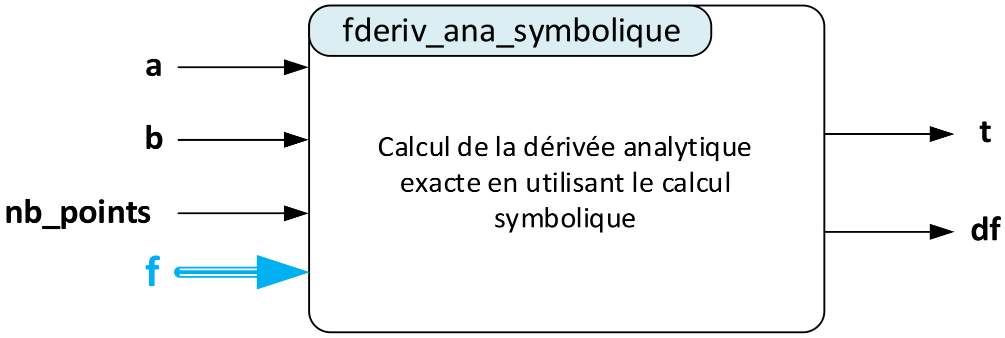


Figure 649 : fonction fderiv_ana_symbolique (a,b,nb_point,f)

Comme expliqué précédemment nous exploiterons **t** et **df** sur l'intervalle t ∈ [a+h ; b-h]. Il faudra donc supprimer le premier et le dernier point pour pouvoir effectuer la comparaison avec les autres méthodes de dérivation.

La Figure 650 montre le codage de la fonction **fderiv_ana_symbolique** (a,b,nb_points,f).

```
%% [t,df] = fderiv_anasymbolique(a,b,nb_points,f)
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Calcul de la dérivée analytique exacte d'une fonction en utilisant le calcul
% symbolique
function [t,df]=fderiv_ana_symbolique(a,b,nb_points,f)
h = (b-a)/nb_points;
```

```
t = [a:h:b];
% x est déclarée comme variable symbolique
syms x;

% création de la fonction symbolique f_symbolique à partir de f(x)
f_symbolique(x) = f(x);

% dérivation de la fonction f_symbolique pour créer la fonction dérivée
% symbolique
df_symbolique(x) = diff(f_symbolique,x);

% calcul des valeurs du vecteur df qui contient les valeurs de la dérivée
% calculée analytiquement
df = df_symbolique(t);

% conversion du vecteur df en double précision
df = double(df);

df(1) = [];
t(1) = [];
df(end) = [];
t(end) = [];
end
```

Figure 650 : codage de la fonction fderiv_ana_symbolique (a,b,nb_point,f)

C. Exploitation de l'algorithme

1. Comparaison des différentes méthodes de dérivation numérique

Afin d'évaluer les écarts entre les différentes méthodes de dérivation numériques et la dérivée analytique calculée en calcul symbolique, nous allons créer un premier script qui va tracer ces 4 courbes dans la même fenêtre graphique, puis quantifier et tracer l'amplitude comparée de ces écarts.

Ouvrir le script **num_deriv_plot_comparaison.m**.

Le script est structuré en trois sections (Figure 651) :

- Définition de l'intervalle d'étude de la fonction [a ;b] et du nombre de points **nb_points** à calculer pour tracer les courbes
- Appel des différentes fonctions et tracé des différentes courbes sur la même fenêtre graphique
- Evaluation des écarts entre la dérivée analytique et les trois méthodes de dérivation numérique et tracé des écarts sur la même fenêtre graphique

```
%% num_deriv_plot_comparison
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
%% Calcul de la dérivée numérique d'une fonction en utilisant différentes
% méthodes de calcul:
% - différence finie centrée
% - différence finie rétrograde
% - différence finie progressive
% Une comparaison est effectuée avec le calcul de la dérivée théorique
% exacte effectuée en calcul symbolique
% Toutes les courbes sont placées sur le même graphiques afin de pouvoir
% évaluer visuellement les erreurs dues au processus de dérivation
% numérique
% Il est possible de faire varier l'intervalle [a;b] d'étude de la fonction
% et le nombre de points nb_points que l'on souhaitent pour effectuer le
% calcul
% La fonction à dériver est stockée dans la fonction f1.m
%% Script
```

```
% définition de l'intervalle d'étude  [a;b] de la fonction considérée
a = 0;
b = 10;

% définition du nombre de point à utiliser pour le calcul
nb_points = 40;

%% Calcul et tracé de la dérivée numérique avec les différentes méthode

% création et positionnement de la fenêtre graphique
 figure('Units','centimeters','Position',[2 8 18 12]);

grid on; grid minor; hold on;

 % calcul et tracé de la dérivée exacte en calcul symbolique
[t_ana_symbolique,df_num_ana_symbolique] = fderiv_ana_symbolique(a,b,nb_points,@f1);
plot(t_ana_symbolique,df_num_ana_symbolique,'red','LineWidth',2);

% calcul  et tracé de la dérivée avec différence finie centrée
[t_center,df_num_center] = fderiv_center(a,b,nb_points,@f1);
plot(t_center,df_num_center,'green','LineWidth',2);

% calcul et tracé de la dérivée avec différence finie progressive
[t_forward,df_num_forward] = fderiv_forward(a,b,nb_points,@f1);
plot(t_forward,df_num_forward,'blue','LineWidth',2);

% calcul et tracé de la dérivée avec différence finie retrograde
[t_backward,df_num_backward] = fderiv_backward(a,b,nb_points,@f1);
plot(t_backward,df_num_backward,'cyan','LineWidth',1);

% titre et légende
title({'Comparaison des méthodes de dérivation numérique';...
    ' de la fonction f1'});

legend('dérivée analytique','différence finie centrée',...
    'différence finie progressive','différence fine rétrograde')
xlim([a b]);

%% Calcul des différents écarts en prenant comme référence la dérivée
% exacte déterminée en calcul symbolique

error_center = df_num_ana_symbolique - df_num_center;
error_forward = df_num_ana_symbolique - df_num_forward;
error_backward = df_num_ana_symbolique - df_num_backward;

 % création du vecteur des abscisses
t = [a:(b-a)/nb_points:b];
t(1) = [];
t(end) = [];

% création et positionnement de la fenêtre graphique

figure('Units','centimeters','Position',[22 8 18 12]);
hold on; grid on; grid minor;

% tracé des différents écarts

plot(t,error_center,'green','LineWidth',2)
plot(t,error_forward,'blue','LineWidth',2)
plot(t,error_backward,'cyan','LineWidth',2)

% titre et légende

title({'Erreurs comparées des différentes méthodes de dérivation numérique';...
    'par rapport à la dérivée analytique'});

legend('différence finie centrée','différence finie progressive',...
    'différence fine rétrograde')
```

```
xlim([a b]);
```

Figure 651 : comparaison des différentes méthodes de dérivation numérique

Dans un premier temps le script sera exécuté sur l'intervalle [0 ;10] avec 40 points calculés. La fonction définie dans **f1.m** est la fonction f(x) = sin(x). Cette fonction peut-être modifiée par l'utilisateur.

L'exécution du script permet de visualiser les résultats du calcul numérique de la dérivée avec les différentes méthodes de calcul (Figure 652, Figure 653 et Figure 654).

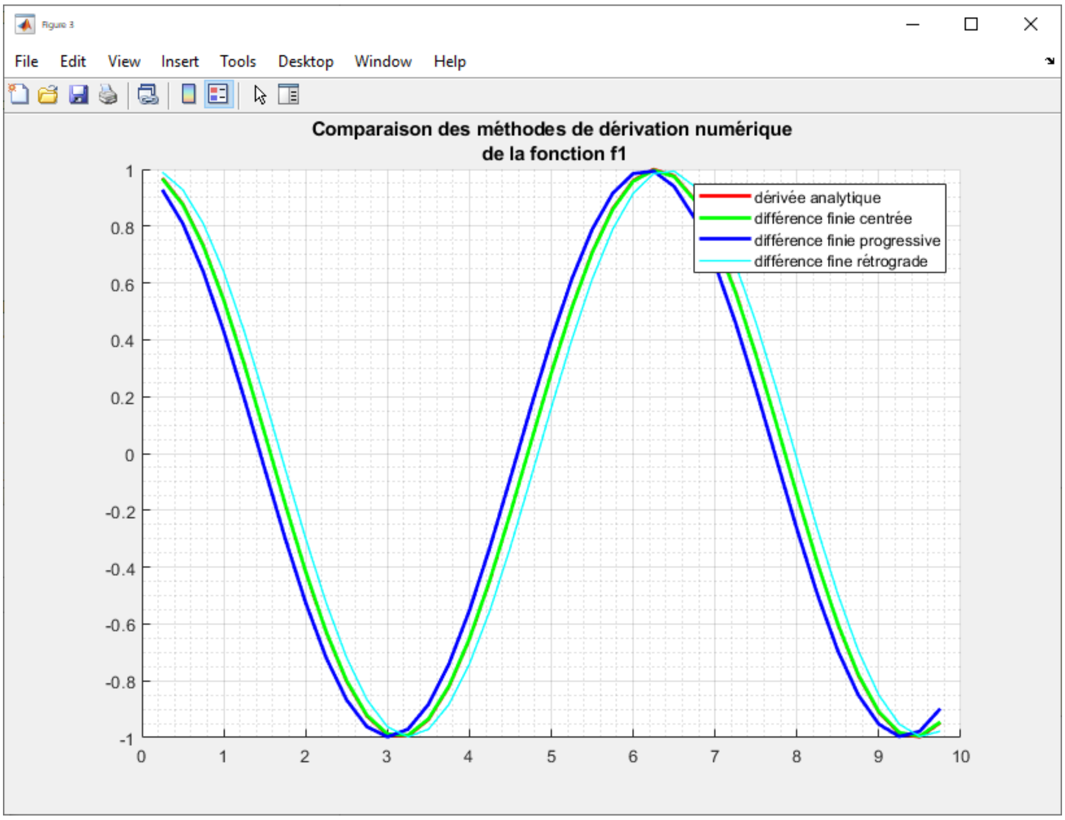


Figure 652 : comparaison des différentes méthodes de dérivation numérique

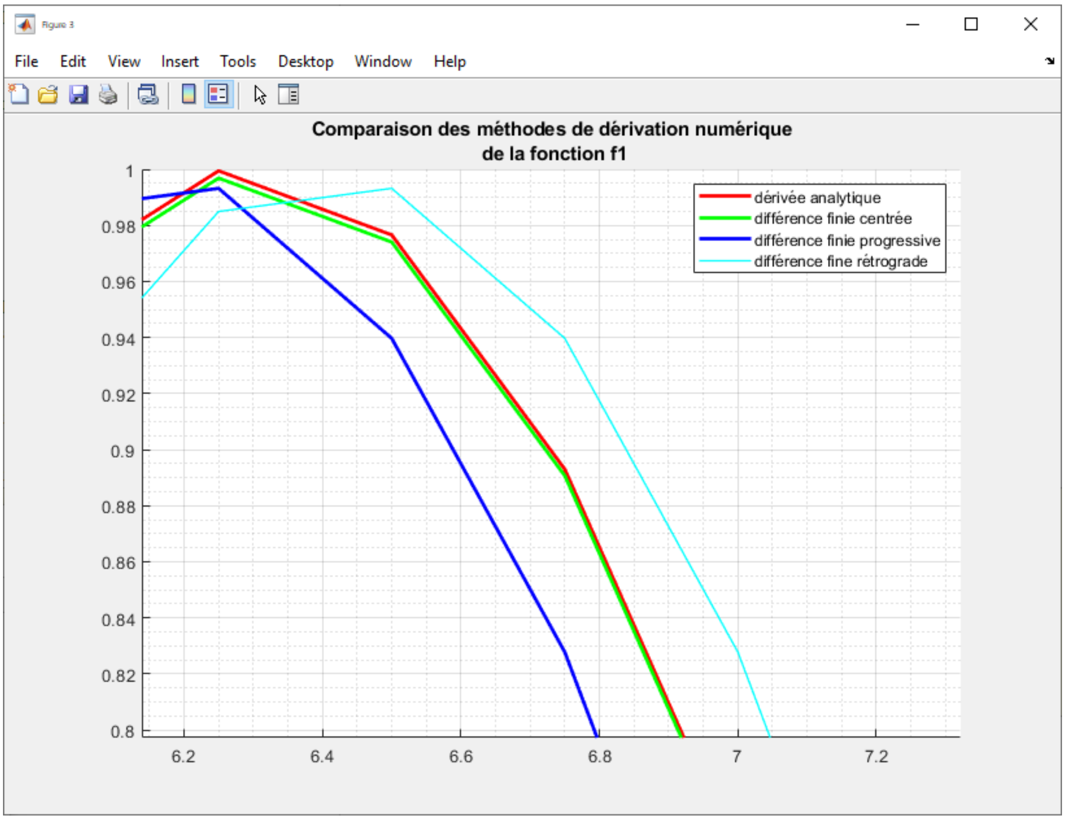


Figure 653 : zoom sur la courbe

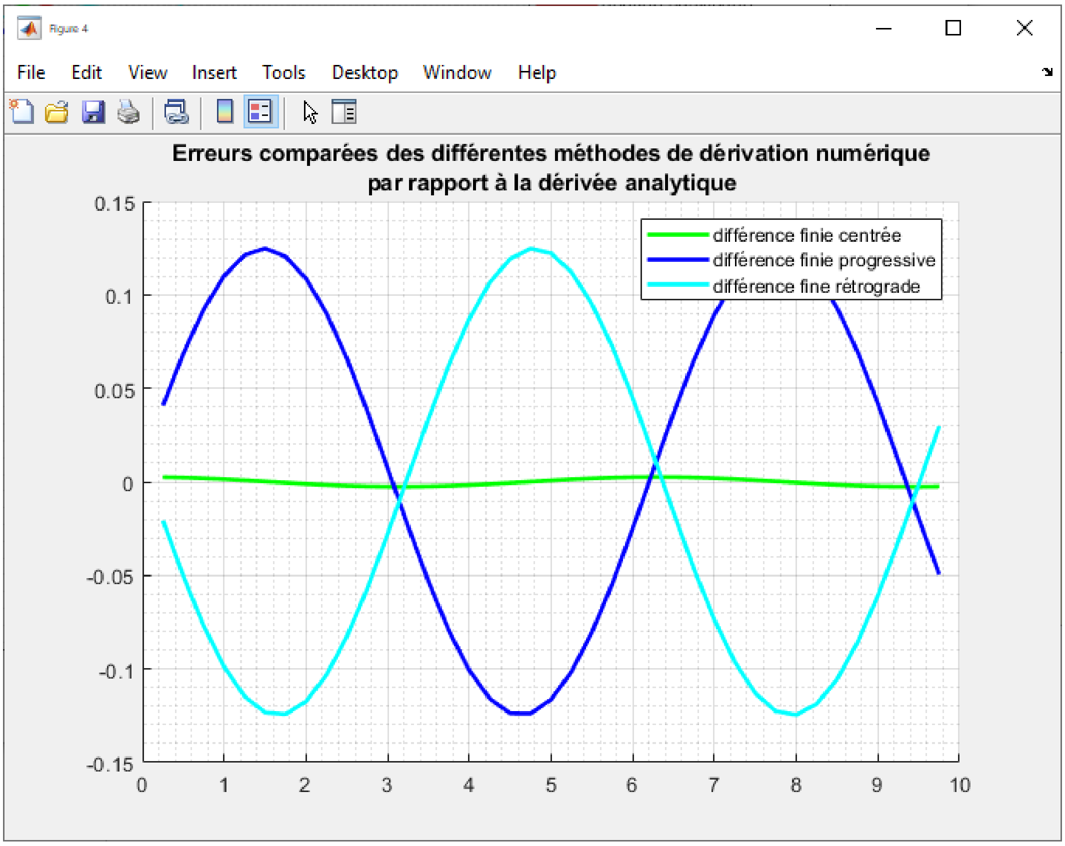


Figure 654 : visualisation des erreurs induites par les différentes méthodes de dérivation numérique

L'analyse des différents courbes nous permet de dégager les tendances suivantes :

- La différence finie progressive est en avance sur la dérivée théorique exacte
- La différence finie rétrograde est en retard sur la dérivée théorique exacte
- Les erreurs induites par les méthodes de différences finies progressive et rétrograde semblent être du même ordre de grandeur
- L'erreur induite par la méthode de différence finie centrée semble significativement plus faible

2. Quantification et visualisation de l'erreur induite par les différentes méthodes

Il serait utile d'avoir une idée de l'évolution de cette erreur en fonction du nombre de point calculés et donc en fonction du pas $h = \frac{b-a}{nb\_\text{points}}$.

Pour cela ouvrir le script **num_deriv_plot_comparaison_subplot.m**.

Ce script permet de tracer 4 courbes avec un nombre de points calculés différents pour chaque courbe et de voir ainsi l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de points et du pas h choisi pour le calcul. Les 4 courbes correspondent à 4 valeurs du nombre de points calculés choisis équitablement réparties entre les variables **nb_points_min** et **nb_points_max** définies en début de script.

Le script est structuré en deux sections (Figure 655):

- Définition de l'intervalle d'étude de la fonction [a ;b] et du nombre de points **nb_points_min** et **nb_points_max**
- Appel des différentes fonctions et tracé des différentes courbes sur 4 fenêtres graphiques différentes

```
%% num_deriv_plot_comparison_subplot
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
%
% Calcul de la dérivée numérique d'une fonction en utilisant différentes
% methodes de calcul:
% - différence finie centrée
% - différence finie rétrograde
% - différence finie progressive
% Une comparaison est effectuée avec le calcul de la dérivée théorique
% exacte effectuée en calcul symbolique
% Il est possible de faire varier l'intervalle [a;b] d'étude de la fonction
% Représentation de 4 courbes correspondant à 4 valeurs du nombres de
% points calculés choisies équitablement réparties entre nb_points_min et
% nb_points_max
% La fonction à dériver est stockée dans la fonction f1.m
%% Script
% définition de l'intervalle d'étude  [a;b] de la fonction considérée
a = 0;
b = 10;

% spécification des nombres de points mini et maxi
nb_points_min = 10;
nb_points_max = 50;
pas = round((nb_points_max - nb_points_min) / 3);
%%
fig = figure('Units','centimeters','Position',[2 5 35 25]);
set(fig,'Color','white');
sgtitle({'Comparaison des différentes méthodes de dérivation numérique';...
    ' de la fonction f1 en fonction du nombre de points calculés'});

% initialisation du compteur de boucle
```

```
k = 1;

for nb_points = nb_points_min : pas : nb_points_max;

subplot(2,2,k); hold on; grid on; grid minor;

% calcul et tracé de la dérivée exacte en calcul symbolique
[t_ana_symbolique,df_num_ana_symbolique] = fderiv_ana_symbolique(a,b,nb_points,@f1);
plot(t_ana_symbolique,df_num_ana_symbolique,'red','LineWidth',2);

% calcul  et tracé de la dérivée avec différence finie centrée
[t_center,df_num_center] = fderiv_center(a,b,nb_points,@f1);
plot(t_center,df_num_center,'green','LineWidth',2);

% calcul et tracé de la dérivée avec différence finie progressive
[t_forward,df_num_forward] = fderiv_forward(a,b,nb_points,@f1);
plot(t_forward,df_num_forward,'blue','LineWidth',2);

% calcul et tracé de la dérivée avec différence finie retrograde
[t_backward,df_num_backward] = fderiv_backward(a,b,nb_points,@f1);
plot(t_backward,df_num_backward,'cyan','LineWidth',1);

% legend('dérivée analytique','différence finie centrée',...
%     'différence finie progressive','différence fine rétrograde');

title('Nombre de points calculés  ' + string(nb_points))
k = k + 1;
end

% spécification de la légende générale du graphique
leg = legend('dérivée analytique','différence finie centrée',...
    'différence finie progressive','différence fine rétrograde');

% Positionnement de la légende au centre du graphique
newPosition = [0.45 0.47 0.1 0.07];
newUnits = 'normalized';
set(leg,'Position', newPosition,'Units', newUnits);
```

Figure 655 : script permettant de visualiser l'influence du pas

L'exécution du script permet de visualiser l'influence du pas sur l'allure des courbes (Figure 656).

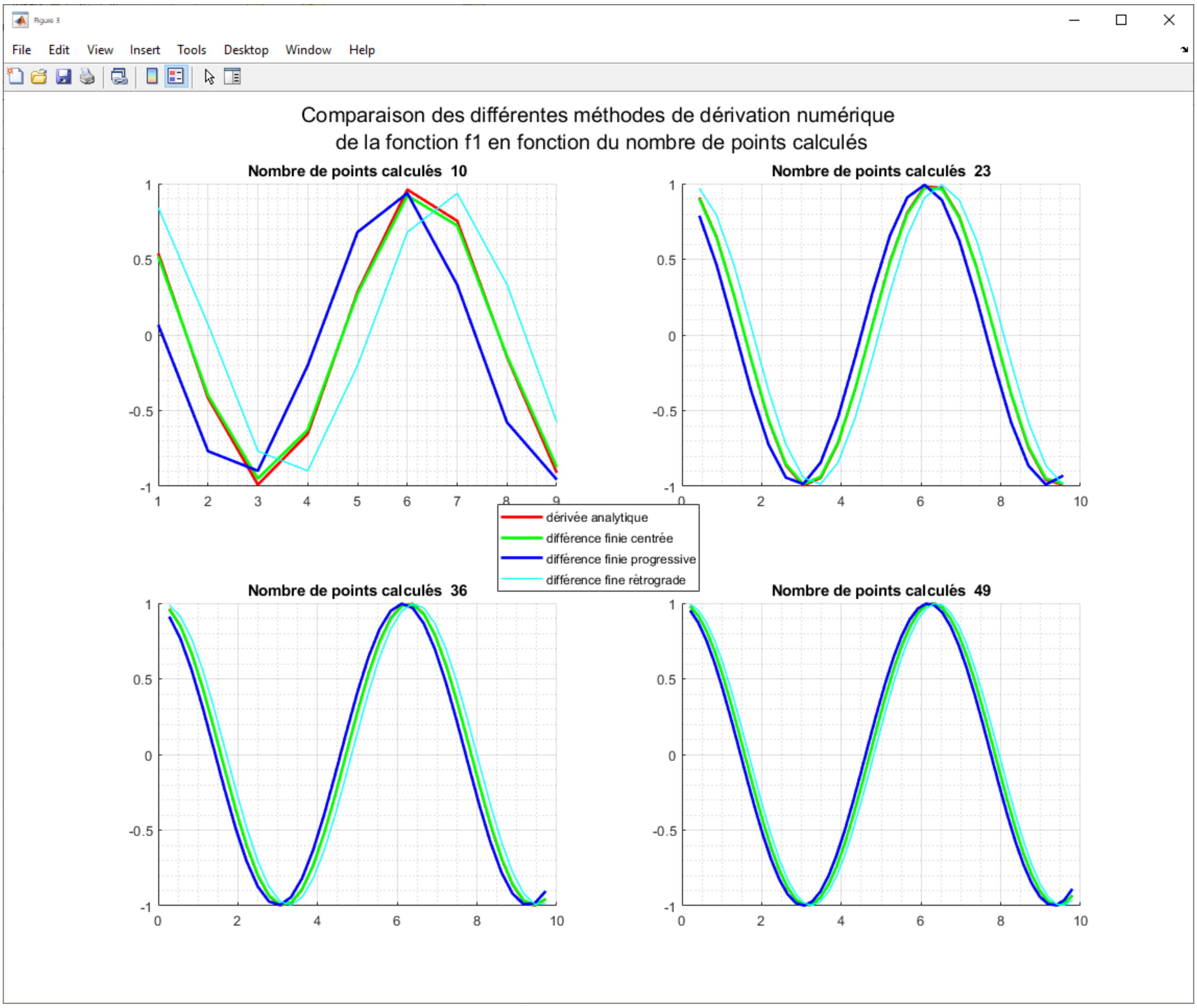


Figure 656 : influence du pas sur l'allure des courbes

L'analyse de ces courbes nous confirme que l'erreur va diminuer avec le pas mais ne nous permet pas de connaître la loi d'évolution de cette erreur en fonction du pas h. Lors de l'utilisation d'un processus de dérivation numérique, il est important de déterminer cette loi d'évolution.

3. Détermination de la loi d'évolution de l'erreur en fonction du pas

Pour connaître la loi d'évolution de cette erreur, il suffit de se placer en un point x_0 arbitraire de l'intervalle et de calculer l'erreur pour différentes valeurs du pas h.
L'erreur en fonction du pas h se définie de la manière suivante :

- Pour la différence finie progressive :

$$f_{err\_forward}(h) = \left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right|$$

- Pour la différence finie rétrograde :

$$f_{err\_backward}(h) = \left| f'(x_0) - \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} \right|$$

- Pour la différence finie centrée :

$$f_{err\_center}(h)=\left|f'(x_0)-\frac{f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)}{h}\right|$$

L'utilisation de la formule de Taylor pourrait nous permettre de trouver la forme mathématique de ces fonctions erreurs. L'objectif ici est plutôt d'exploiter notre algorithme et les capacités de calcul de MATLAB afin de déterminer cette forme.
Pour cela nous allons construire un script qui se placera arbitrairement au centre de notre intervalle d'étude et qui va tracer automatiquement l'erreur en fonction du pas h. Le script contient une boucle qui calculera les différentes fonctions erreurs pour un nombre de points allant de 100 à 1000 avec un incrément de 100. Le pas h est défini par $h=\dfrac{b-a}{nb\_\text{points}}$.
La boucle permettra donc de calculer 10 valeurs de l'erreur au point x_0 pour chacune des trois méthodes de dérivation numérique. Le script permet ensuite d'interpoler les points calculés avec une fonction polynomiale adaptée pour trouver l'ordre de variation des fonctions erreurs.

Ouvrir le script **num_deriv_plot_error.m** (Figure 657).

```
%% num_deriv_plot_error
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
%
% Calcul de la forme mathémathique de l'erreur effectuée lors des
% opérations de dérivation numériques pour différentes méthodes de calcul:
% - différence finie centrée
% - différence finie rétrograde
% - différence finie progressive
% Une comparaison est effectuée avec le calcul de la dérivée théorique
% exacte effectuée en calcul symbolique
%
% On se place arbitrairement au centre de l'intervalle d'étude de la
% fonction en un point x0 afin d'évaluer l'erreur en ce point pour
% différentes valeurs de h
% et du nombre de points de calcul
% on utilise ensuite une interpolation polynômiale pour déterminer la forme
% mathématique de l'erreur en fonction de h
% La fonction à dériver est stockée dans la fonction f1.m

%% Script
% définition de l'intervalle d'étude [a;b] de la fonction considérée
a = 0;
b = 10;

% initialisation du compteur qui servira d'indice
k = 1;

%% On définit ici une boucle qui permettra de calculer l'erreur pour un
% échantillon de points allant de 100 points jusqu'à 1000 points par pas
% de 100 pour toutes les méthodes de dérivation

for nb_points = 100:100:1000

% calcul de la dérivée exacte en utilisant le calcul symbolique
[t_ana_symbolique,df_num_ana_symbolique] = fderiv_ana_symbolique(a,b,nb_points,@f1);

% calcul de la dérivée avec différence finie centrée
[t_center,df_num_center] = fderiv_center(a,b,nb_points,@f1);

% calcul  et tracé de la dérivée avec différence finie rétrograde
```

```
[t_backward,df_num_backward] = fderiv_backward(a,b,nb_points,@f1);

% calcul  et tracé de la dérivée avec différence finie progressive
[t_forward,df_num_forward] = fderiv_forward(a,b,nb_points,@f1);

% calcul des erreurs au point x0, milieu de l'intervalle d'étude en prenant
% comme référence la dérivée exacte déterminée en calcul symbolique
x0 = round(nb_points/2);
error_f_center_h(k) = df_num_ana_symbolique(x0) - df_num_center(x0);
error_f_forward_h(k) = df_num_ana_symbolique(x0) - df_num_forward(x0);
error_f_backward_h(k) = df_num_ana_symbolique(x0) - df_num_backward(x0);

% détermination de la valeur du pas h(k) pour l'itération en cours
h(k) = (b-a)/nb_points;

% incrémentation de k
k = k + 1;
end



%% Tracé et interpolation de l'erreur pour la différence finie centrée
% Création d'une nouvelle figure pour les graphiques
figure('Units','centimeters','Position',[2 8 18 12]);
hold all;grid on; grid minor;
plot(h,error_f_center_h,'sm','MarkerSize',10,'LineWidth',2);

% Calcul des coefficients du polynôme d'interpolation
coeff_poly_inter_center = polyfit (h,error_f_center_h,2);

% Tracé du polynôme d'interpolation
t = linspace(0,h(1),100);
poly_inter_center = polyval(coeff_poly_inter_center,t);
plot(t,poly_inter_center,'LineWidth',2);

% Ecriture de la légende
legend('différence finie centrée',...
     string(coeff_poly_inter_center(3)) + '  h^2 + ' ...
     + string(coeff_poly_inter_center(2)) + '  h + ' ...
     + string(coeff_poly_inter_center(1)),...
     'Location','northwest','FontSize',12);

% Ecriture du titre et des étiquettes des axes
title({'Variation de l''erreur en fonction du pas h' ;...
    'pour la différence finie centrée'});

xlabel('pas h');
ylabel('erreur');

%% Tracé et interpolation de l'erreur pour la différence finie progressive
figure('Units','centimeters','Position',[22 8 18 12]);
hold all;grid on; grid minor;
plot(h,error_f_forward_h,'sb','MarkerSize',10,'LineWidth',2)

% Détermination du polynome d'interpolation pour la différence finie
% progressive

% Calcul des coefficients du polynôme d'interpolation
coeff_poly_inter_forward = polyfit (h,error_f_forward_h,1);

% Tracé du polynôme d'interpolation
t = linspace(0,h(1),100);
poly_inter_forward = polyval(coeff_poly_inter_forward,t);
plot(t,poly_inter_forward,'LineWidth',2);

%% Tracé et interpolation de l'erreur pour la différence finie rétrograde
plot(h,error_f_backward_h,'og','MarkerSize',10,'LineWidth',2)
```

```
% Détermination du polynôme d'interpolation pour la différence finie
% rétrograde

% Calcul des coefficients du polynôme d'interpolation
coeff_poly_inter_backward = polyfit (h,error_f_backward_h,1);

% Tracé du polynôme d'interpolation
t = linspace(0,h(1),100);
poly_inter_backward = polyval(coeff_poly_inter_backward,t);
plot(t,poly_inter_backward,'LineWidth',2);

% écriture de la légende
legend('différence finie progressive',...
       string(coeff_poly_inter_forward(1)) + '  h + ' ...
     + string(coeff_poly_inter_forward(2)) ,...
       'différence finie rétrograde',...
     string(coeff_poly_inter_backward(1)) + '  h + ' ...
     + string(coeff_poly_inter_backward(2)),...
     'Location','northwest','FontSize',12);

% titre et étiquette des axes
title({'Variation de l''erreur en fonction du pas h' ;...
    'pour les différences finies progressive et retrograde'});

xlabel('pas h');
ylabel('erreur');
```

Figure 657 : script permettant de connaître l'ordre de variation des fonctions erreurs

Exécutez le script et analyser les courbes obtenues sur la Figure 658 et sur la Figure 659.

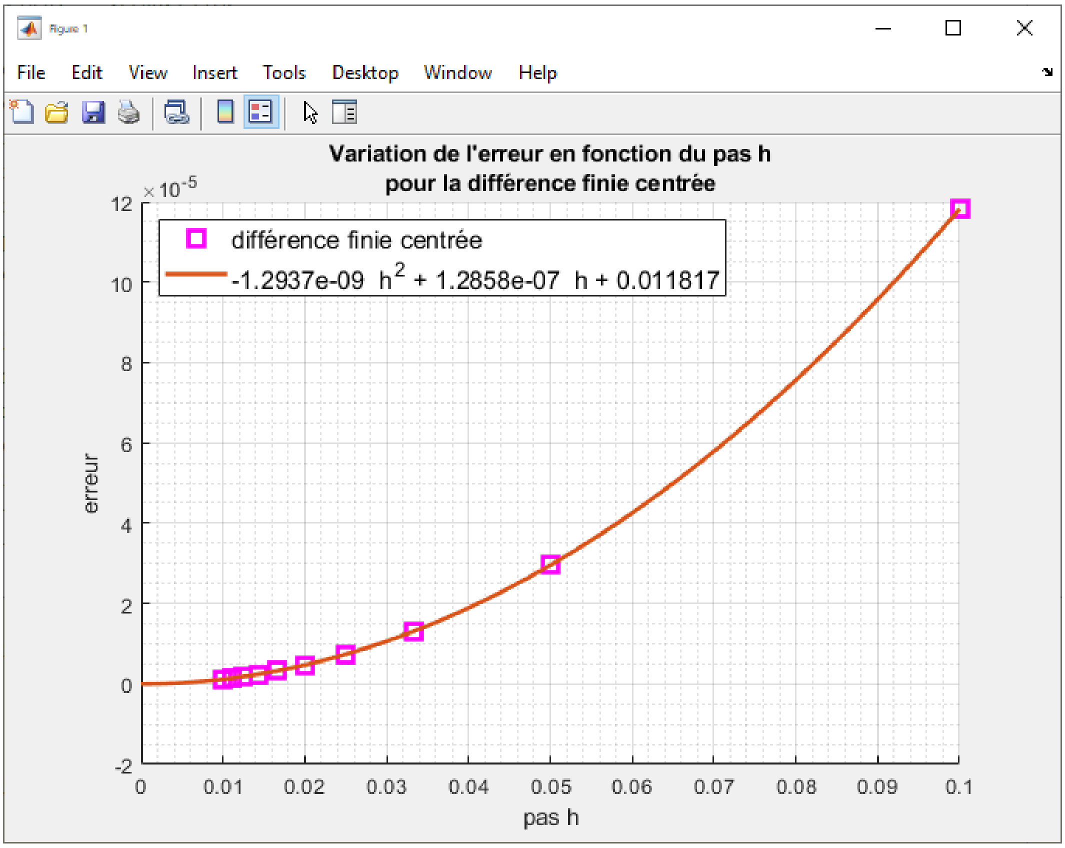


Figure 658 : variation de l'erreur de dérivation en fonction de h pour la différence finie centrée

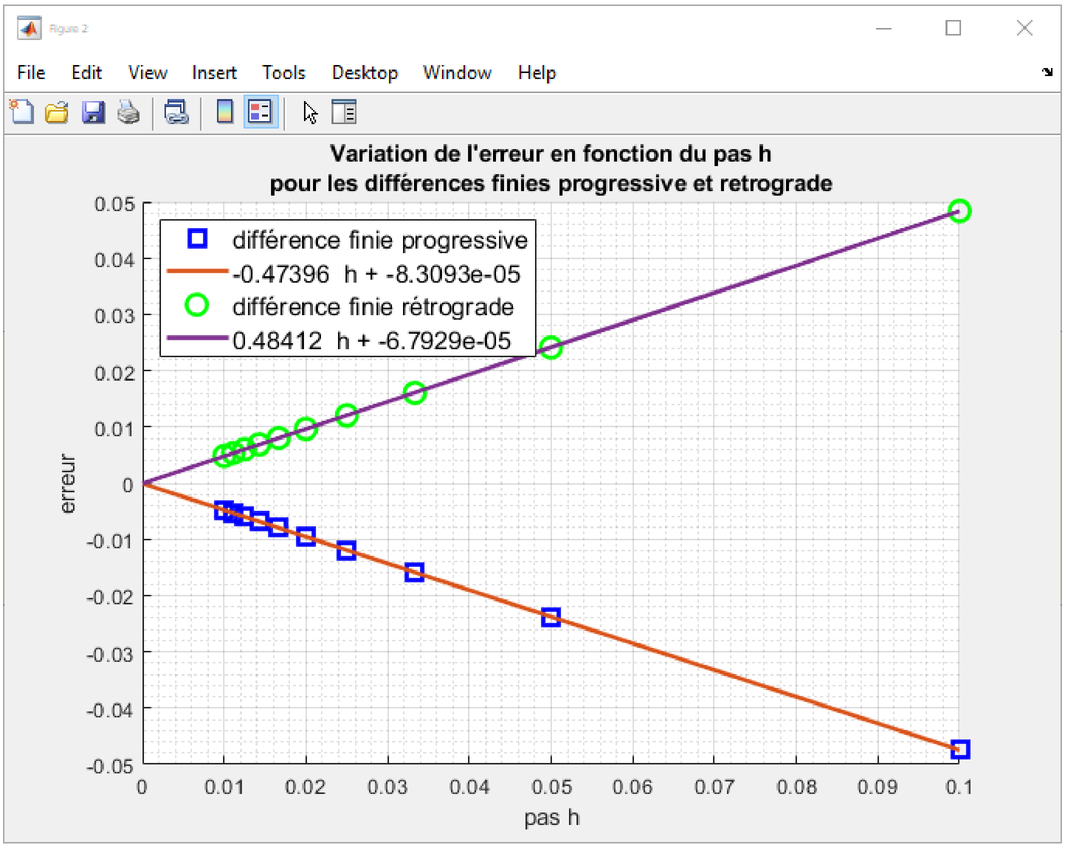


Figure 659 : variation de l'erreur de dérivation en fonction de h pour la différence finie progressive et rétrograde

En observant les points qui représentent l'erreur en fonction du pas h, nous choisissons une régression linéaire pour la différence finie progressive et rétrograde et une régression polynomiale d'ordre 2 pour la différence finie centrée. Il apparait que ces choix permettent d'interpoler la série de données avec une excellente précision. Les équations des polynômes d'interpolation apparaissent dans les légendes des différentes fenêtres graphiques.

En conclusion :

- l'erreur pour la différence finie progressive et pour la différence finie rétrograde est d'ordre 1 en h
- l'erreur pour la différence finie centrée est d'ordre 2 en h

L'exploitation d'un algorithme peut donc nous amener à connaître la tendance de variation d'un paramètre en exploitant la puissance de calcul et en utilisant les outils adaptés. Notre seule intuition est parfois insuffisante et nous devons nous appuyer sur le potentiel de notre algorithme. Ces tendances peuvent évidemment être démontrées mathématiquement en utilisant la formule de Taylor qui confirmerait ces observations.
Les concepts que nous avons implantés dans notre algorithme sont très simples. Une exploitation pertinente de ces concepts nous permet de dégager des tendances que seuls des concepts mathématiques avancés peuvent prévoir.

4. Robustesse du processus

Afin de tester la robustesse de notre algorithme, nous pouvons tester plusieurs fonctions en modifiant la fonction **f1.m** et en reproduisant le processus.

Modifier la fonction **f1.m** pour reproduire l'analyse sur une fonction polynomiale $y(x)=5x^3-3x^2+5x+1$ (Figure 660).

```
function y = f1(x)
y = 5*x^3-3*x^2+5*x+1;
end
```

Figure 660 : modification de la fonction f1.m

Relancer les différents scripts pour visualiser les résultats dans les différentes figures.

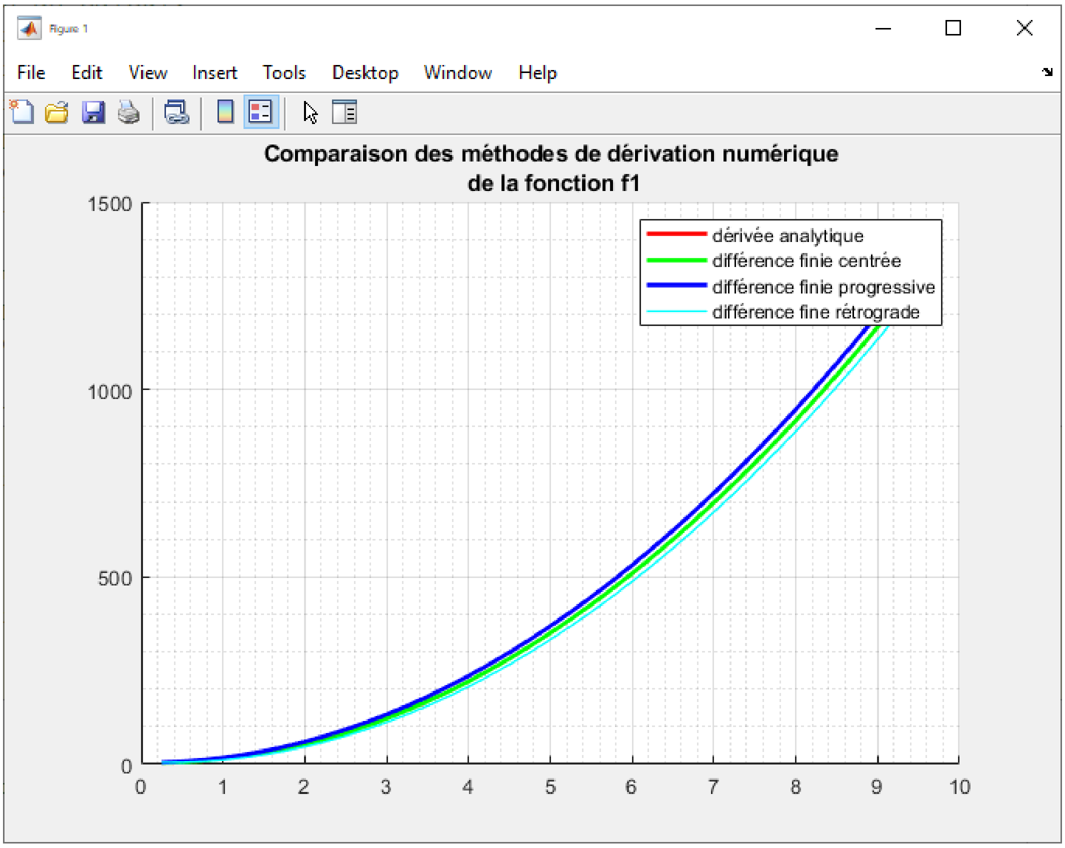


Figure 661 : comparaison des différentes méthodes de dérivation numérique

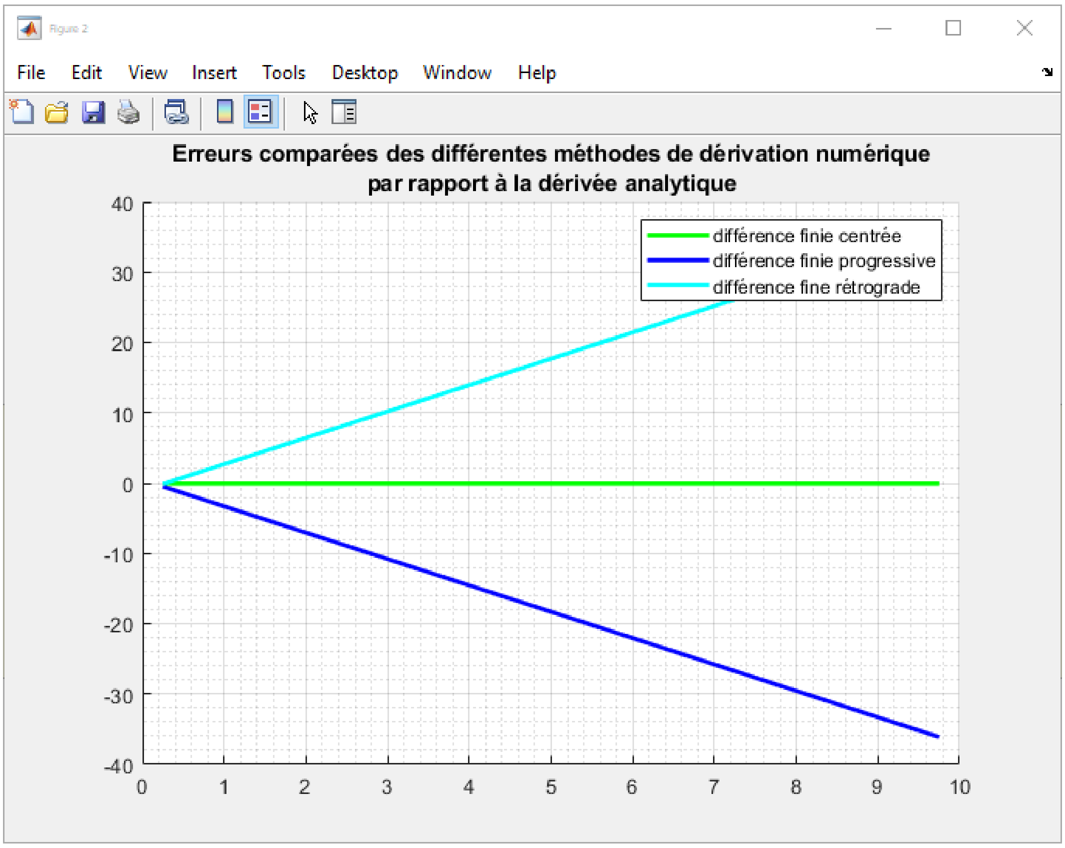


Figure 662 : visualisation des erreurs induites par les différentes méthodes de dérivation numérique

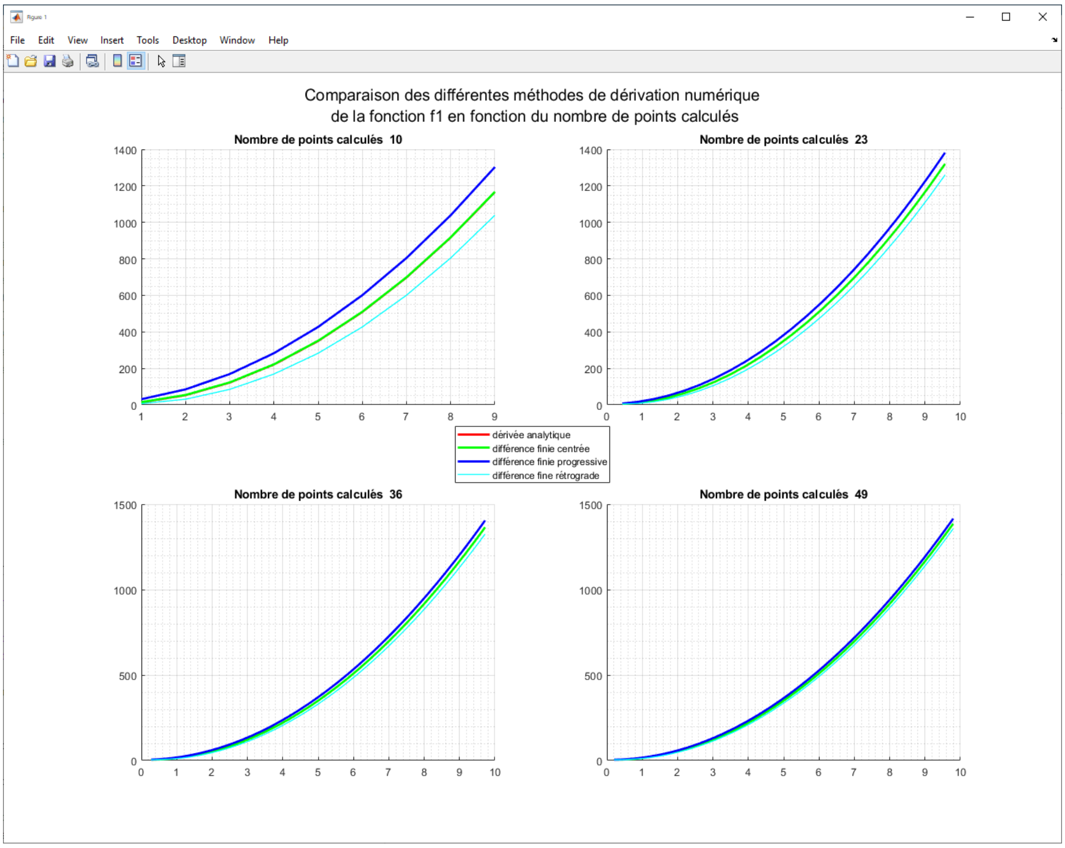


Figure 663 : influence du pas sur l'allure des courbes

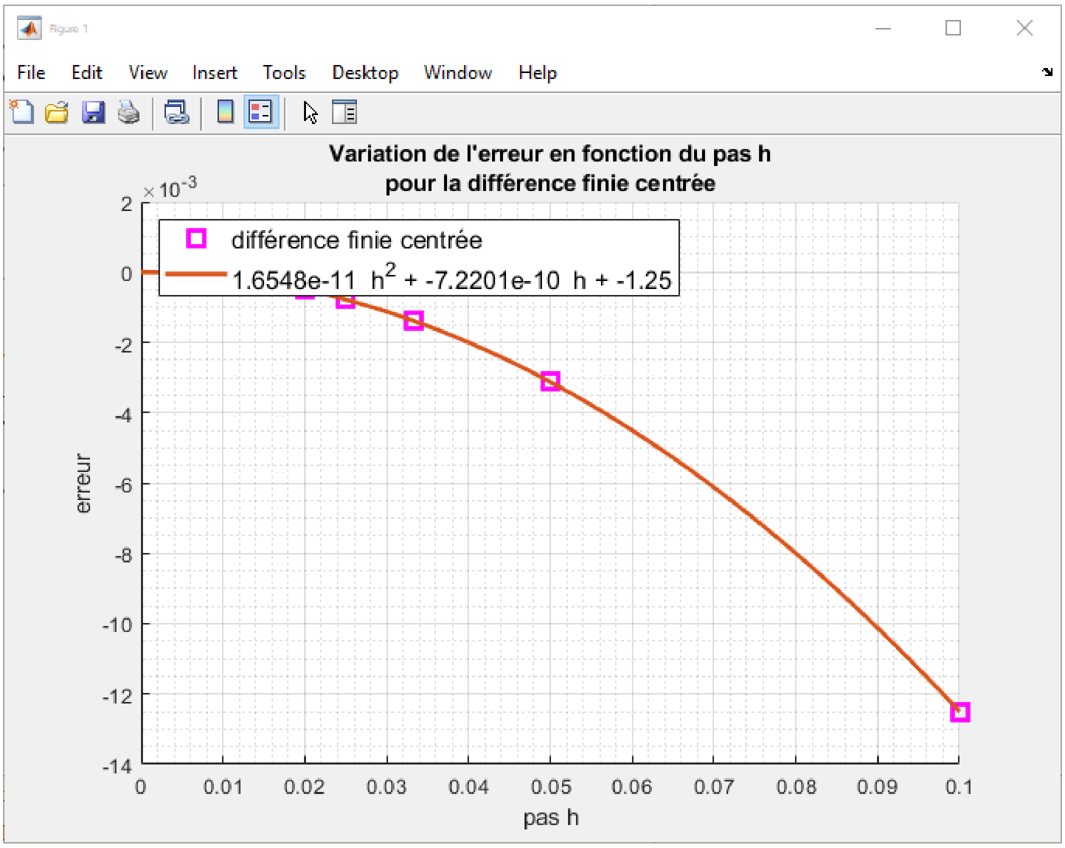


Figure 664 : variation de l'erreur de dérivation en fonction de h pour la différence finie centrée

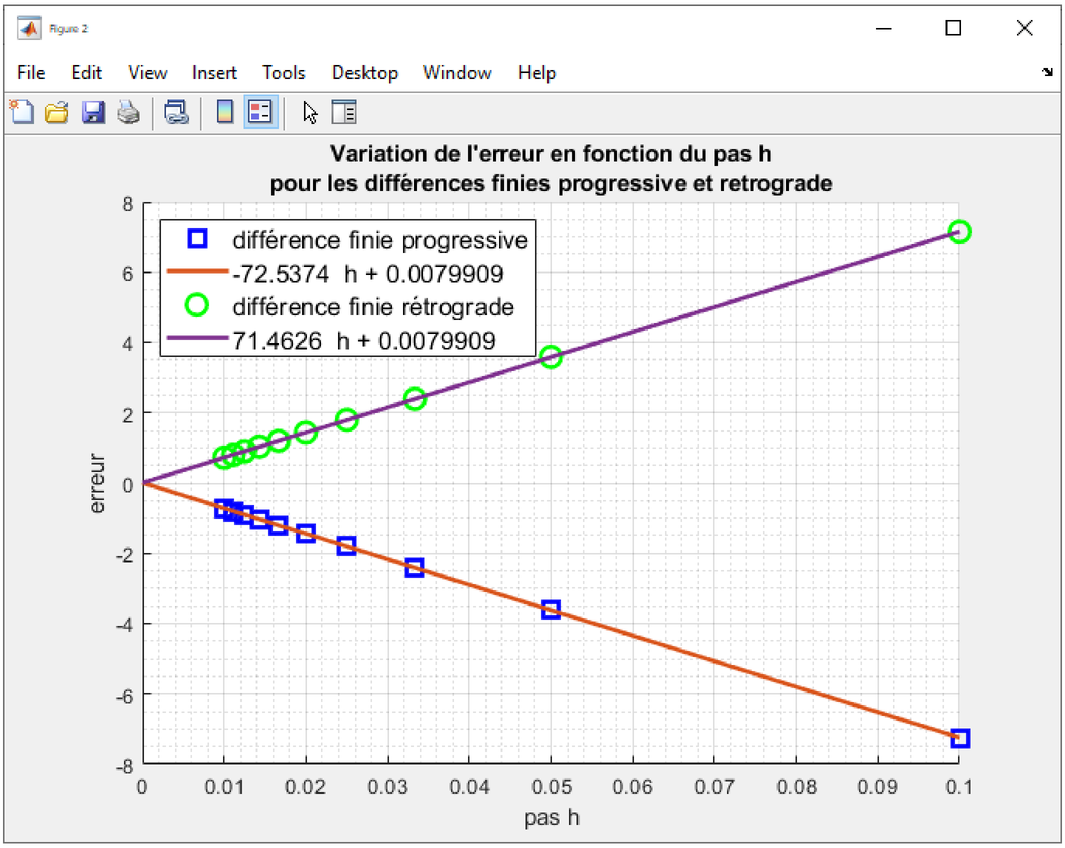


Figure 665 : variation de l'erreur de dérivation en fonction de h pour la différence finie progressive et rétrograde

D. Application de la dérivation numérique

1. Dérivation du signal issu d'un codeur incrémental

Le signal relevé sur la Figure 666 (zoom sur la Figure 667) représente la position mesurée à l'aide d'un codeur incrémental placé sur l'arbre d'un moteur. Le signal une fois traité présente de nombreuses discontinuités qui seront très préjudiciables lors d'un processus de dérivation numérique. Si nous voulons obtenir la vitesse de rotation de l'arbre du moteur en fonction du temps, il faudra dériver numériquement le signal mais il ne sera pas possible de le faire sur le signal brut.

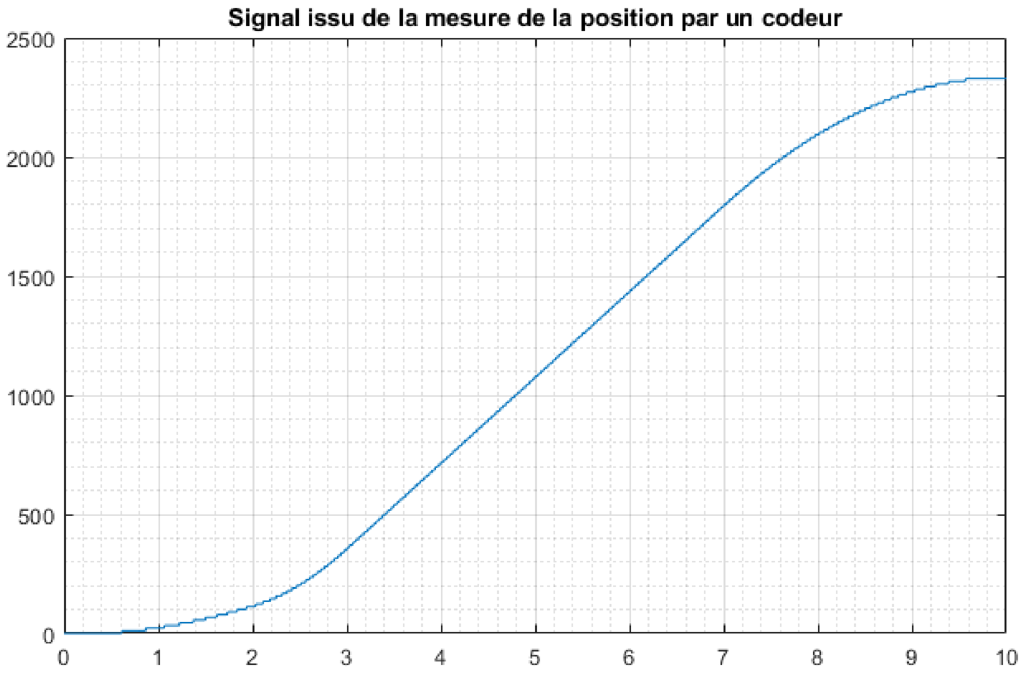


Figure 666 : mesure de la position à partir du signal d'un codeur incrémental

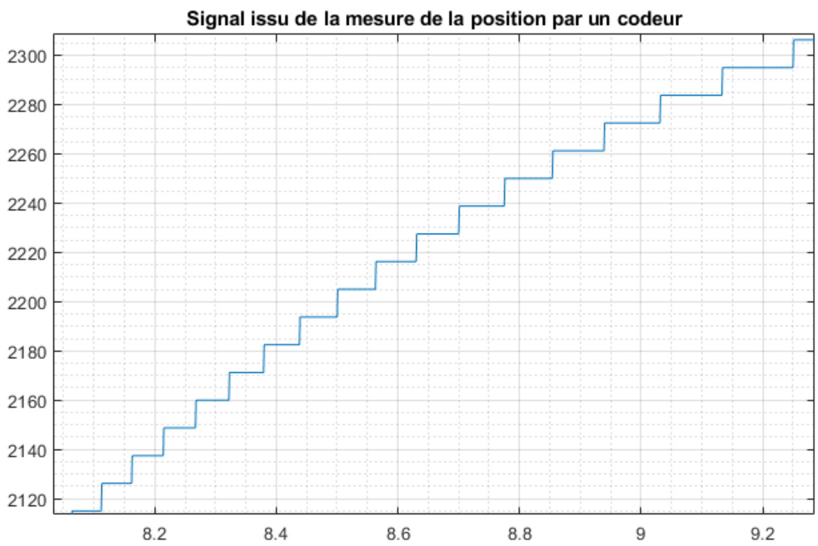


Figure 667 : zoom sur la courbe

2. Mise en évidence des problèmes rencontrés

Lorsqu'un signal présente des discontinuités importantes ou lorsqu'il est fortement bruité, le processus de dérivation numérique simple ne pourra pas donner un résultat satisfaisant. En effet le Figure 668 montre la variation très forte des coefficients directeurs calculés par la méthode des différences finies sur les intervalles ①,②,③ et ④. Sur les intervalles ① et ② la dérivée numérique est nulle alors qu'elle est très élevée sur l'intervalle ③.

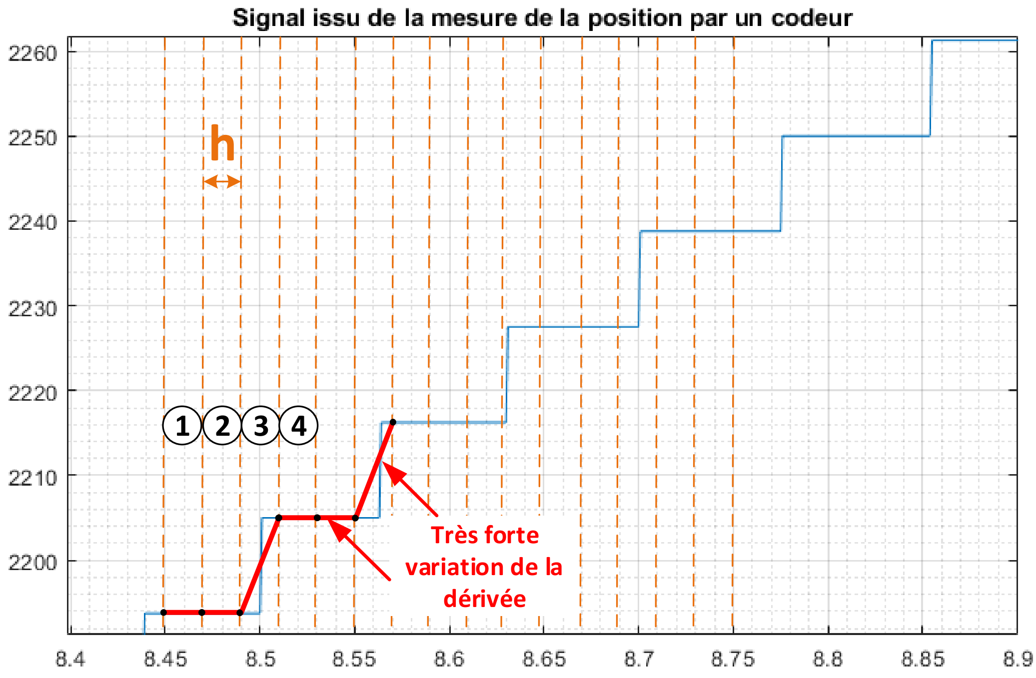


Figure 668 : influence du pas d'échantillonnage sur le calcul de la dérivée numérique

L'application directe d'un algorithme de dérivation numérique sur le signal brut nous donne le résultat visible sur la Figure 669. Le signal obtenu montre les variations intempestives du coefficient directeur calculé sur une distance correspondant au pas h. Cette méthode n'est donc pas satisfaisante.

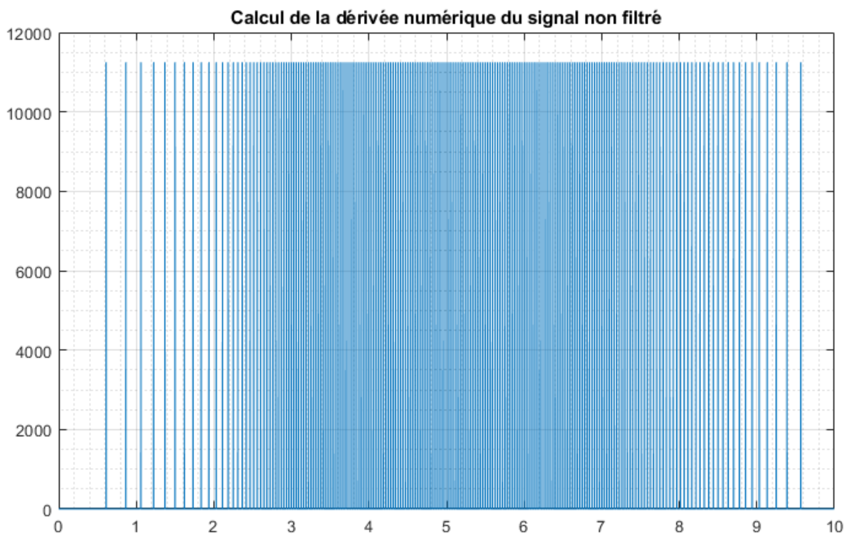


Figure 669 : dérivation numérique du signal brut

3. Dérivation numérique à pas variable

Afin d'obtenir une allure correcte pour notre signal obtenu par dérivation numérique, nous allons allonger le pas de dérivation afin de limiter au maximum les variations intempestives de la dérivé.

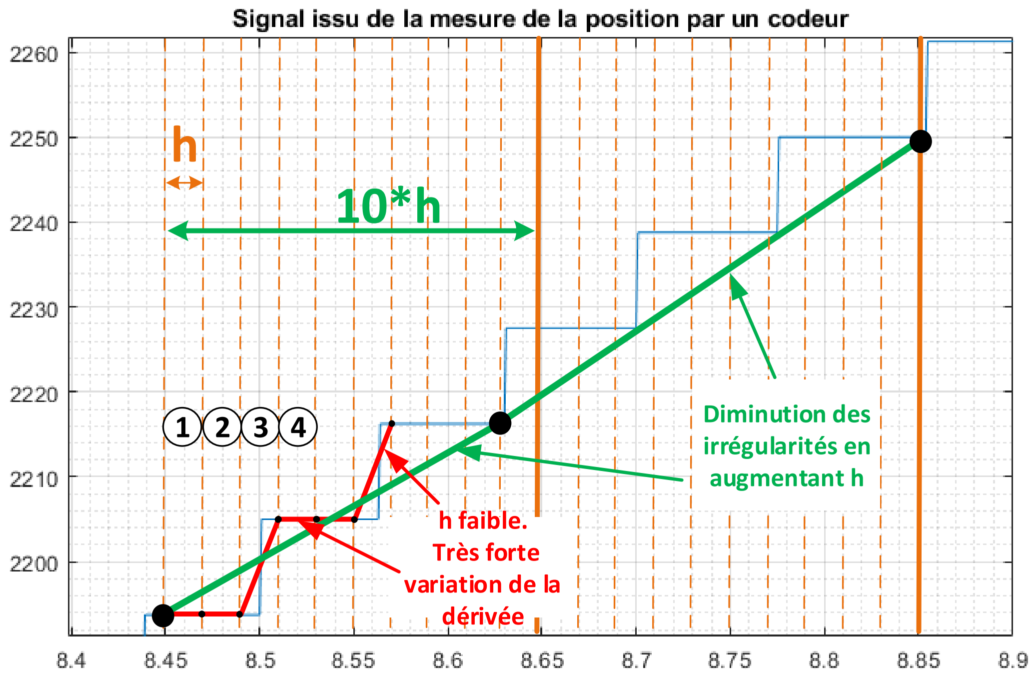


Figure 670 : influence de l'augmentation du pas de dérivation

Pour dériver un signal avec pas variable nous allons utiliser la fonction **fderiv_num_pas_variable(t,Y,step_size)** (Figure 671).

Cette fonction prendra en arguments :

- **t** : vecteur contenant les abscisses du signal à dériver
- **Y** : vecteur contenant les valeurs du signal à dériver
- **step_size**_points : nombre de points à considérer pour construire le pas de dérivation

La fonction aura comme sorties :

- **t_step** : vecteur contenant les instants correspondant aux points ou la dérivée est calculée
- **dY_step** : vecteur contenant les valeurs de la dérivée numérique au différents instants

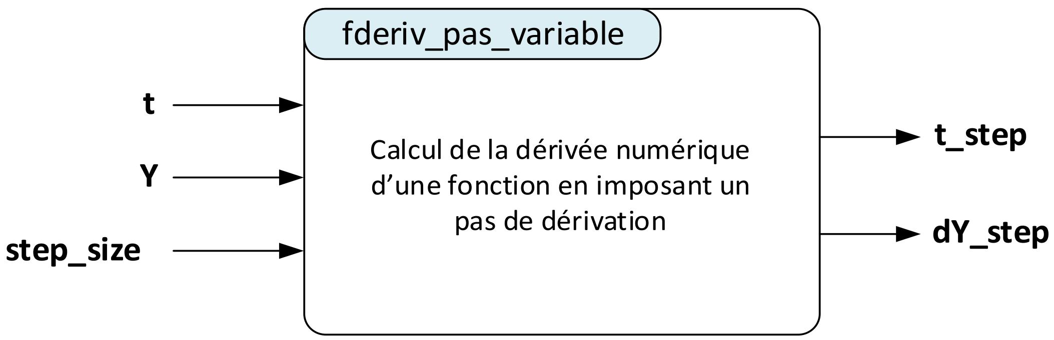


Figure 671 : fonction fderiv_num_pas_variable(t,Y,step_size)

Le codage de la fonction **fderiv_num_pas_variable(t,Y,step_size)**

```
%% fderiv_pas_variable(t,Y,step_size)
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Cette fonction permet de réaliser une dérivation numérique en choisissant
% la longueur du pas de dérivation
% step_size représente la longueur du pas de dérivation

function [t_step,dY_step] = fderiv_num_pas_variable(t,Y,step_size)

% Evaluation du nombre de points des vecteurs
nb_points = length(t);

% calcul du pas h
h = (t(end)-t(1))/(nb_points - 1);

% calcul du pas à utiliser pour l'opération de dérivation numérique
pas = step_size * h;

% calcul de la dérivée en chaque point
i = 1;
% construction des vecteurs t_step et dY_step
for k = 1:step_size:(nb_points-1-step_size)
    dY_step(i) = (Y(k+step_size)-Y(k))/pas;
    t_step(i) = t(k+step_size);
    i = i + 1;
end
end
```

Figure 672 : codage de la fonction fderiv_num_pas_variable(t,Y,step_size)

Afin de tester cette fonction et de voir l'influence du pas de dérivation sur la forme du signal, ouvrir le script **deriv_num_pas_variable_comparaison.m**. Ce script permet de tracer dans une même fenêtre graphique 4 courbes représentant la dérivée numérique calculée avec 4 valeurs du pas de dérivation. Il est possible de modifier les variables **nb_points_min** et **nb_points_max**.

```
%% deriv_num_pas_variable_comparaison
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Représentation de 4 courbes correspondant à 4 dérivations numériques du
% signal en considérant différents pas de dérivation choisis équitablement
% répartis entre nb_points_min et nb_points_max
%% Effacement des variables du workspace
clear all;

% chargement dans le workspacedes données correspondant au signal du codeur et au
temps
load num_deriv_data.mat;

% tracé du signal du codeur
fig = figure('Units','centimeters','Position',[2 5 35 25]);
set(fig,'Color','white');
sgtitle({'Position donnée par le codeur en fonction du temps';...
    ''});
plot(t,position_codeur);
grid on; grid minor;

% spécification des nombres de points mini et maxi
nb_points_min = 50;
```

```
nb_points_max = 450;
pas = round((nb_points_max - nb_points_min) / 3);
%%
fig = figure('Units','centimeters','Position',[2 5 35 25]);
set(fig,'Color','white');
sgtitle({'Analyse de l''influence du pas de dérivation';...
    ' sur la forme du signal à dériver'});

% initialisation du compteur de boucle
k = 1;

for step_size = nb_points_min : pas : nb_points_max;

subplot(2,2,k); hold on; grid on; grid minor;

% calcul et tracé de la dérivée exacte en calcul symbolique
[t_step,dY_step] = fderiv_num_pas_variable(t,position_codeur,step_size);
plot(t_step,dY_step,'blue','LineWidth',2);

title('La longueur du pas couvre ' + string(step_size) + ' points')
k = k + 1;
end

% spécification de la légende générale du graphique
leg = legend('signal dérivé');

% Positionnement de la légende au centre du graphique
newPosition = [0.45 0.47 0.1 0.07];
newUnits = 'normalized';
set(leg,'Position', newPosition,'Units', newUnits);
```

Figure 673 : script permettant de faire varier le pas de dérivation

Exécuter le script et observer le résultat sur la Figure 674.

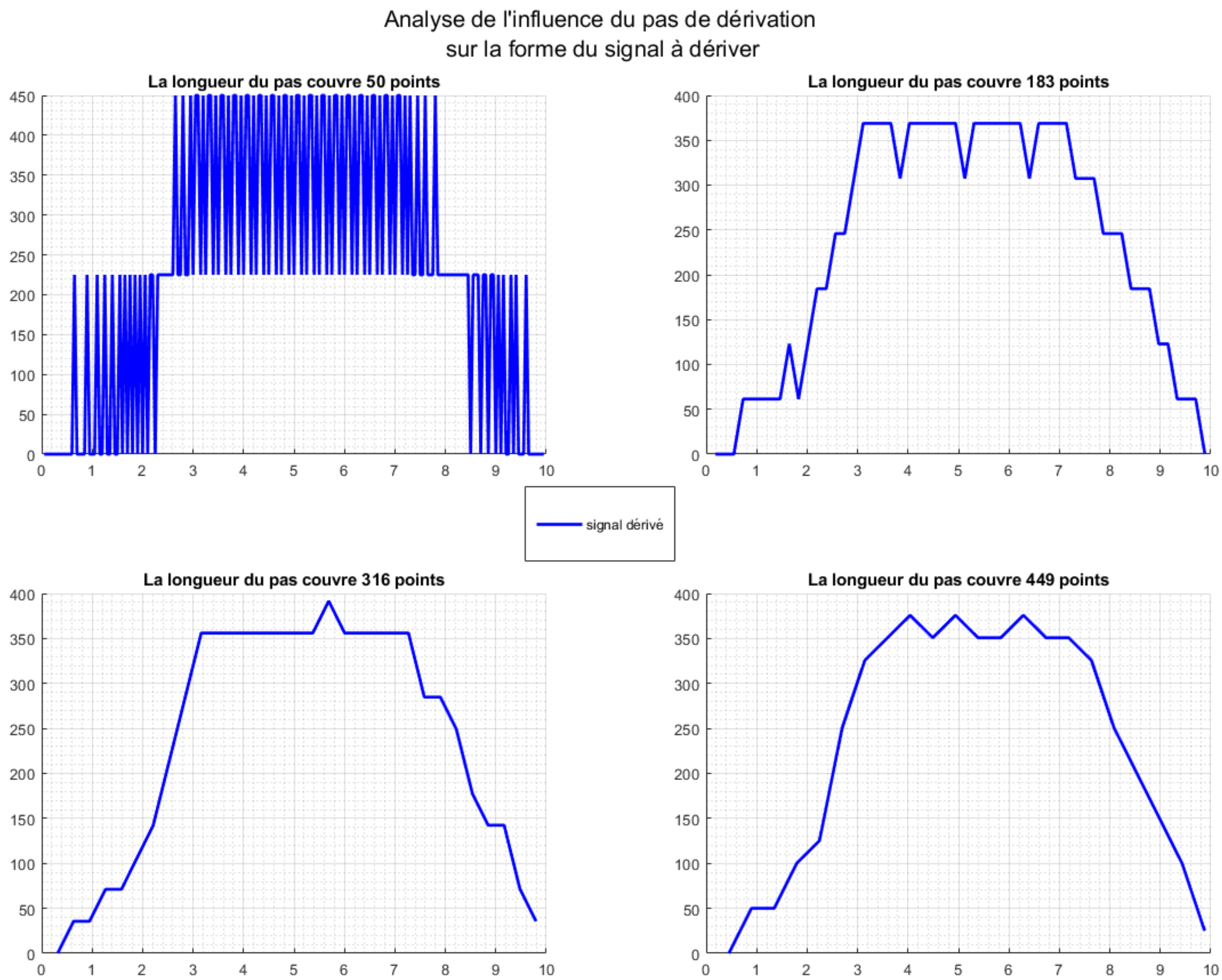


Figure 674 : influence du pas de dérivation numérique

Nous pouvons constater que l'augmentation du pas de dérivation permet d'obtenir un signal dérivé exploitable. A partir de 300 points le résultat est satisfaisant.
Cette application montre que la dérivation numérique est une opération délicate dans le cas de signaux provenant de capteurs, qui peuvent être fortement bruité et présenter des discontinuités.
Il est également possible de filtrer le signal avant de le dériver pour éliminer le bruit et les discontinuités.

IV. Résolution de l'équation f(x)=0

Vous pouvez trouver les fichiers de toutes les fonctions et scripts présentés dans ce paragraphe dans le dossier **Algorithmique_avec_MATLAB/ Résolution f(x)=0**

A. Dichotomie

<u>Principe de la méthode</u> : On part de deux valeurs a et b encadrant une solution unique de l'équation f(x)=0. A chaque itération, l'intervalle est divisé en deux parties égales en conservant l'intervalle qui contient la racine.

- Déterminer le point milieu de l'intervalle : $m = \dfrac{a+b}{2}$
- Evaluer $f(a).f(m)$
- Si $f(a).f(m) > 0$, l'intervalle [a ; m] ne contient pas la racine. La racine se trouve dans l'intervalle [m ; b] et a prend la valeur de m pour la prochaine itération.
- Si $f(a).f(m) < 0$, l'intervalle [a ; m] contient la racine et b prend la valeur de m pour la prochaine itération.

Le processus s'arrête quand l'intervalle (b-a) devient inférieur à epsilon qui représente la précision que l'on souhaite obtenir dans l'évaluation de la solution. Afin de tester la condition de fin de notre algorithme, nous utiliserons une boucle « tant que ».

La Figure 675 illustre les 2 premières itérations de la méthode de recherche des solutions de l'équation f(x)=0 par la méthode de dichotomie. La solution de l'équation f(x)=0 est également appelée « racine ».

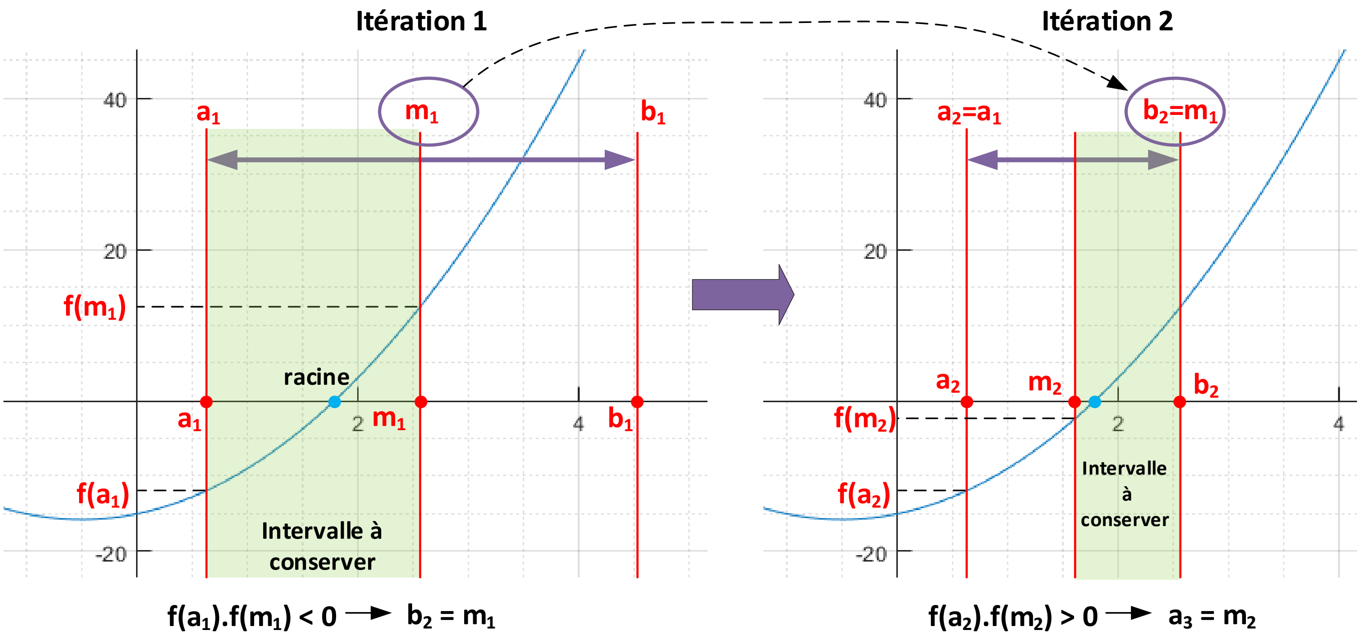


Figure 675 : illustration de la recherche des solutions de l'équation f(x)=0 par la méthode de dichotomie

Afin de mettre en place le processus de recherche de solution par dichotomie, nous allons créer la fonction **fdichotomie(f,a,b,epsilon)** (Figure 676) qui calcule la solution de l'équation f(x)=0 dans l'intervalle **[a ; b]** avec une précision **epsilon**.

Cette fonction prendra en arguments :
f : fonction dont on recherche la solution de l'équation f(x)=0
a : borne inférieure de l'intervalle d'étude
b : borne supérieur de l'intervalle d'étude
epsilon : précision souhaitée pour la processus de recherche de la solution

La fonction aura comme sortie :
sol: solution de l'équation f(x)=0 dans l'intervalle [a ; b] avec une précision epsilon

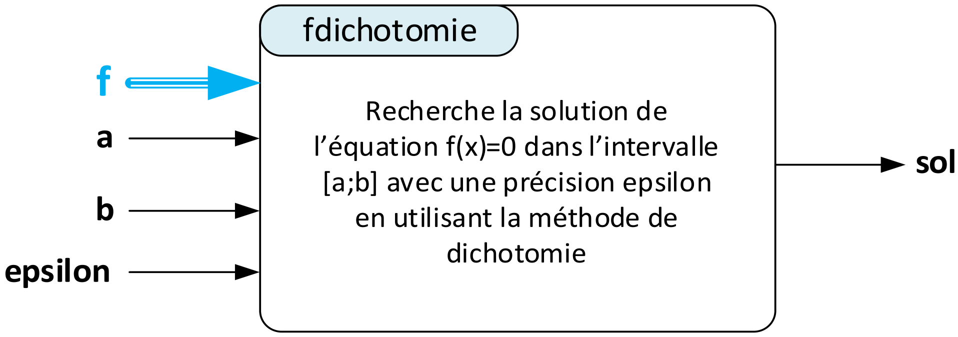


Figure 676 : fonction fdichotomie(f,a,b,epsilon)

La Figure 677 montre le codage de la fonction **fdichotomie(f,a,b,epsilon).**

```
%% fdichotomie.m
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Cette fonction renvoie la solution de l'équation f(x)=0 recherchée dans
% l'intervalle [a;b] avec une précision epsilon en utilisant la méthode de
% dichotomie

function sol = fdichotomie(f,a,b,epsilon)
while (b-a) > epsilon
    m = (a+b)/2;
    if f(a) * f(m) > 0
        a = m;
    else
        b = m;
    end
    end
sol = (a+b)/2;
end
```

Figure 677 : codage de la fonction fdichotomie(f,a,b,epsilon)

Nous souhaitons résoudre l'équation f(x)=0 avec $f(x)=3x^2+3x-15$. Cette fonction est stockée dans **f2.m** dont le codage est décrit sur la Figure 678.

```
%% f2.m
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% f2.m contient l'expression mathématique de la fonction dont on recherche
% la solution de type f(x)=0

function y=f2(x)
y = 3.*x.^2+3.*x-15;
```

```
end
```

Figure 678: fonction f2.m

Afin de tester la fonction **fdichotomie**, il faut créer un script qui va appeler la fonction **fdichotomie** pour résoudre l'équation stockée dans la fonction **f2.m**.

Ouvrir le script **dichotomie.m**.

Ce script va dans un premier temps tracer la courbe représentative de la fonction et demander à l'utilisateur de lui donner un intervalle **[a ; b]** et une précision de recherche **epsilon** afin de démarrer la méthode de résolution. Le script donnera également le temps d'exécution de la fonction.

```
%% dichotomie.m
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Recherche par dichotomie de la solution de l'équation f(x)=0 dans
% l'intervalle [a;b] avec une précision espilon
% La courbe y = f(x) est tracée
% L'utilisateur peut alors spécifier l'intervalle [a;b] de recherche de la
% solution et la précision epsilon souhiatée
% la fonction f(x) est stockée dans la fonction f2.m

%% Tracé de la fonction dont on cherche les racines par dichotomie
figure;
ezplot(@f2);
grid on; grid minor;

% affichage des axes sur le graphique
ax = gca;
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';

%% Spécification de l'intervalle [a;b] de recherche de la solution f(x)=0 et de
la précision souhaitée espilon

disp('La solution de l''équation f(x)=0 est recherchée par dichotomie dans
l''intervalle [a;b]');
a = input('Saisir la valeur de a: ');
b = input('Saisir la valeur de b: ');
disp('La recherche de la solution se fera avec une précision epsilon: ');
eps = input('Spécifier la valeur de epsilon: ');

%% Appel de la fonction fdichotomie et affichage du résultat

% démarrage du compteur pour évaluer le temps d'exécution de la fonction
tic;

% appel de la fonction fdichotomie
sol = fdichotomie(@f2,a,b,eps);

% création de la variable t_dicho contenant le temps d'exécution de la
% fonction
t_dicho = toc;

% affichage de la solution et du temps nécessaire à l'exécution de la
% fonction
```

```
reponse = ['La solution de l''équation f(x)=0 dans l''intervalle
[',num2str(a),';',num2str(b),'] est: ', num2str(sol)];
disp(reponse);
temps = ['Le temps nécessaire au calcul est de ',num2str(t_dicho),' secondes'];
disp(temps);
```

Figure 679 : recherche de solution par dichotomie

Exécutez le script. La courbe représentative de la fonction apparait (Figure 680).

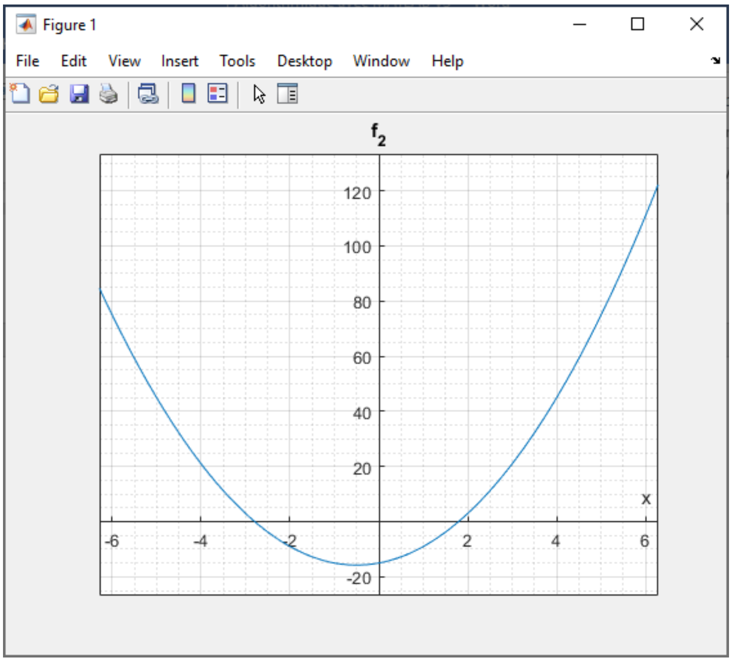


Figure 680 : courbe représentative de la fonction f(x)

Observez la courbe représentative de la fonction et indiquez l'intervalle **[a ; b]** dans lequel vous souhaitez rechercher les racines et la précision **epsilon** souhaitée (Figure 681).

```
La solution de l'équation f(x)=0 est recherchée par dichotomie dans l'intervalle [a;b]
Saisir la valeur de a: -4
Saisir la valeur de b: -2
La recherche de la solution se fera avec une précision epsilon:
Spécifier la valeur de epsilon: 0.001
La solution de l'équation f(x)=0 dans l'intervalle [-4;-2] est: -2.7915
Le temps nécessaire au calcul est de 0.0040617 secondes
```

Figure 681 : exécution du script dichotomie.m pour la recherche d'une racine dans l'intervalle[-4 ; 2]

Vous pouvez relancer le script pour chercher une solution dans un autre intervalle (Figure 682).

```
La solution de l'équation f(x)=0 est recherchée par dichotomie dans l'intervalle [a;b]
Saisir la valeur de a: 0
Saisir la valeur de b: 2
La recherche de la solution se fera avec une précision epsilon:
Spécifier la valeur de epsilon: 0.001
La solution de l'équation f(x)=0 dans l'intervalle [0;2] est: 1.7915
Le temps nécessaire au calcul est de 0.0012746 secondes
```

Figure 682 : exécution du script dichotomie.m pour la recherche d'une racine dans l'intervalle[0 ; 2]

B. Méthode de Newton

<u>Principe de la méthode</u> : Cette méthode consiste à approximer la courbe représentative de f(x) par sa tangente en un point x_i . Le processus démarre avec le choix d'un point x_0 choisi proche de la solution recherchée. On cherche ensuite l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses pour trouver un nouveau point x_1. On cherche alors la tangente à la courbe représentative de f(x) au point x_1 et on recherche de la même manière le point x_2. Les x_i définissent alors une suite qui converge vers la solution de l'équation f(x)=0. La solution est alors trouvée par itérations successives avec une précision epsilon spécifiée.

La Figure 683 illustre les deux premières itérations de la méthode de Newton.

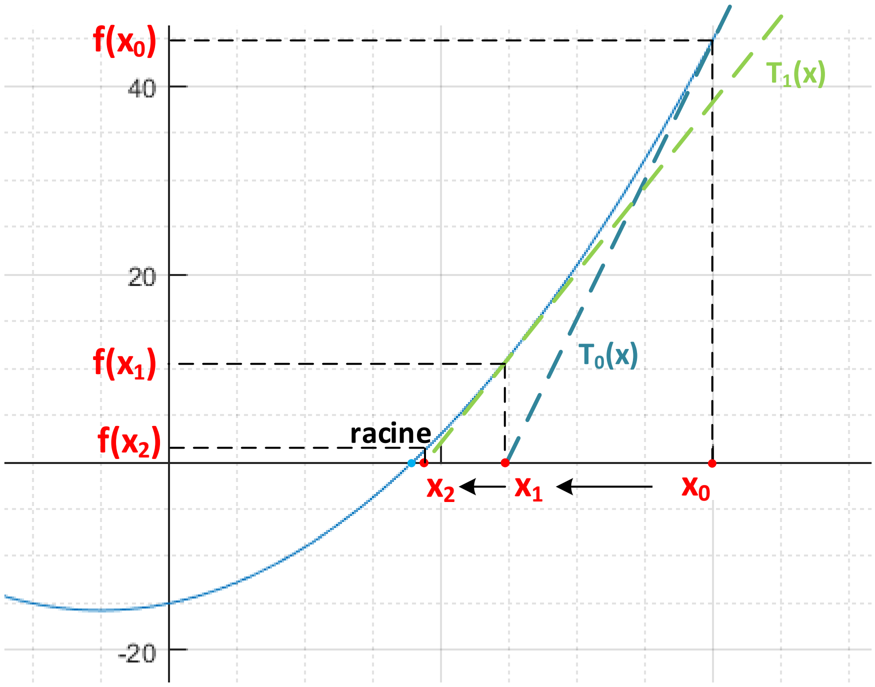


Figure 683 : illustration de la méthode de Newton

L'équation de la tangente au point x_0 à la courbe représentative de f(x) est donnée par :

$$T_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Première itération : On cherche l'intersection de la tangente T_0 avec l'axe des abscisses en cherchant la solution x_1 tel que $T_0(x_1) = 0$:

$$T_0(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- ....
- $i^{ème}$ itérations : On cherche l'intersection de la tangente T_i avec l'axe des abscisses en cherchant x_{i+1} tel que $T_i(x_{i+1}) = 0$:

$$T_i\left(x_{i+1}\right)=f\left(x_i\right)+f'\left(x_i\right)\left(x_{i+1}-x_i\right)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{i+1}=x_i-\frac{f\left(x_i\right)}{f'\left(x_i\right)}} \quad \text{(relation de récurrence à programmer)}$$

A chaque itération, il faudra évaluer les valeurs en x_i de la fonction f et de sa dérivée. Il faudra donc prévoir dans la fonction **fNewton.m** que nous allons définir un processus de dérivation numérique.
Le processus de recherche de la solution s'arrêtera lorsque le critère de précision sera atteint, nous utiliserons une boucle « tant que ».

Afin de mettre en place le processus de recherche de solution par la méthode de Newton, nous allons créer la fonction **fNewton(f,x0,epsilon)** (Figure 684) qui calcule la solution de l'équation f(x)=0 autour de x_0 avec une précision **epsilon**.

Cette fonction prendra en arguments :
f : fonction dont on recherche la solution de l'équation f(x)=0
x_0 : valeur autour de laquelle on recherche la solution
epsilon : précision souhaitée pour la recherche de la solution

La fonction aura comme sortie :
sol: solution de l'équation f(x)=0 dans l'intervalle [a ; b] avec une précision epsilon

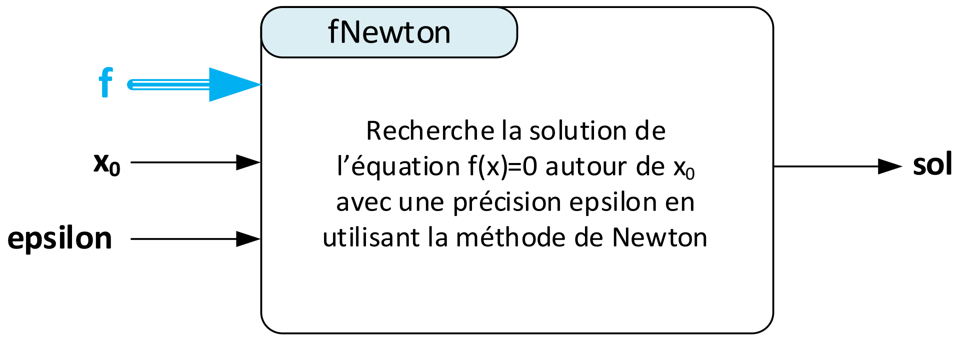


Figure 684 : fonction fNewton(f,x_0,epsilon)

La Figure 685 montre le codage de la fonction **fNewton(f,x_0,epsilon).**

```
%% fNewton.m
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Cette fonction renvoie la solution de l'équation f(x)=0 recherchée
% autour de la valeur x0 avec une précision epsilon en utilisant la
% méthode de Newton
% La fonction derive=df(f,x) permet d'obtenir la dérivée numérique de
% la fonction f avec un pas h

function [sol,N] = Newton(f,x0,epsilon)
sol = x0 - f(x0)/df(f,x0);

% tant que la précision n'est pas atteinte, on continue la méthode
while abs(f(sol)) > epsilon
    sol = sol - f(sol)/df(f,sol);
end
end
```

```
% fonction permettant de calculer la dérivée numérique de la fonction
% (différence finie progressive)
function derive = df(f,x)
h = 1e-5;
derive = (f(x+h/2)-f(x-h/2))/h;
end
```

Figure 685 : codage de la fonction fNewton(f,x_0,epsilon)

Nous souhaitons résoudre l'équation f(x)=0 avec $f(x)=3x^2+3x-15$. Cette fonction est stockée dans **f2.m** dont le codage est décrit sur la Figure 686.

```
%% f2.m
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% f2.m contient l'expression mathématique de la fonction dont on recherche
% la solution de type f(x)=0

function y=f2(x)
y = 3.*x.^2+3.*x-15;
end
```

Figure 686: fonction f2.m

Afin de tester la fonction **fNewton**, il faut créer un script qui va appeler la fonction **fNewton** pour résoudre l'équation stockée dans la fonction **f2.m**.

Ouvrir le script **Newton.m**.

Ce script va dans un premier temps tracer la courbe représentative de la fonction et demander à l'utilisateur de lui donner une valeur de $\mathbf{x_0}$ et une précision de recherche **epsilon** afin de démarrer la méthode de résolution. Le script donnera également le temps d'exécution de la fonction.

```
%% Newton.m
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Recherche par la méthode de Newton de la solution de l'équation f(x)=0
% autour de la valeur x0 avec une précision espilon
% La courbe y = f(x) est tracée
% L'utilisateur peut alors spécifier la valeur de x0 permettant de démarrer
% le processus de recherche de solution ainsi que la précision epsilon
% souhaitée
%% Tracé de la fonction dont on cherche les racines par la méthode de Newton
figure;
ezplot(@f2);
grid on; grid minor;

% affichage des axes sur le graphique
ax = gca;
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';

%% Spécification de la valeur de x0 permettant de démarrer le processus de
% recherche de la solution f(x)=0 et de la précision souhaitée espilon

disp('La solution de l''équation f(x)=0 est recherchée par la méthode de Newton
autour de la valeur x0');
```

```
x0 = input('Saisir la valeur de x0: ');
disp('La recherche de la solution se fera avec une précision epsilon: ');
eps = input('Spécifier la valeur de epsilon: ');

%% Appel de la fonction fNewton et affichage du résultat
tic;
sol = fNewton(@f2,x0,eps);
t_dicho = toc;
reponse = ['La solution de l''équation f(x)=0  autour de x=',num2str(x0),' est:
', num2str(sol)];
disp(reponse);
temps = ['Le temps nécessaire au calcul est de ',num2str(t_dicho),' secondes'];
disp(temps);
```

Figure 687 : recherche de solution par la méthode de Newton

Exécutez le script. La courbe représentative de la fonction apparait (Figure 688).

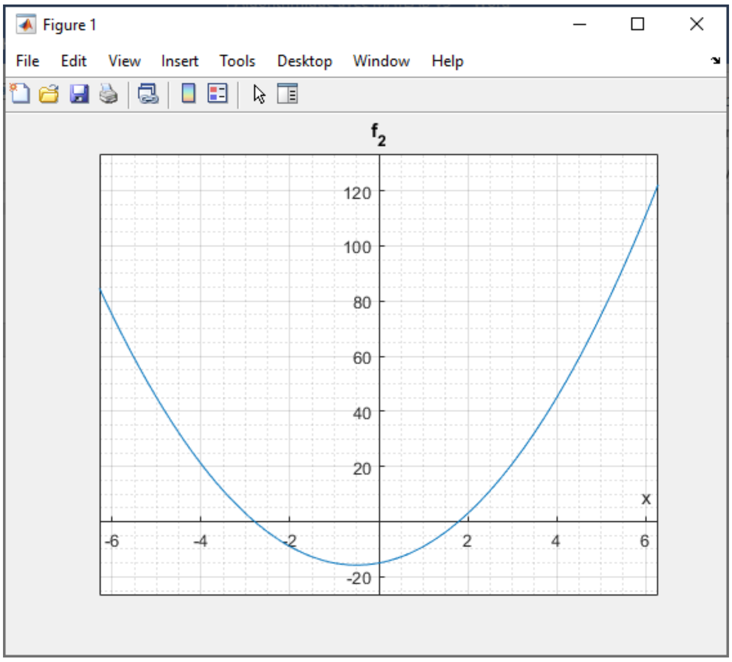


Figure 688 : courbe représentative de la fonction f(x)

Observez la courbe représentative de la fonction et indiquez la valeur de **x_0** et la précision **epsilon** souhaitée (Figure 689).

```
La solution de l'équation f(x)=0 est recherchée par la méthode de Newton autour de la valeur x0
Saisir la valeur de x0: 3
La recherche de la solution se fera avec une précision epsilon:
Spécifier la valeur de epsilon: 0.001
La solution de l'équation f(x)=0  autour de x=3 est: 1.7913
Le temps nécessaire au calcul est de 0.00063 secondes
```

Figure 689 : exécution du script Newton.m pour rechercher la solution autour de x=3

Vous pouvez relancer le script pour chercher une solution autour d'une autre valeur de x_0 (Figure 690).

```
La solution de l'équation f(x)=0 est recherchée par la méthode de Newton autour de la valeur x0
Saisir la valeur de x0: -2
La recherche de la solution se fera avec une précision epsilon:
Spécifier la valeur de epsilon: 0.001
```

La solution de l'équation f(x)=0 autour de x=-2 est: -2.7913
Le temps nécessaire au calcul est de 0.0014403 secondes

Figure 690 : exécution du script Newton.m pour rechercher la solution autour de x=-2

V. Intégration numérique

A. Principe

Intégrer numériquement une fonction sur un intervalle [a ; b] consiste à évaluer numériquement l'aire sous la courbe représentative de la fonction.

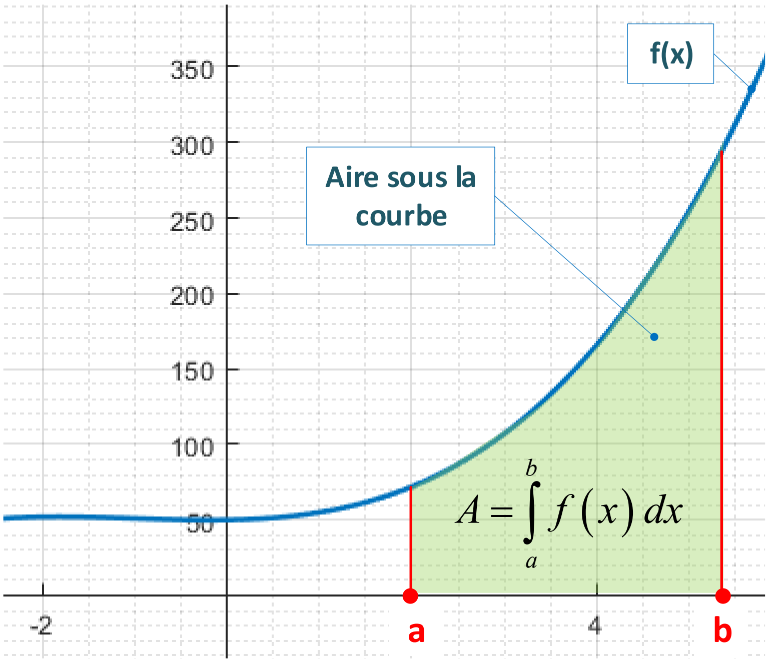


Figure 691 : calcul de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle [a ; b]

Pour réaliser une intégration numérique et calculer cette aire A, il faut dans un premier temps discrétiser l'intervalle [a ; b] en N intervalles de longueur identique en choisissant un pas d'intégration **h**. Plus ce pas sera petit et plus le calcul numérique sera précis.

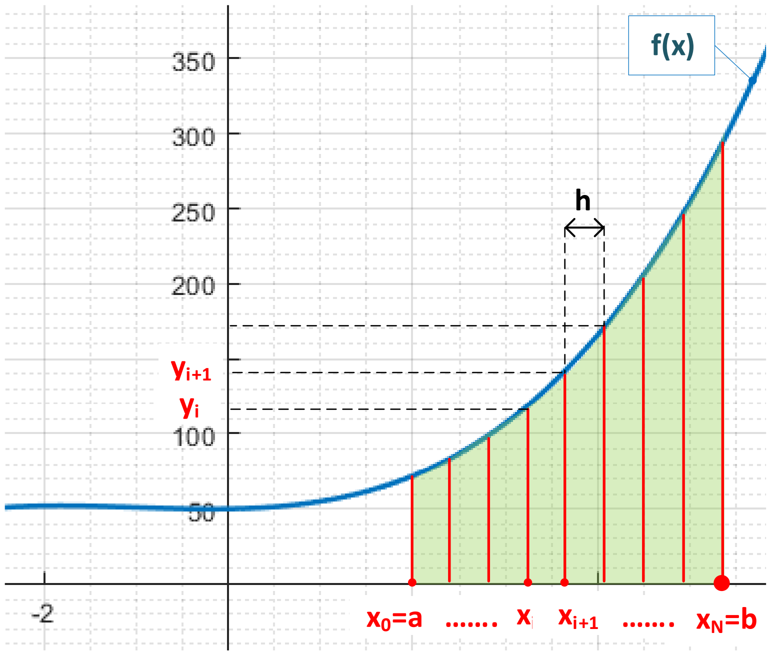


Figure 692 : discrétisation du domaine d'intégration

La fonction à intégrer sera alors remplacée par son évaluation numérique y_i en chaque point x_i de l'intervalle [a ; b].

Les points x_i sont définis tels que : $\boxed{x_i = a + i.h}$

Les valeurs de y_i sont calculées à partir des x_i: $\boxed{y_i = f\left(x_i\right)}$

Il faut ensuite choisir une méthode d'interpolation de la fonction f(x) entre deux valeurs de y_i. Nous aborderons deux cas d'interpolations :

- Interpolation de degré 0 : La fonction gardera une valeur constante à l'intérieur d'un intervalle discrétisé. On parlera de méthode des rectangles (Figure 693). Le calcul numérique de l'intégrale se ramène à additionner l'aire de chaque rectangle élémentaire.

$$\boxed{I_{rec} = \sum_{i=0}^{i=N-1} h.y_i \simeq \int_a^b f\left(x\right)dx}$$

- Interpolation de degré 1 : La fonction sera remplacée par une interpolation linéaire à l'intérieur d'un intervalle discrétisé. On parlera de méthode des trapèzes (Figure 694). Le calcul numérique de l'intégrale se ramène à additionner l'aire de chaque trapèze élémentaire.

$$\boxed{I_{trap} = \sum_{i=0}^{i=N-1} h.\frac{y_i + y_{i+1}}{2} \simeq \int_a^b f\left(x\right)dx}$$

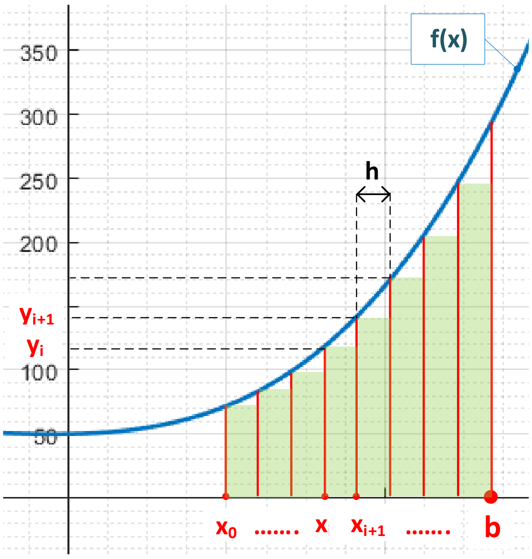


Figure 693 : méthode des rectangles

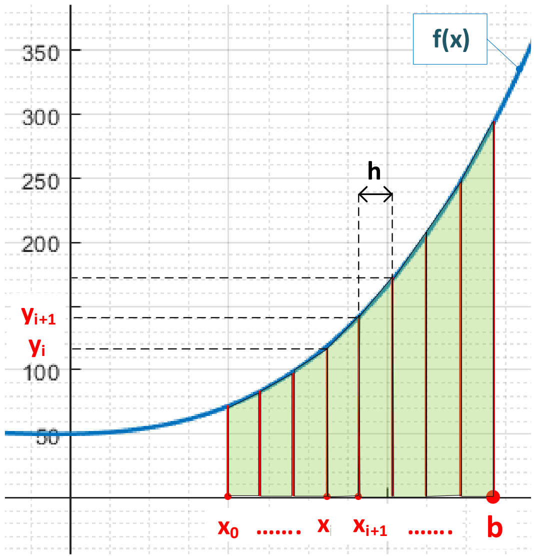


Figure 694 : méthode des trapèzes

Il apparaît déjà à ce stade que plus le polynôme d'interpolation est de degré élevé et plus la méthode d'intégration numérique sera précise. La méthode des trapèzes sera plus précise que la méthode des rectangles.

B. Codage en langage MATLAB

Vous pouvez trouver les fichiers de toutes les fonctions et scripts présentées dans ce paragraphe dans le dossier **Algorithmique_avec_MATLAB/ Intégration_numérique.**

L'expression mathématique de la fonction à intégrer sera définie dans la fonction **f3.m (**Figure 695). Cette expression peut être modifiée pour tester toutes les fonctions souhaitées. Il faudra juste vérifier que lors de l'appelle de la fonction l'intervalle d'étude [a ; b] appartienne bien au domaine de définition de la fonction. On choisira $f_3(m) = \cos(x)$.

```
%% f3.m
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% f3.m contient l'expression mathématique de la fonction à intégrer

%%
function y = f3(x)
y = cos(x);
end
```

Figure 695 : codage de la fonction f3.m qui contient l'expression de la fonction à intégrer

1. Méthode des rectangles

Pour calculer l'intégrale d'une fonction par la méthode des rectangles, nous allons créer la fonction **fintegration_rec** (a,b,nb_points,f) (Figure 696).

Cette fonction prendra en arguments :
a : borne inférieure de l'intervalle d'étude

b : borne supérieur de l'intervalle d'étude
nb_points : nombre de points à calculer
f : fonction à intégrer

La fonction aura comme sorties :
t : vecteur contenant les instants correspondant aux points ou la valeur de l'intégrale est calculée
df : vecteur contenant les valeurs de la fonction intégrée numériquement

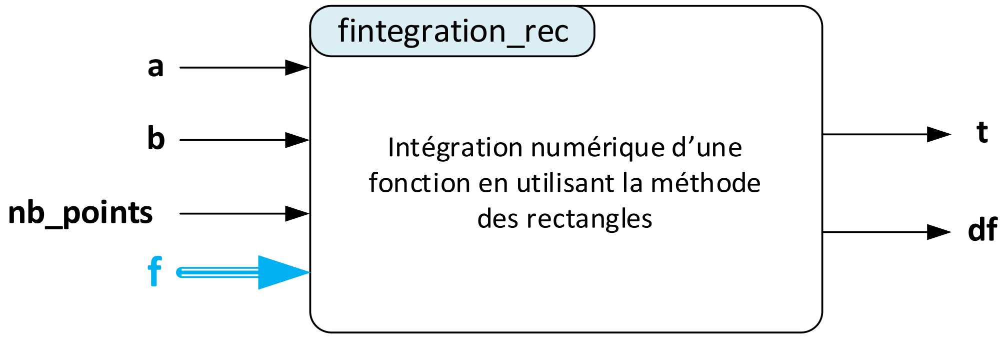


Figure 696 : fonction fintégration_rec (a,b,nb_point,f)

La Figure 697 montre le codage de la fonction **fintegration_rec** (a,b,nb_points,f).

```
%% [t,df] = fintegration_rec(a,b,nb_points,f)
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Calcul l'intégrale d'une fonction par la méthode des rectangles
%%
function [t,int_f] = fintegration_rec(a,b,nb_points,f)
% calcul du pas h
h = (b-a)/nb_points;

% définition des conditions initiale de l'intégration (par défaut CI=0)
int_f(1) = 0;
t(1) = a;
% La boucle va ajouter l'aire des rectangles pour chaque intervalle et
% créer le vecteur contenant les temps et le vecteur contenant les valeurs
% de l'intégrale de la fonction prise en argument

for k = [2:1:nb_points]
    % construction du vecteur des abscisses
    t(k) = t(k-1) + h;
    % construction du vecteur contenant les valeurs de l'intégrale
    % de la fonction
    int_f(k) = int_f(k-1) + f3(t(k)) * h;
end
```

Figure 697 : codage de la fonction fintegration_rec (a,b,nb_point,f)

2. Méthode des trapèzes

Pour calculer l'intégrale d'une fonction par la méthode des trapèzes, nous allons créer la fonction **fintegration_trap** (a,b,nb_points,f) (Figure 698).

Cette fonction prendra en arguments :
a : borne inférieure de l'intervalle d'étude
b : borne supérieur de l'intervalle d'étude

nb_points : nombre de points à calculer
f : fonction à intégrer

La fonction aura comme sorties :
t : vecteur contenant les instants correspondant aux points ou la valeur de l'intégrale est calculée
df : vecteur contenant les valeurs de la fonction intégrée numériquement

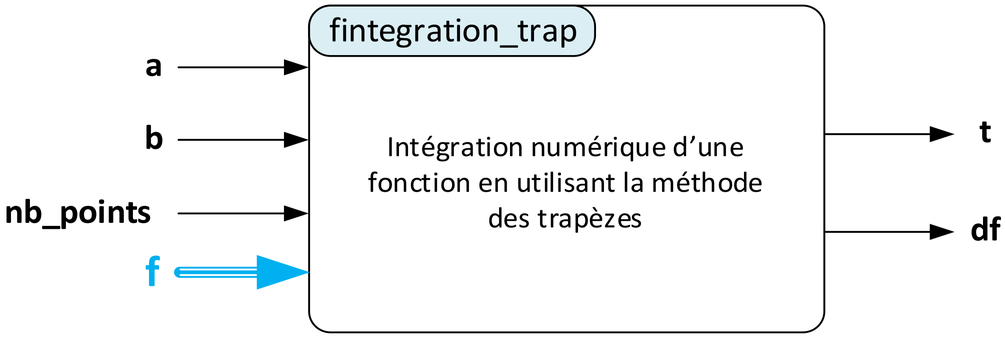


Figure 698 : fonction fintégration_trap (a,b,nb_point,f)

La Figure 699 montre le codage de la fonction **fintegration_trap** (a,b,nb_points,f).

```
%% [t,df] = fintegration_trap(a,b,nb_points,f)
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Calcul l'intégrale d'une fonction par la méthode des trapèzes
%%
function [t,int_f] = fintegration_trap(a,b,nb_points,f)
% calcul du pas h
h = (b-a)/nb_points;

% définition des conditions initiale de l'intégration (par défaut CI=0)
int_f(1) = 0;
t(1) = a;

% La boucle va ajouter l'aire des trapèzes pour chaque intervalle et
% créer le vecteur contenant les temps et le vecteur contenant les valeurs
% de l'intégrale de la fonction prise en argument
for k = [2:1:nb_points]
    % construction du vecteur des abscisses
    t(k) = t(k-1) + h;
    % construction du vecteur contenant les valeur de l'intégrale
    % de la fonction
    int_f(k) = int_f(k-1) + (f3(t(k))+f3(t(k-1))) * h/2;
end
```

Figure 699 : codage de la fonction fintegration_trap (a,b,nb_point,f)

3. Calcul exact de l'intégrale d'une fonction en utilisant le calcul symbolique

Afin de pouvoir évaluer l'erreur induite par les différentes méthodes d'intégration numérique, nous allons créer une fonction **fintegration_ana_symbolique** (a,b,nb_points,f) qui calcule l'intégrale analytique exacte d'une fonction en calcul symbolique (Figure 700). Cette intégration constituera la référence pour calculer l'erreur.

Cette fonction prendra en arguments :
a : borne inférieure de l'intervalle d'étude

b : borne supérieur de l'intervalle d'étude
nb_points : nombre de points à calculer
f : fonction à dériver

La fonction aura comme sorties :
t : vecteur contenant les instants correspondant aux points ou l'intégrale est calculée
df : vecteur contenant les valeurs de l'intégrale de la fonction calculée analytiquement

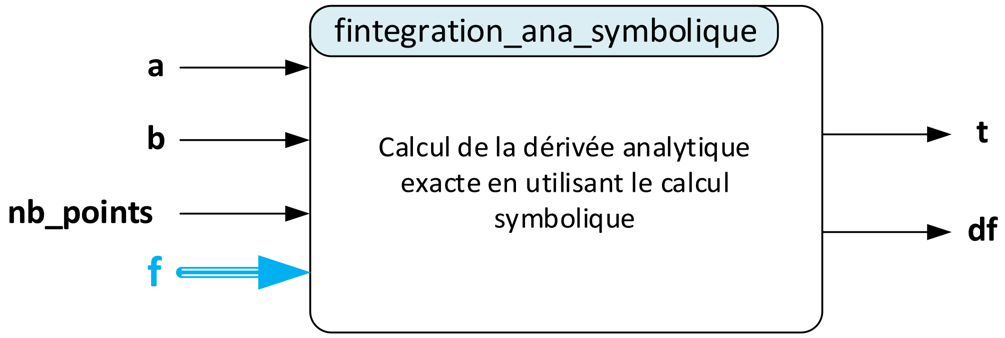


Figure 700 : fonction fintegration_ana_symbolique (a,b,nb_point,f)

La Figure 701 montre le codage de la fonction **fintegration_ana_symbolique** (a,b,nb_points,f).

```
%% [t,df] = fintegration_anasymbolique(a,b,nb_points,f)
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Calcul analytique exacte de l'intégrale d'une fonction en utilisant
% le calcul symbolique

function [t,int_f]=fintegration_ana_symbolique(a,b,nb_points,f)
h = (b-a)/nb_points;
t = [a:h:b];
% x est déclarée comme variable symbolique
syms x;

% création de la fonction symbolique f_symbolique à partir de f(x)
f_symbolique(x) = f(x);

% intégration de la fonction f_symbolique pour créer la fonction dérivée
% symbolique
int_f_symbolique(x) = int(f_symbolique,x);

% calcul des valeurs du vecteur int_f qui contient les valeurs de
% l'intégrale de la fonction calculée analytiquement
int_f = int_f_symbolique(t);

% conversion de la fonction symbolique en double précision
int_f = double(int_f);


int_f(end) = [];
t(end) = [];
end
```

Figure 701 : codage de la fonction fintegration_ana_symbolique (a,b,nb_point,f)

C. Exploitation de l'algorithme

1. Comparaison des différentes méthodes d'intégration numérique

Afin d'évaluer les écarts entre les différentes méthodes d'intégration numérique et l'intégrale de la fonction calculée analytiquement, nous allons créer un script qui va tracer les intégrales calculées avec les 3 méthodes dans la même fenêtre graphique, puis quantifier et tracer l'amplitude comparée de ces écarts.

Ouvrir le script **num_integration_plot_comparaison.m**.

Le script est structuré en trois sections (Figure 702) :

- Définition de l'intervalle d'étude de la fonction **[a ;b]** et du nombre de points **nb_points** à calculer pour tracer les courbes
- Appel des différentes fonctions et tracé des différentes courbes sur la même fenêtre graphique
- Evaluation des écarts entre l'intégrale analytique et les deux méthodes d'intégration numérique et tracé des écarts sur la même fenêtre graphique

```
%% num_integration_comparaison
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
%Calcul numérique de l'intégrale  d'une fonctionn en utilisant différentes
% methodes de calcul:
% - méthode des rectangles
% - méthode des trapèzes
% Une comparaison est effectuée avec le calcul de l'intégrale théorique
% exacte effectuée en calcul symbolique
% Il est possible de faire varier l'intervalle [a;b] d'étude de la fonction
% et le nombre de points nb_points pris en compte pour le calcul
% La fonction à intégrer est stockée dans la fonction f3.m

%% Script
% définition de l'intervalle d'étude  [a;b] de la fonction considérée
a = 0;
b = 10;

% définition du nombre de point à utiliser pour le calcul
nb_points = 20;
close all;
%% Calcul et tracé de l'intégrale de la fonction en utilisant différente méthodes

% création et positionnement de la fenêtre graphique

figure('Units','centimeters','Position',[2 8 18 12]);

grid on; grid minor; hold on;

% calcul analytique exacte et tracé de l'intégrale de la fonction f en
% utilisant le calcul symbolique
[t_ana_symbolique,int_f_ana_symbolique] =
fintegration_ana_symbolique(a,b,nb_points,@f3);
plot(t_ana_symbolique,int_f_ana_symbolique,'red','LineWidth',2);

% calcul et tracé de l'intégrale de la fonction en utilisant la méthode des
% rectangles
[t_rec,int_f_rec] = fintegration_rec(a,b,nb_points,@f3);
```

```
plot(t_rec,int_f_rec,'cyan','LineWidth',2);

% calcul et tracé de l'intégrale de la fonction en utilisant la méthode des
% trapèzes
[t_trap,int_f_trap] = fintegration_trap(a,b,nb_points,@f3);
plot(t_trap,int_f_trap,'blue','LineWidth',2);
% titre et légende

title({'Comparaison des méthodes d''intégration numérique';...
    ' de la fonction f3'});


legend('Intégrale calculée analytiquement','Intégrale calculée avec la méthode
des rectangles',...
    'Intégrale calculée avec la méthode des trapèzes');


%% %% Calcul des différents écarts en prenant comme référence le calcul
% de l'intégrale exacte déterminée en calcul symbolique

error_rec = int_f_ana_symbolique - int_f_rec;
error_trap = int_f_ana_symbolique - int_f_trap;

% création du vecteur des abscisses

t = [a:(b-a)/nb_points:b];

t(end) = [];

% création et positionnement de la fenêtre graphique

figure('Units','centimeters','Position',[22 8 18 12]);
hold on; grid on; grid minor;

% tracé des différents écarts

plot(t,error_rec,'green','LineWidth',2)
plot(t,error_trap,'blue','LineWidth',2)

% titre et légende

title({'Erreurs comparées des différentes méthodes d''intégration numérique';...
    'par rapport à l''intégrale calculée analytiquement'});

legend('Méthode des rectangles','Méthode des trapèzes')

xlim([a b]);
```

Figure 702 : comparaison des différentes méthodes de dérivation numérique

Dans un premier temps le script sera exécuté sur l'intervalle [0 ; 10] avec 20 points calculés. La fonction définie dans **f3.m** est la fonction f(x) = cos(x). Cette fonction peut être modifiée par l'utilisateur.

L'exécution du script permet de visualiser les résultats du calcul numérique de l'intégrale de la fonction avec les différentes méthodes de calcul (Figure 703, Figure 704 et Figure 705).

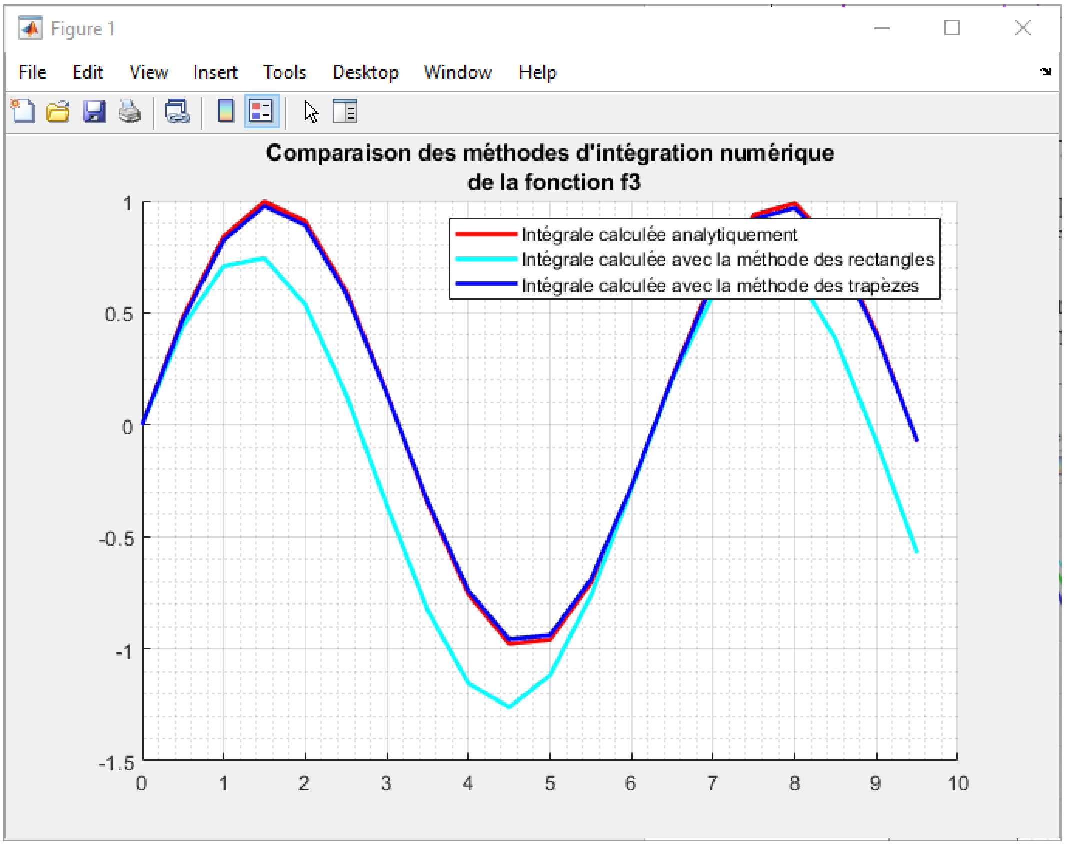


Figure 703 : comparaison des différentes méthodes d'intégration numérique

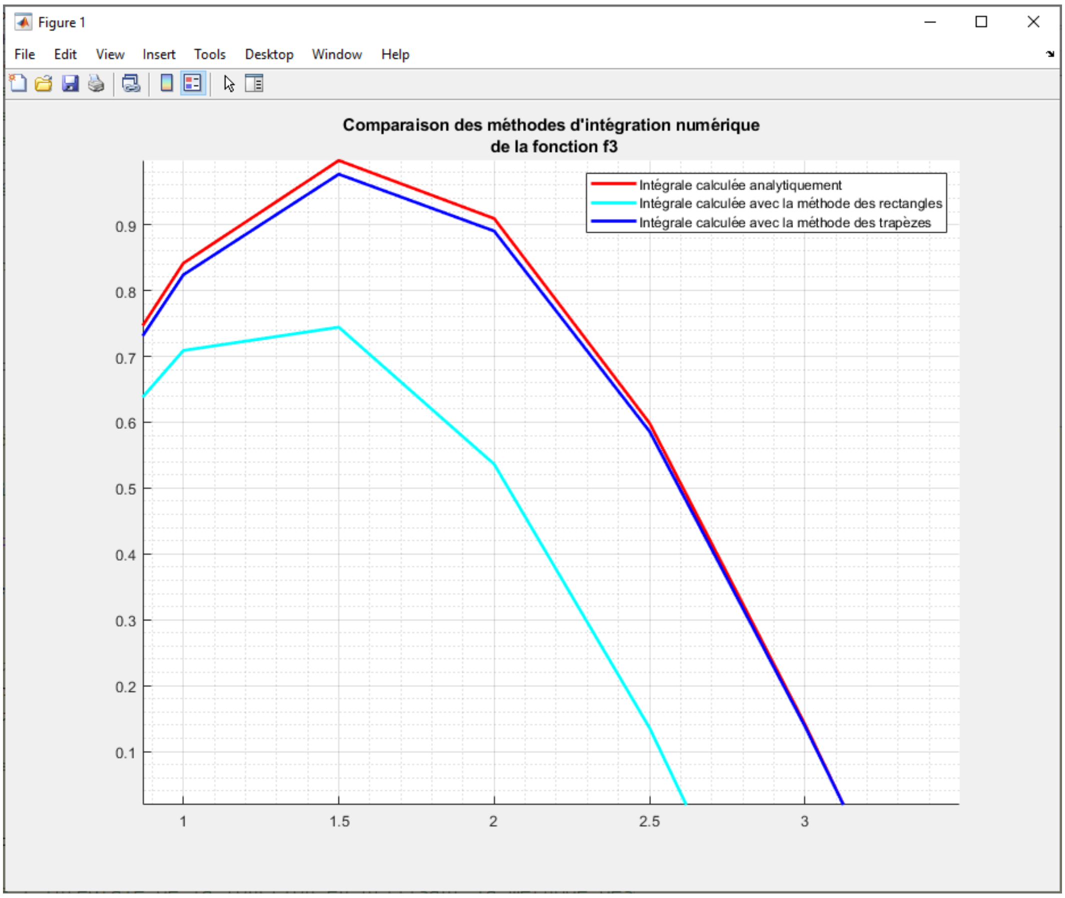


Figure 704 : zoom sur la courbe

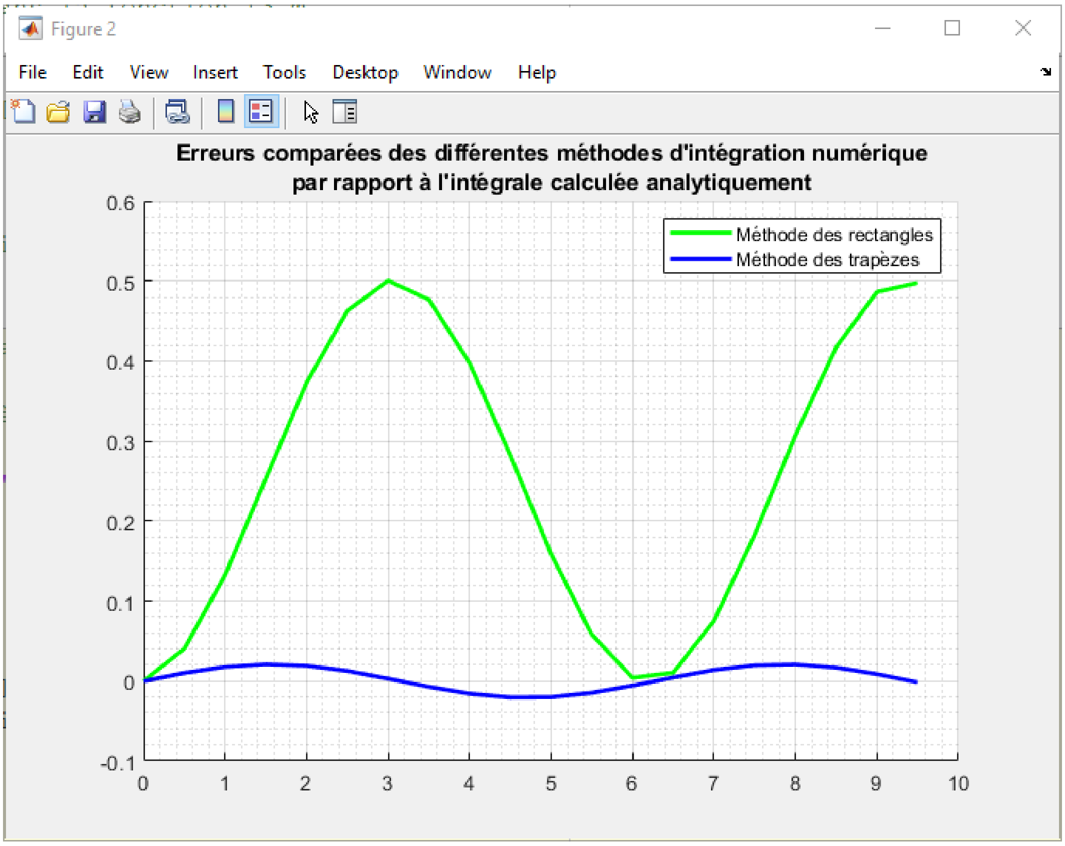


Figure 705 : visualisation des erreurs induites par les différentes méthodes d'intégration numérique

L'analyse des différents courbes nous permet de voir de manière évidente que la méthode des trapèzes est plus précise que la méthode des rectangles.

2. Quantification et visualisation de l'erreur induite par les différentes méthodes

Il serait utile d'avoir une idée de l'évolution de cette erreur en fonction du nombre de point calculés et donc en fonction du pas $h = \dfrac{b-a}{nb\_\text{points}}$.

Pour cela ouvrir le script **num_integration_plot_comparaison_subplot.m**.

Ce script permet de tracer 4 courbes avec un nombre de points calculés différents pour chaque courbe et de voir ainsi l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de points et du pas h choisi pour le calcul. Les 4 courbes correspondent à 4 valeurs du nombre de points calculés choisies équitablement réparties entre les variables **nb_points_min** et **nb_points_max** définies en début de script.

Le script est structuré en deux sections (Figure 706).

- Définition de l'intervalle d'étude de la fonction **[a ; b]** et du nombre de points **nb_points_min** et **nb_points_max**
- Appel des différentes fonctions et tracé des différentes courbes sur 4 fenêtres graphiques différentes

```
%% num_integration_comparaison_subplot
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
%
% Calcul numérique de l'intégrale  d'une fonctionn en utilisant différentes
% methodes de calcul:
% - méthode des rectangles
% - méthode des trapèzes
% Une comparaison est effectuée avec le calcul de l'intégrale théorique
% exacte effectuée en calcul symbolique
% Il est possible de faire varier l'intervalle [a;b] d'étude de la fonction
% Représentation de 4 courbes correspondant à 4 valeurs du nombres de
% points calculés choisies équitablement réparties entre nb_points_min et
% nb_points_max
% La fonction à intégrer est stockée dans la fonction f3.m
%% Script
% définition de l'intervalle d'étude  [a;b] de la fonction considérée
a = 0;
b = 10;

% spécification des nombres de points mini et maxi
nb_points_min = 10;
nb_points_max = 50;
pas = round((nb_points_max - nb_points_min) / 3);
%%
fig = figure('Units','centimeters','Position',[1 1 35 25]);
set(fig,'Color','white');
sgtitle({'Comparaison des différentes méthodes d''intégration numérique';...
    ' de la fonction f3 en fonction du nombre de points calculés'});

% initialisation du compteur de boucle
k = 1;

for nb_points = nb_points_min : pas : nb_points_max;

subplot(2,2,k); hold on; grid on; grid minor;

% calcul analytique exacte et tracé de l'intégrale de la fonction f en
% utilisant le calcul symbolique
[t_ana_symbolique,int_f_ana_symbolique] =
fintegration_ana_symbolique(a,b,nb_points,@f3);
plot(t_ana_symbolique,int_f_ana_symbolique,'red','LineWidth',2);

% calcul et tracé de l'intégrale de la fonction en utilisant la méthode des
% rectangles
[t_rec,int_f_rec] = fintegration_rec(a,b,nb_points,@f3);
plot(t_rec,int_f_rec,'cyan','LineWidth',2);

% calcul et tracé de l'intégrale de la fonction en utilisant la méthode des
% trapèzes
[t_trap,int_f_trap] = fintegration_trap(a,b,nb_points,@f3);
plot(t_trap,int_f_trap,'blue','LineWidth',2);

% legend('dérivée analytique','différence finie centrée',...
%     'différence finie progressive','différence fine rétrograde');

title('Nombre de points calculés  ' + string(nb_points))
k = k + 1;
end
```

```
% spécification de la légende générale du graphique
leg = legend('Intégration analytique','Méthode des rectangles',...
    'Méthode des trapèzes');

% Positionnement de la légende au centre du graphique
newPosition = [0.45 0.47 0.1 0.07];
newUnits = 'normalized';
set(leg,'Position', newPosition,'Units', newUnits);
```

Figure 706 : script permettant de visualiser l'influence du pas

L'exécution du script permet de visualiser l'influence du pas sur l'allure des courbes (Figure 656).

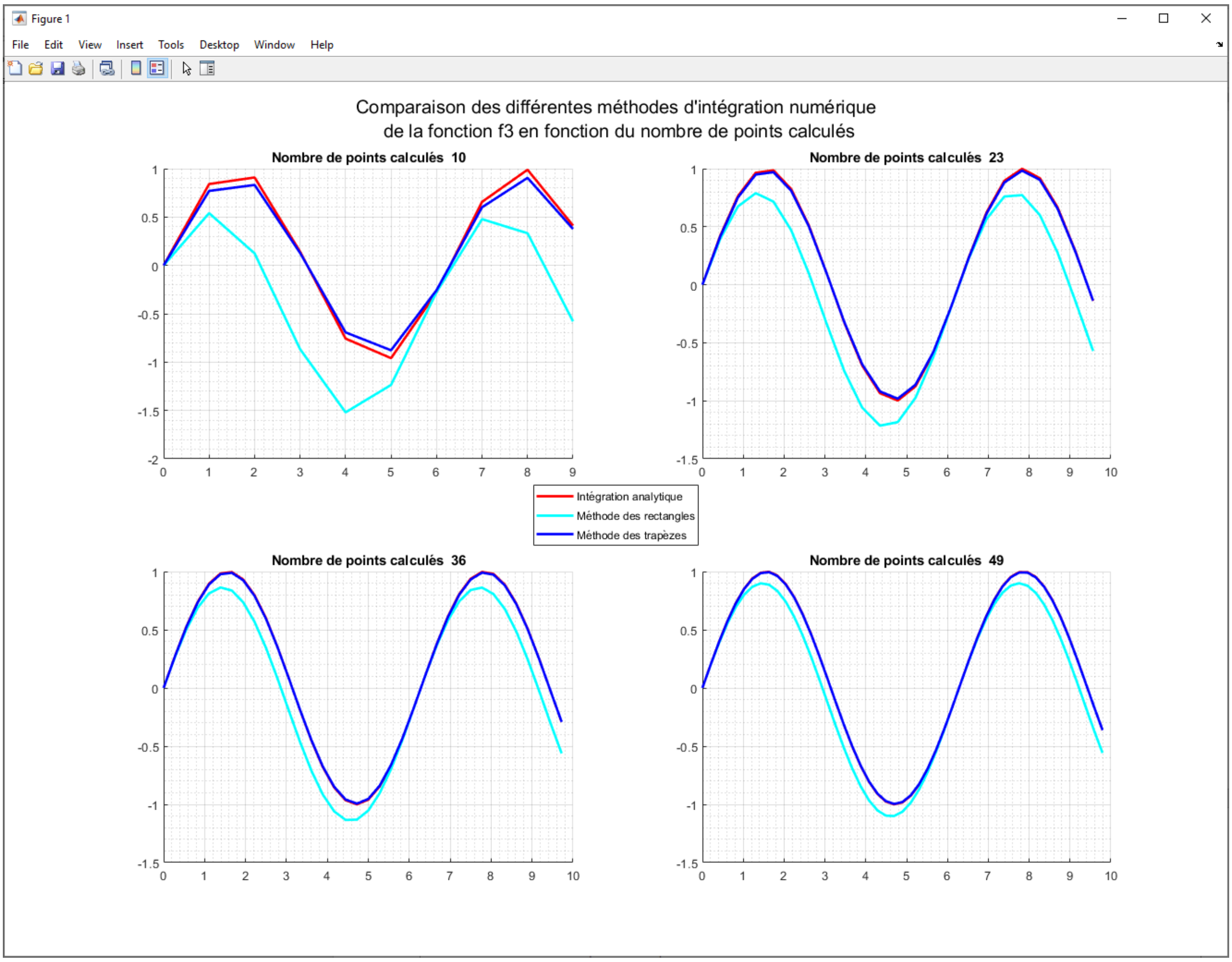


Figure 707 : influence du pas sur l'allure des courbes

L'analyse de ces courbes nous confirme que l'erreur va diminuer avec le pas mais ne nous permet pas de connaître la loi d'évolution de l'erreur en fonction du pas h. Lors de l'utilisation d'un processus d'intégration numérique, il est important de déterminer cette loi d'évolution.

3. Détermination de la loi d'évolution de l'erreur en fonction du pas

Pour connaître la loi d'évolution de cette erreur, il suffit de se placer en un point x_0 arbitraire de l'intervalle et de calculer l'erreur pour différentes valeurs du pas h.

L'erreur en fonction du pas h se définie de la manière suivante :

- Pour la méthode des rectangles

$$f_{err\_rec}(h)=\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{i=0}^{i=N-1} h.y_i$$

- Pour la méthode des trapèzes :

$$f_{err\_trap}(h)=\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{i=0}^{i=N-1} h.\frac{y_i+y_{i+1}}{2}$$

Nous allons construire un script qui se placera arbitrairement au centre de notre intervalle d'étude et qui va tracer automatiquement l'erreur en fonction du pas h. Le script contient une boucle qui calculera les différentes fonctions erreurs pour un nombre de points allant de 100 à 1000 avec un incrément de 100.

Le pas h est défini par $h=\dfrac{b-a}{nb\_\text{points}}$.

La boucle permettra donc de calculer 10 valeurs de l'erreur au point x_0 pour les deux méthodes d'intégration numérique. Le script permet ensuite d'interpoler les points calculés avec une fonction polynomiale adaptée pour trouver l'ordre de variation des fonctions erreurs.

Ouvrir le script **num_integration_error.m** (Figure 708).

```
%% num_integration_error
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Calcul de la forme mathémathique de l'erreur effectuée lors des
% opérations d'intégration numérique  pour différentes méthodes de calcul:
% - méthode des rectangles
% - méthode des trapèzes
% Une comparaison est effectuée avec le calcul de l'intégrale théorique
% exacte effectuée en calcul symbolique
% On se place arbitrairement au centre de l'intervalle d'étude de la
% fonction en un point x0 afin d'évaluer l'erreur en ce point pour
% différentes valeurs de h et du nombre de points de calcul
% on utilise ensuite une interpolation polynômiale pour déterminer la forme
% mathématique de l'erreur en fonction de h
% La fonction à intégrer est stockée dans la fonction f3.m
%% Script
% définition de l'intervalle d'étude [a;b] de la fonction considérée
a = 0;
b = 10;

% initialisation du compteur qui servira d'indice
k = 1;

%% On définit ici une boucle qui permettra de calculer l'erreur pour un
% échantillon de points allant de 100 points jusqu'à 1000 points par pas
% de 100 pour toutes les méthodes de dérivation

for nb_points = 100:100:1000

% calcul analytique exacte et tracé de l'intégrale de la fonction f en
% utilisant le calcul symbolique
[t_ana_symbolique,int_f_ana_symbolique] =
fintegration_ana_symbolique(a,b,nb_points,@f3);

% calcul et tracé de l'intégrale de la fonction en utilisant la méthode des
% rectangles
```

```
[t_rec,int_f_rec] = fintegration_rec(a,b,nb_points,@f3);

% calcul et tracé de l'intégrale de la fonction en utilisant la méthode des
% trapèzes
[t_trap,int_f_trap] = fintegration_trap(a,b,nb_points,@f3);

% calcul des erreurs au point x0, milieu de l'intervalle d'étude en prenant
% comme référence la dérivée exacte déterminée en calcul symbolique
x0 = round(nb_points/2);
error_f_rec_h(k) = int_f_ana_symbolique(x0) - int_f_rec(x0);
error_f_trap_h(k) = int_f_ana_symbolique(x0) - int_f_trap(x0);
% détermination de la valeur du pas h(k) pour l'itération en cours
h(k) = (b-a)/nb_points;

% incrémentation de k
k = k + 1;
end

%% Tracé et interpolation de l'erreur pour la méthode des rectangles
% Création d'une nouvelle figure pour les graphiques
figure('Units','centimeters','Position',[2 8 18 12]);
hold all;grid on; grid minor;
plot(h,error_f_rec_h,'sm','MarkerSize',10,'LineWidth',2);

% Calcul des coefficients du polynôme d'interpolation
coeff_poly_inter_rec = polyfit (h,error_f_rec_h,1);

% Tracé du polynôme d'interpolation
t = linspace(0,h(1),100);
poly_inter_rec = polyval(coeff_poly_inter_rec,t);
plot(t,poly_inter_rec,'LineWidth',2);

% Ecriture de la légende
legend('Méthode des rectangles',...
     string(coeff_poly_inter_rec(2)) + '  h + ' ...
     + string(coeff_poly_inter_rec(1)),'FontSize',12);

% Ecriture du titre et des étiquettes des axes
title({'Variation de l''erreur en fonction du pas h' ;...
    'pour la méthode des rectangles'});

xlabel('pas h');
ylabel('erreur');

%% Tracé et interpolation de l'erreur pour la méthode des trapèzes
figure('Units','centimeters','Position',[22 8 18 12]);
hold all;grid on; grid minor;
plot(h,error_f_trap_h,'sb','MarkerSize',10,'LineWidth',2)

% Détermination du polynome d'interpolation pour la différence finie
% progressive

% Calcul des coefficients du polynôme d'interpolation
coeff_poly_inter_trap = polyfit (h,error_f_trap_h,2);

% Tracé du polynôme d'interpolation
t = linspace(0,h(1),100);
poly_inter_trap = polyval(coeff_poly_inter_trap,t);
plot(t,poly_inter_trap,'LineWidth',2);

% écriture de la légende
```

```
legend('Méthode des trapèzes',...
     string(coeff_poly_inter_trap(3)) + '  h^2 + ' ...
     + string(coeff_poly_inter_trap(2)) + '  h + ' ...
     + string(coeff_poly_inter_trap(1)),...
     'Location','southwest','FontSize',12);

% titre et étiquette des axes
title({'Variation de l''erreur en fonction du pas h' ;...
    'pour la méthode des trapèzes'});

xlabel('pas h');
ylabel('erreur');
```

Figure 708 : script permettant de connaître l'ordre de variation des fonctions erreurs

Exécutez le script et analyser les courbes obtenues sur la Figure 709 et sur la Figure 710.

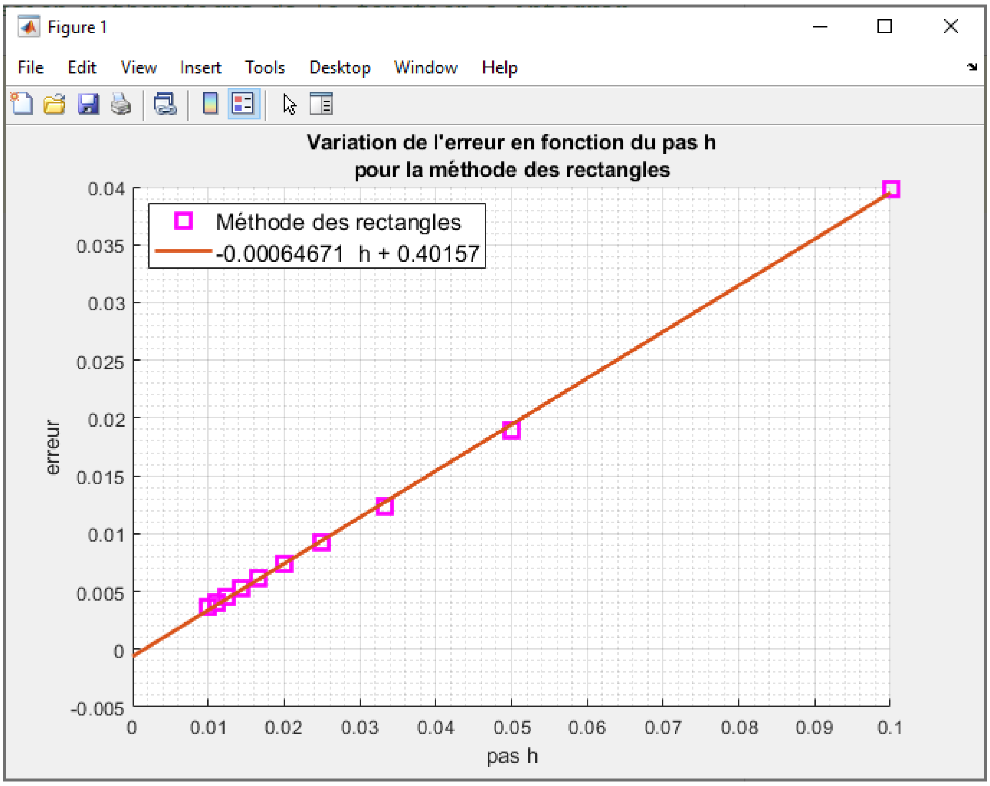


Figure 709 : variation de l'erreur d'intégration en fonction de h pour la méthode des rectangles

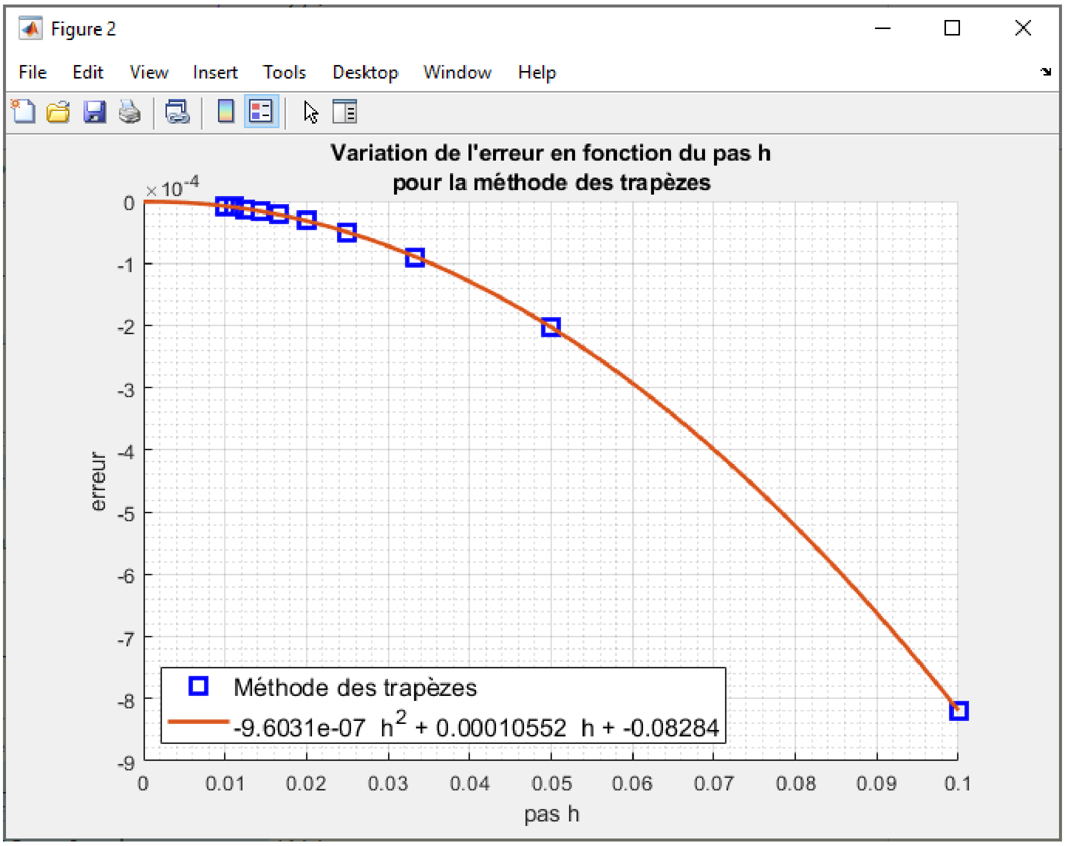


Figure 710 : variation de l'erreur de d'intégration en fonction de h pour la méthode des trapèzes

En observant les points qui représentent l'erreur en fonction du pas h, nous choisissons une régression linéaire pour interpoler l'erreur pour la méthode des rectangles et une interpolation polynomiale d'ordre 2 pour la méthode des trapèzes. Il apparait que ces choix permettent d'interpoler la série de données avec une excellente précision. Les équations des polynômes d'interpolation apparaissent dans les légendes des différentes fenêtres graphiques.

En conclusion :

- l'erreur pour la méthode des rectangles est d'ordre 1 en h
- l'erreur pour la méthode des trapèzes est d'ordre 2 en h

L'exploitation d'un algorithme peut donc nous amener à connaître la tendance de variation d'un paramètre en exploitant la puissance de calcul et en utilisant les outils adaptés. Notre seule intuition est parfois insuffisante et nous devons nous appuyer sur le potentiel de notre algorithme pour conforter nos prévisions.

4. Robustesse du processus

Afin de tester la robustesse de notre algorithme, nous pouvons tester plusieurs fonctions en modifiant la fonction **f3.m** et en reproduisant le processus.

Modifier la fonction **f3.m** pour reproduire l'analyse sur une fonction polynomiale $y(x)=5x^3-3x^2+5x+1$ (Figure 711).

```
function y = f3(x)
y = 5*x^3-3*x^2+5*x+1;
end
```

Figure 711 : modification de la fonction f1.m

Relancer les différents scripts pour visualiser les résultats dans les différentes figures.

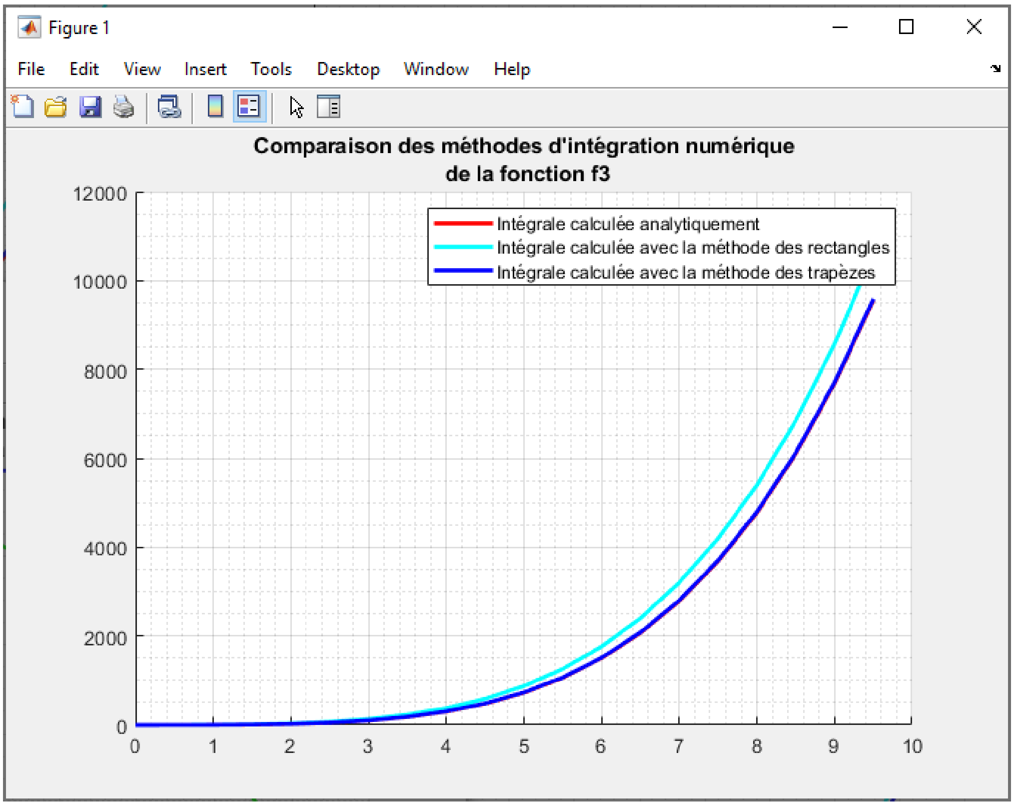


Figure 712 : comparaison des différentes méthodes d'intégration numérique

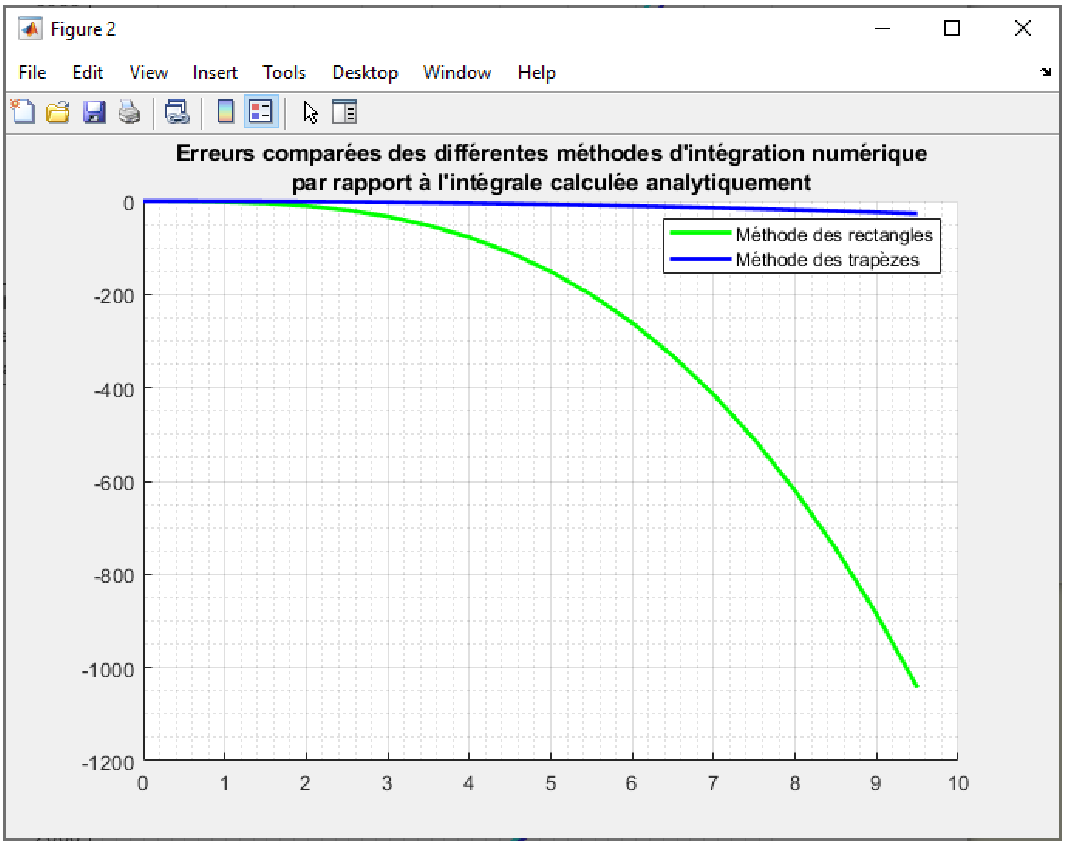


Figure 713 : visualisation des erreurs induites par les différentes méthodes d'intégration numérique

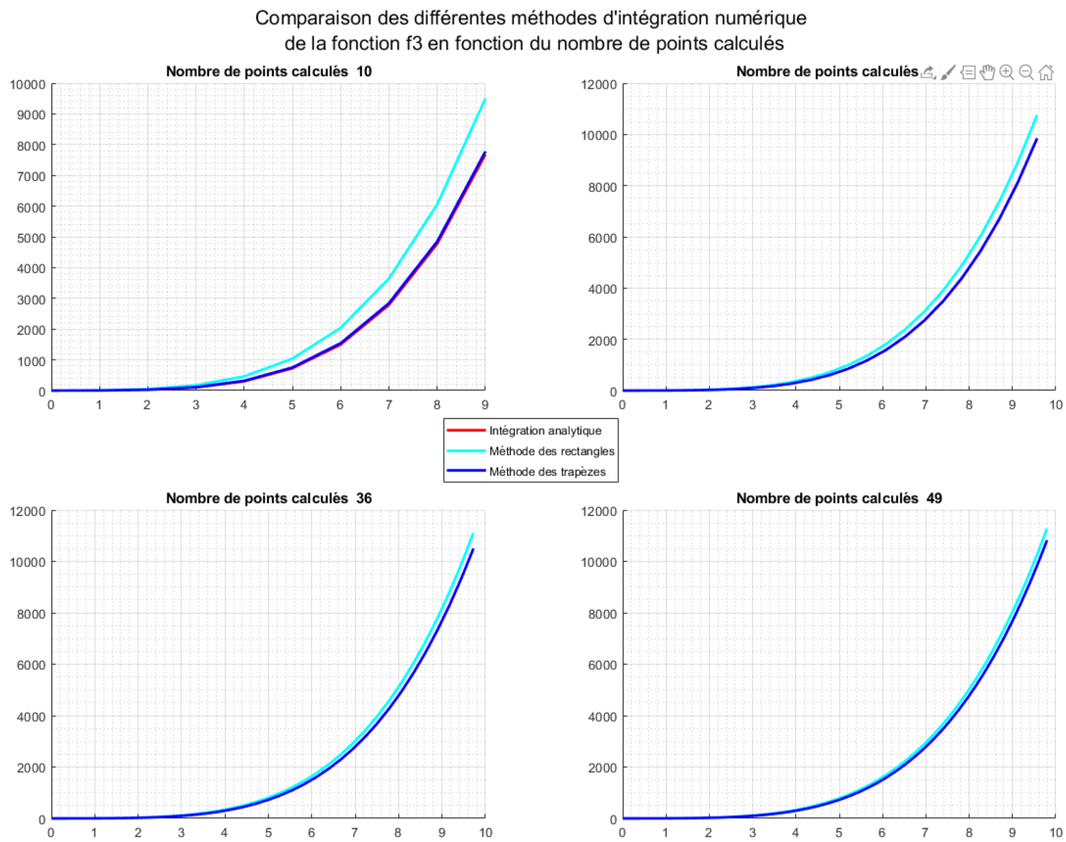


Figure 714 : influence du pas sur l'allure des courbes

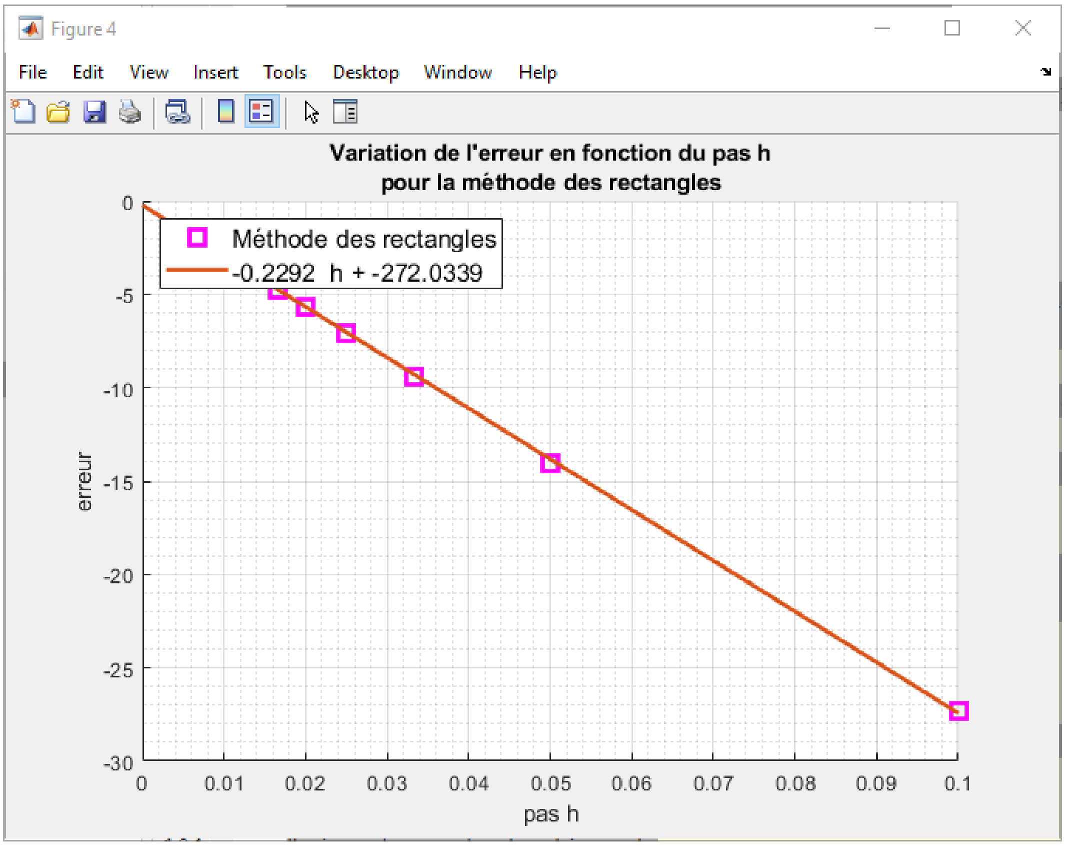


Figure 715 : variation de l'erreur d'intégration en fonction de h pour la méthode des rectangles

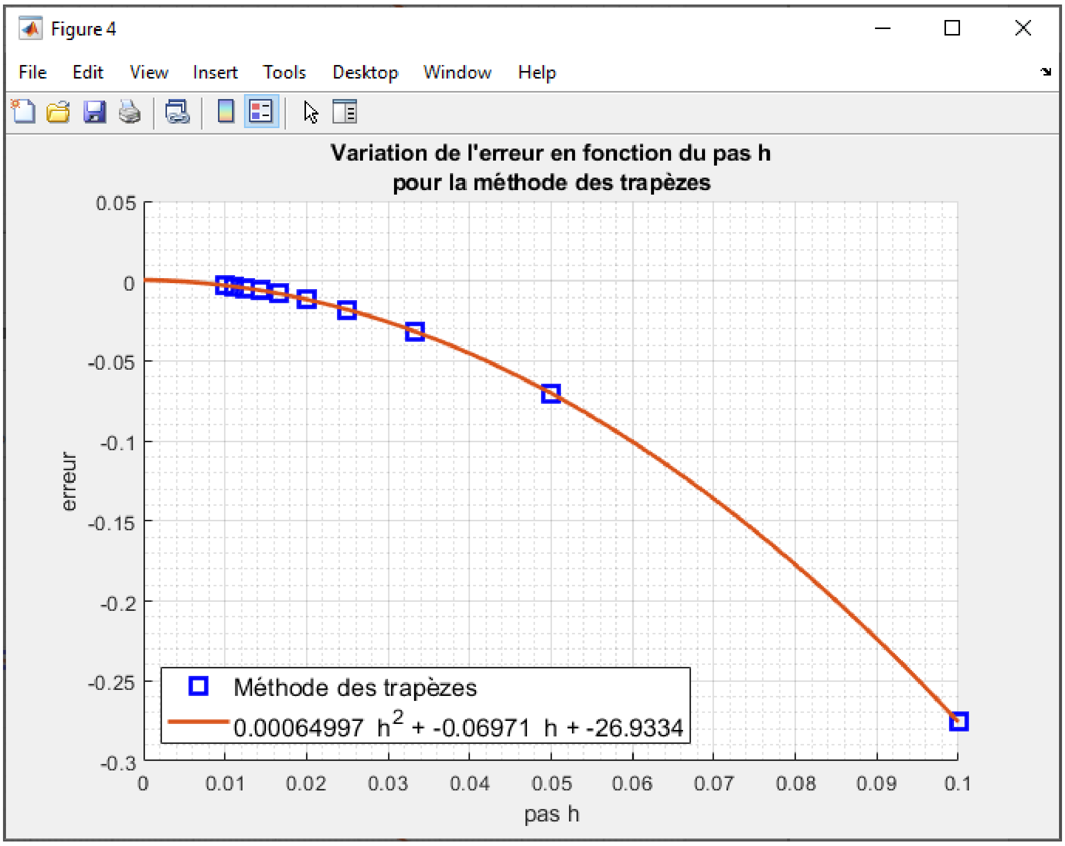


Figure 716 : variation de l'erreur d'intégration en fonction de h pour la méthode des trapèzes

D. Applications

1. Analyse d'une loi en trapèze de vitesse

Nous relevons à l'aide d'un accéléromètre monté sur le chariot d'un axe linéaire le signal a(t) de la Figure 717. Nous souhaitons à partir de ce signal calculer numériquement la vitesse v(t) et la position x(t) du chariot à chaque instant.

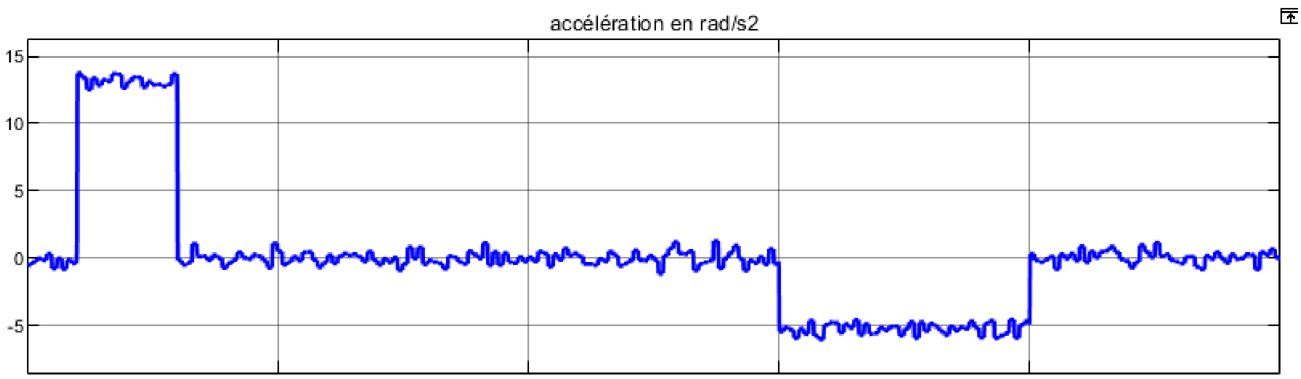


Figure 717 : relevé de l'accélération en fonction du temps

Pour avoir accès à la vitesse et à la position du chariot, nous allons mettre en place un processus d'intégration numérique. En intégrant l'accélération par rapport au temps, nous obtiendrons la vitesse v(t). En intégrant la vitesse par rapport au temps, nous obtiendrons la position x(t).

Nous considérons qu'à l'instant t=0, le chariot est à l'arrêt (v(0)=0) et que sa position initiale est prise comme origine (x(0)=0).

Pour effectuer le processus d'intégration numérique, nous utiliserons la méthode des trapèzes afin de minimiser l'erreur de calcul.

Ouvrir le script **Loi_en_trapeze_de_vitesse.m** (Figure 718).
Ce script permet de charger les données correspondant à la mesure de l'accélération. Ensuite un processus d'intégration numérique calcule la vitesse et la position. Les trois courbes sont tracées dans la même fenêtre graphique.

```
%% Loi_en_trapeze_de_vitesse.m
% Ivan LIEBGOTT @ décembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Calcul l'intégrale d'une fonction par la méthode des trapèzes
% Un relevé expérimental donne l'accélération en mm/s2 en fonction du
% temps. En utilisant l'intégration par la méthode des trapèzes, on calcule
% la vitesse et la position.
% les trois courbes sont tracées dans la même fenêtre graphique

% chargement des mesures de l'accélération
clear all;
load loi_en_trapeze_de_vitesse_data.mat

%% Calcul de la vitesse par intégration de l'acceleration

% définition des conditions initiale de la vitesse
vitesse(1) = 0;

% La boucle va ajouter l'aire des trapèzes pour chaque intervalle
% d'amplitude h = t(k-1)-t(k)
for k = [2:1:length(t)]
    % calcul du pas d'intégration
    h = t(k) - t(k-1);

    % construction du vecteur contenant les valeur de la vitesse en
    % utilisant la méthode des trapèzes
    vitesse(k) = vitesse(k-1) + (acceleration(k)+acceleration(k-1)) * h/2;
end

%% Calcul de la position par intégration de la vitesse

% définition des conditions initiale de la vitesse
position(1) = 0;

% La boucle va ajouter l'aire des trapèzes pour chaque intervalle
% d'amplitude h = t(k-1)-t(k)
for k = [2:1:length(t)]
    % calcul du pas d'intégration
    h = t(k) - t(k-1);

    % construction du vecteur contenant les valeur de la vitesse en
    % utilisant la méthode des trapèzes
    position(k) = position(k-1) + (vitesse(k)+vitesse(k-1)) * h/2;
end

% Tracé des trois courbes dans la même fenêtre graphique
```

```
figure('Units','centimeters','Position',[2 8 25 20]);
subplot(3,1,1);
plot(t,acceleration);
grid on; grid minor;
xlabel('temps en s');
ylabel('accélération en mm/s^2')
title('Mesure de l''accélération du chariot en fonction du temps en mm/s^2')

subplot(3,1,2);
plot(t,vitesse);
grid on; grid minor;
xlabel('temps en s');
ylabel('vitesse en mm/s')
title({'Vitesse du chariot en fonction du temps en mm/s',...
    'obtenue par intégration numérique'})

subplot(3,1,3);
plot(t,position);
grid on; grid minor;
xlabel('temps en s');
ylabel('Position en mm')
title({'Position du chariot en fonction du temps en mm',...
    'obtenue par intégration numérique'});

xlabel('temps en s');
ylabel('Position en mm')
title({'Position du chariot en fonction du temps en mm',...
    'obtenue par intégration numérique'});
```

Figure 718 : intégration numérique de l'accélération

Exécuter le script et observer le résultat obtenu sur la Figure 719.

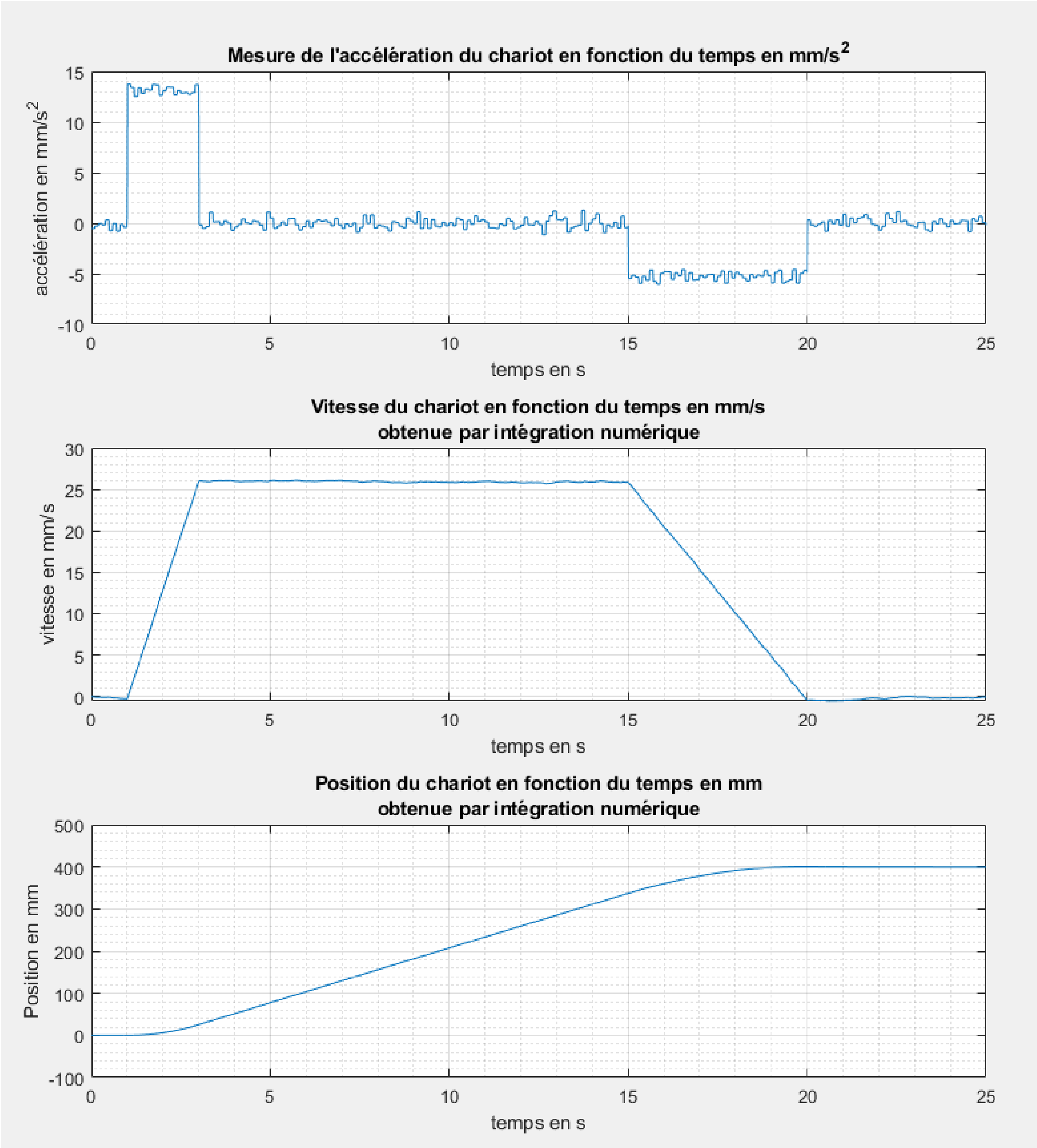


Figure 719 : loi en trapèze de vitesse

L'analyse de la courbe de vitesse nous donne la vitesse maximale atteinte par le chariot qui est de 26 mm/s. La courbe de position nous permet de déterminer la position finale qui est 400 mm.

VI. Filtrage d'un signal

A. Intérêt du filtrage d'un signal

Lors du processus d'acquisition d'une grandeur physique, les signaux provenant des capteurs sont très souvent perturbés par des signaux qui viennent s'ajouter au signal que l'on souhaite mesurer (Figure 720). Ce bruit prend souvent la forme d'un signal haute fréquence. Ces perturbations ou signaux parasites sont de différentes natures :

- Signal périodique 50 Hz, provenant du couplage électromagnétique entre le circuit utilisé et les conducteurs du réseau d'alimentation
- Perturbations électromagnétiques dues à la présence d'onde Hertzienne (téléphone portable, réseaux wifi…)
- Perturbations liées à la nature du circuit (bruit de fond)
- Discontinuités due à la nature des capteurs (codeur incrémental)

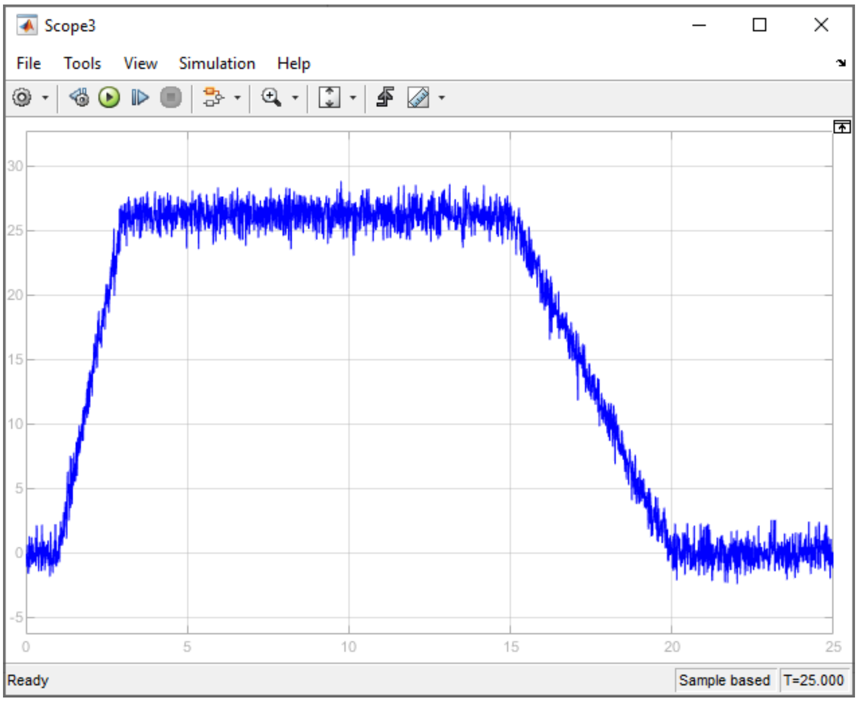


Figure 720 : exemple de signal bruité

Le filtrage consiste à extraire la composante que l'on souhaite mesurer en éliminant tous les bruits parasites ou à lisser un signal en vue d'un processus de traitement numérique (dérivation numérique en particulier).
La Figure 721 illustre le principe du filtrage numérique.

Figure 721 : filtre numérique

y_k : valeur numérique de l'échantillon en sortie de filtre
x_k : valeur numérique de l'échantillon en entrée de filtre
T_e : période d'échantillonnage

Nous verrons dans ce chapitre deux filtres élémentaires qui permettent de mettre en évidence l'intérêt du filtrage d'un signal.

- Le filtre à moyenne glissante
- Le filtre du premier ordre

Nous allons voir comment coder en langage MATLAB ces filtres élémentaires et les utiliser dans quelques cas pratiques.
Nous travaillerons sur le signal issu d'un codeur incrémental représenté sur la Figure 722 et sur la Figure 723. Les discontinuités dans le signal devront être atténuées par le processus de filtrage.

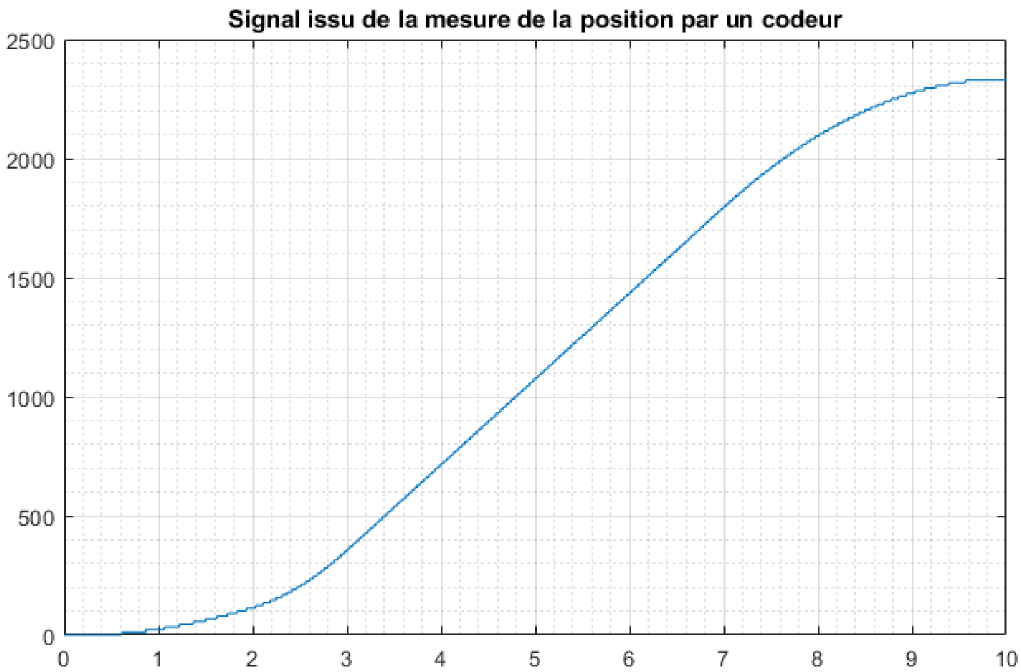


Figure 722 : mesure de la position à partir du signal d'un codeur incrémental

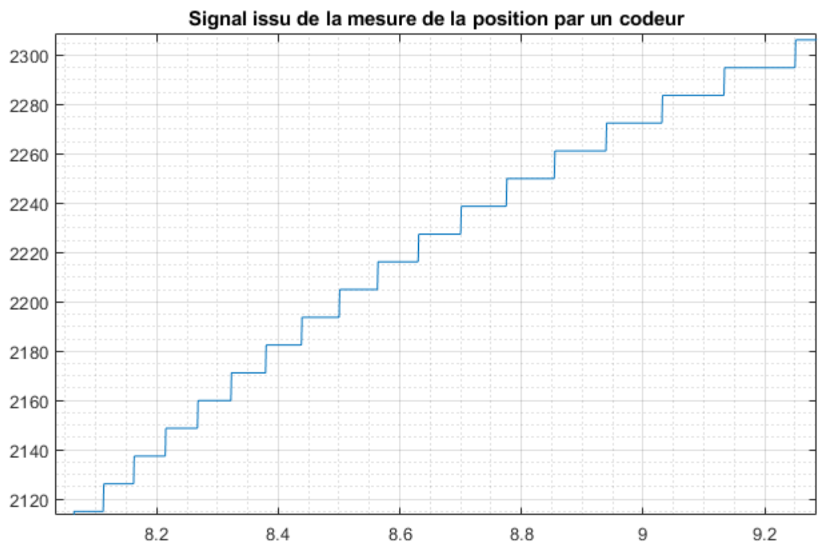


Figure 723 : zoom sur la courbe

B. Le filtre à moyenne glissante

Ce filtre très simple à coder est largement utilisé pour améliorer la qualité d'un signal bruité. Il permet de lisser le signal. Le principe est de calculer l'échantillon y_k comme étant la moyenne des n échantillons d'entrée précédents.

$$\boxed{y_k = \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{1}{n} x_{k-i}}$$

Par exemple si n=3, l'échantillon y_k sera calculé en faisant la moyenne des trois derniers échantillons :

$$y_k = \frac{1}{3}\left(x_k + x_{k-1} + x_{k-2}\right)$$

La valeur de n sera choisie en fonction de la fréquence du bruit que l'on souhaite supprimer et de la fréquence d'échantillonage. Parfois plusieurs essais doivent être réalisés pour obtenir un lissage satisfaisant sans trop retarder le signal filtré par rapport au signal d'origine. Dans tous les cas il faudra trouver le meilleur compromis sachant que la composante continue subira de toute façon une légère déformation.

La fonction **filtre_mgl(Y,n)** (Figure 724) permet le filtrage par moyenne glissante d'un signal Y en prenant n échantillons pour faire la moyenne.

Cette fonction prendra en arguments :
Y : vecteur contenant les valeurs de la fonction à filtrer
n : nombre d'échantillons à prendre en compte pour la moyenne

La fonction aura comme sorties :
Y_mgl : vecteur contenant les valeurs du signal filtré par moyenne glissante

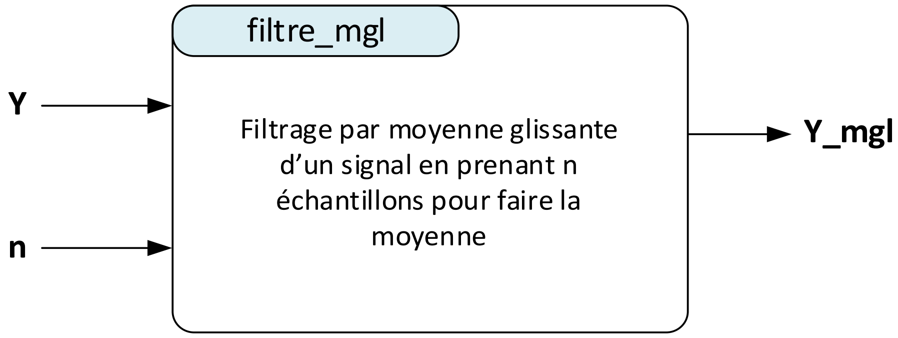


Figure 724 : fonction filtre_mgl(Y,n)

La Figure 725 montre le codage de la fonction **filtre_mgl(Y,n)**.

```
%% filtre_mgl(Y,n)
% Ivan LIEBGOTT @ Décembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Cette fonction permet de filtrer un signal en utilisant un filtre à
% moyenne glissante. Chaque point calculé représente la moyenne des n
% dernières valeurs du signal.
% Y : représente le vecteur contenant le valeurs du signal à filtrer
% n : nombre de points pris en compte pour faire la moyenne

function [Y_mgl] = filtre_mgl(Y,n)
% pour chaque point du signal Y à partir du point Y(n+1)
for p = n+1:1:length(Y)
    % calcul de la moyenne des n termes précédents
    moyenne_glissante = 0;
        for k = 1:1:n
        moyenne_glissante = moyenne_glissante + Y(p-k)/n;
        end
    % affectation de la valeur de l'échantillon pour la valeur de p
    Y_mgl(p) = moyenne_glissante;
% transposition pour obtenir une matrice colonne
Y_mgl = Y_mgl';
end
```

Figure 725 : codage de la fonction fliltre_mgl(Y,n)

Afin de tester cette fonction sur un signal en prenant plusieurs valeurs pour **n**, **ouvrir** le script **filtrage_mgl_n_variable.m** (Figure 726).

```
%% filtrage_mgl_n_variable
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Ce script permet de tester la fonction filtre_mgl(Y,n) qui permet de
% filtrer un signal en utilisant le principe de la moyenne glissante
% Le test est réalisé sur le signal issu d'un codeur
% Le script trace le signal non filtré et les signaux obtenus après
% filtrage par moyenne glissante en utilisant différentes valeurs du nombre
% n d'échantillons retenus pour faire la moyenne
%%
% Effacement des variables du workspace
clear all;

% chargement des données correspondant au signal du codeur et au temps dans
% le workspace
load filtrage_mgl.mat;

% spécification des valeurs mini et maxi de n

n_min = 10;
n_max = 110;
pas = round((n_max - n_min) / 5);

% création d'une nouvelle fenêtre graphique
fig = figure('Units','centimeters','Position',[2 5 33 23]);
set(fig,'Color','white');
hold all;

% tracé du signal du codeur non filtré
plot(t,position_codeur,'r','LineWidth',3);
```

```
%création d'une cellule pour stocker les lignes de la légende
Titre_Legende = cell(1,1);
Titre_Legende{1,1} = 'Signal brut';
ind_Legende = 2;

for n = n_min : pas : n_max;

% calcul du signal filtré à l'aide de la fonction filtre_mgl
pos_mgl = filtre_mgl(position_codeur,n);
Titre_Legende{1,ind_Legende} =  'n=' + string(n); % création de la ligne de la
légende

% Tracé du signal filtré correspondant à la valeur de n dans la même fenêtre
graphique
plot(t,pos_mgl);
ind_Legende = ind_Legende + 1;
end

grid on; grid minor;
% affichage de la légende
legend(Titre_Legende,'Location','northwest');

title('Filtrage d''un signal en utilisant un filtre à moyenne glissante avec n
compris entre'...
    + string(n_min) + ' et ' + string(n_max));
```

Figure 726 : script permettant de voir l'influence de n pour un filtre à moyenne glissante

Exécuter le script et observer le résultat sur la Figure 727 et sur la Figure 728.

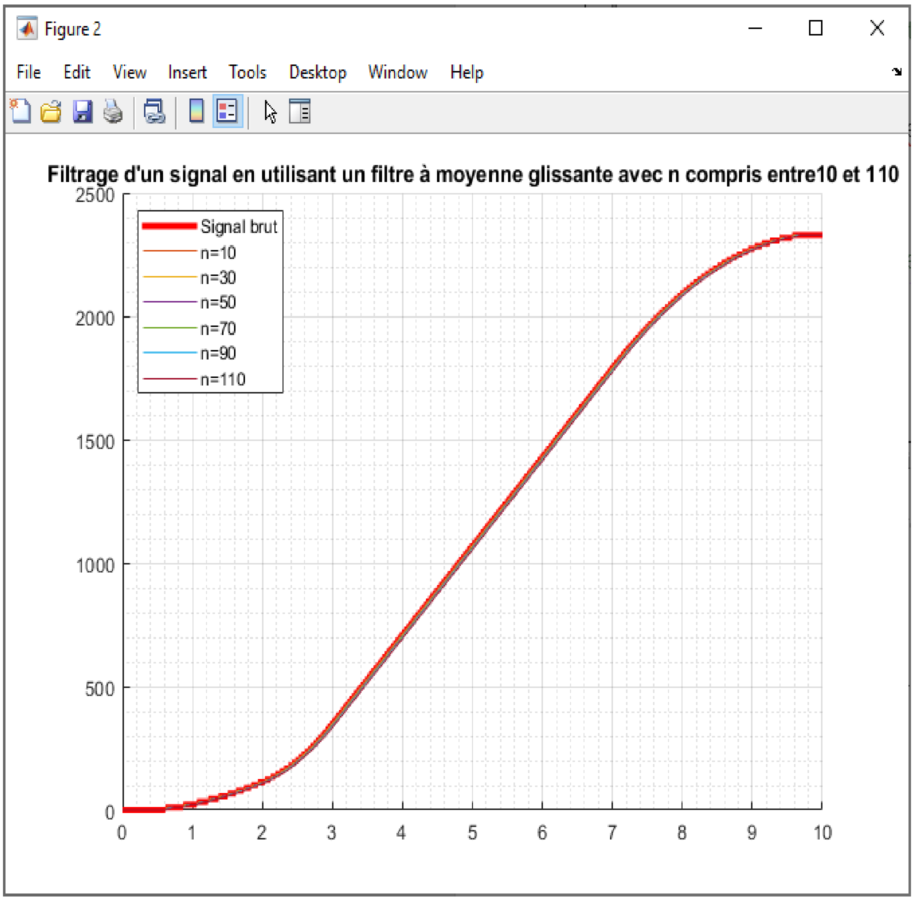


Figure 727 : filtrage par moyenne glissante d'un signal

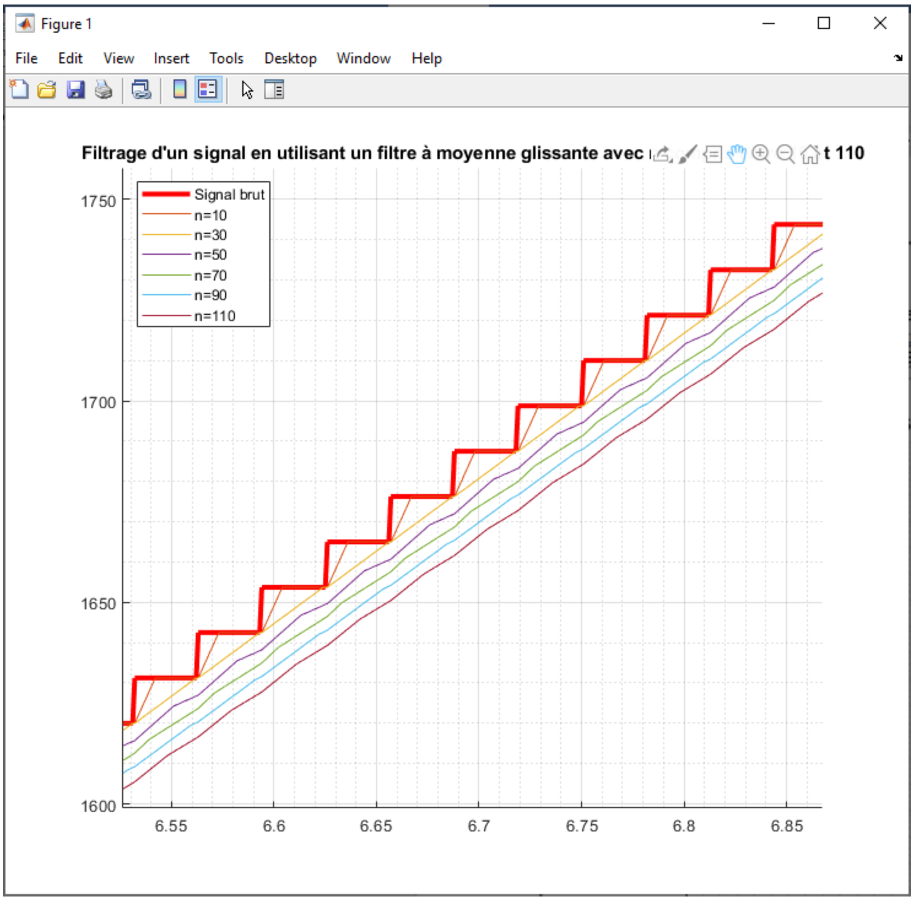


Figure 728 : zoom sur la courbe

Nous pouvons constater que le filtre à moyenne glissante a pour effet de lisser le signal mais également de le retarder. Plus la valeur de n est élevée, plus le signal est lissé et plus il est retardé. Il est donc intéressant de tester plusieurs valeurs de n afin de trouver le meilleur compromis.

C. Le filtre passe-bas du premier ordre

Le filtre passe-bas du premier ordre agit sur le signal en coupant les composantes hautes fréquences tout en laissant passer la composante continue.
La constante de temps du filtre va permettre de choisir la bande de fréquences à partir de laquelle le filtre va atténuer l'amplitude du bruit. Le réglage de la constante τ de temps du filtre dépendra donc de la fréquence des perturbations à éliminer (Figure 729 et Figure 730).

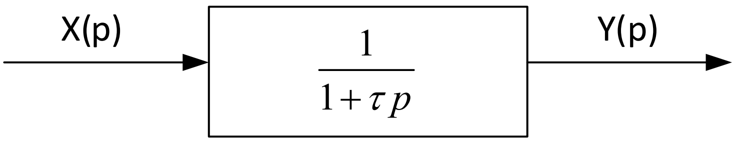


Figure 729 : filtre passe-bas du premier ordre dans le domaine de Laplace

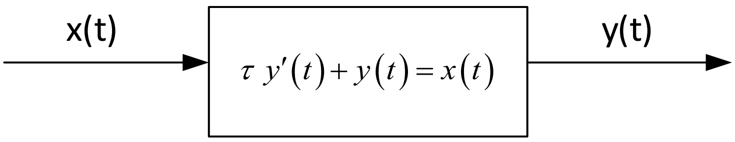


Figure 730 : filtre passe-bas du premier ordre dans le domaine temporel

Dans le domaine temporelle la fonction filtrée y(t) est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\tau\, y'(t) + y(t) = x(t)}$$

Si le signal est échantillonné avec une période d'échantillonnage $T_e = h$ et en utilisant la formule de différence finie progressive, il est possible de discrétisée cette équation différentielle :

$$\tau\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h}\right)+y_k = x_k$$

On obtient alors l'équation de récurrence qui permet de calculer l'échantillon y_{k+1} en fonction de y_k et de x_k :

$$\boxed{y_{k+1} = \frac{h}{\tau}x_k + \left(\frac{\tau - h}{\tau}\right)y_k}$$

Cette relation de récurrence sera utilisée par la fonction qui permettra de coder le filtre passe-bas du premier ordre.

La valeur de τ sera choisie en fonction de la fréquence du bruit que l'on souhaite supprimer. Parfois plusieurs essais doivent être réalisés pour obtenir un lissage satisfaisant sans trop retarder le signal filtré par rapport au signal d'origine. Dans tous les cas il faudra trouver le meilleur compromis sachant que la composante continue subira de toute façon une légère déformation.

La fonction **filtre_ordre_1(t,Y,tau)** (Figure 731) permet le filtrage par un filtre passe-bas du premier ordre du signal Y.
Cette fonction prendra en arguments :

Y : vecteur contenant les valeurs de la fonction à filtrer
t : vecteur contenant les valeurs du temps correspondant au vecteur Y
tau : constante de temps du filtre

La fonction aura comme sorties :
Y_pb_ordre_1 : vecteur contenant les valeurs du signal filtré par moyenne glissante

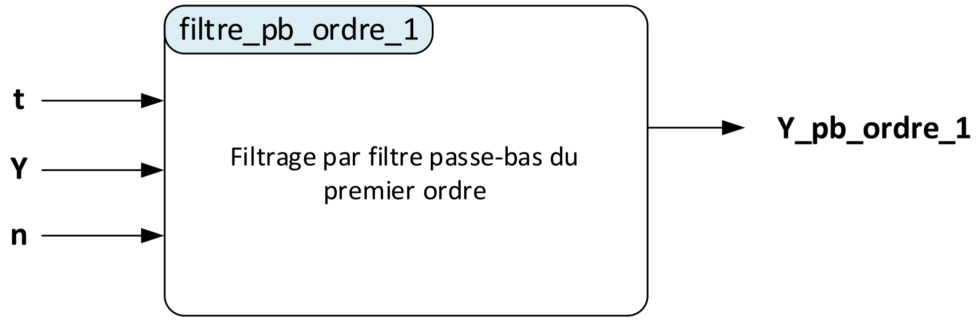


Figure 731 : fonction filtre_pb_ordre_1(t,Y,tau)

La Figure 725 montre le codage de la fonction **filtre_pb_ordre_1(t,Y,tau).**

```
%% filtre_pb_ordre_1(t,Y,tau)
% Ivan LIEBGOTT @ Décembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Cette fonction permet de filtrer un signal en utilisant un filtre
% passe-bas du premier ordre
% t : vecteur contenant les valeurs du temps correspondant au signal à
% filtrer
% Y : représente le vecteur contenant le valeurs du signal à filtrer
% tau : constante de temps du filtre
function [Y_pb_ordre_1] = filtre_pb_ordre_1(t,Y,tau)
% définition du pas h
h = (t(end) - t(1)) / (length(t)-1);
Y_pb_ordre_1(1) = Y(1);
for k = 1:1:length(Y)-1
    % calcul de Y au rang k+1
    Y_pb_ordre_1(k+1) = Y(k)*(h/tau) + Y_pb_ordre_1(k)*(tau-h)/tau;
end
```

Figure 732 : codage de la fonction filtre_pb_ordre_1(t,Y,tau)

Afin de tester cette fonction sur un signal en prenant plusieurs valeurs pour **tau**, **ouvrir** le script **filtrage_pb_ordre_1_tau_variable.m**.

```
%% filtrage_pb_ordre_1_tau_variable
% Ivan LIEBGOTT @ Décembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Ce script permet de tester la fonction filtre_pb_ordre_1.m qui permet de
% filtrer un signal en utilisant un filtre passe-bas du premier ordre
% Le test est réalisé sur le signal issu d'un codeur
% Le script trace le signal non filtré et les signaux obtenus après
% filtrage  en utilisant différentes valeurs pour la constante de temps tau
% du filtre d'échantillons retenus pour faire la moyenne
%%
% Effacement des variables du workspace
clear all;

% chargement des données correspondant au signal du codeur et au temps dans
% le workspace
load filtrage_pb_ordre_1.mat;

% spécification des valeurs mini et maxi de n
tau_min = 0.3;
tau_max = 2;
pas =((tau_max - tau_min) / 5);

% création d'une nouvelle fenêtre graphique
fig = figure('Units','centimeters','Position',[2 5 33 23]);
set(fig,'Color','white');
hold all;

% tracé du signal du codeur non filtré
plot(t,position_codeur,'r','LineWidth',2);

%création d'une cellule pour stocker les lignes de la légende
Titre_Legende = cell(1,1);
Titre_Legende{1,1} = 'Signal brut';
ind_Legende = 2;
```

```
for tau = tau_min : pas : tau_max;
% calcul du signal filtré à l'aide de la fonction filtre_mgl
pos_ordre_1 = filtre_pb_ordre_1(t,position_codeur,tau);
Titre_Legende{1,ind_Legende} =  'tau=' + string(tau); % création de la ligne de
la légende

% Tracé du signal filtré correspondant à la valeur de n dans la même fenêtre
graphique
plot(t,pos_ordre_1);
ind_Legende = ind_Legende + 1;
end

grid on; grid minor;
% affichage de la légende
legend(Titre_Legende,'Location','northwest');

title('Filtrage d''un signal en utilisant un filtre du premier ordre avec tau
comprise entre '...
    + string(tau_min) + ' et ' + string(tau_max));
```

Figure 733 : script permettant de voir l'influence de tau pour un filtre passe-bas du premier ordre

Exécuter le script et observer le résultat sur la Figure 733et sur la Figure 734.

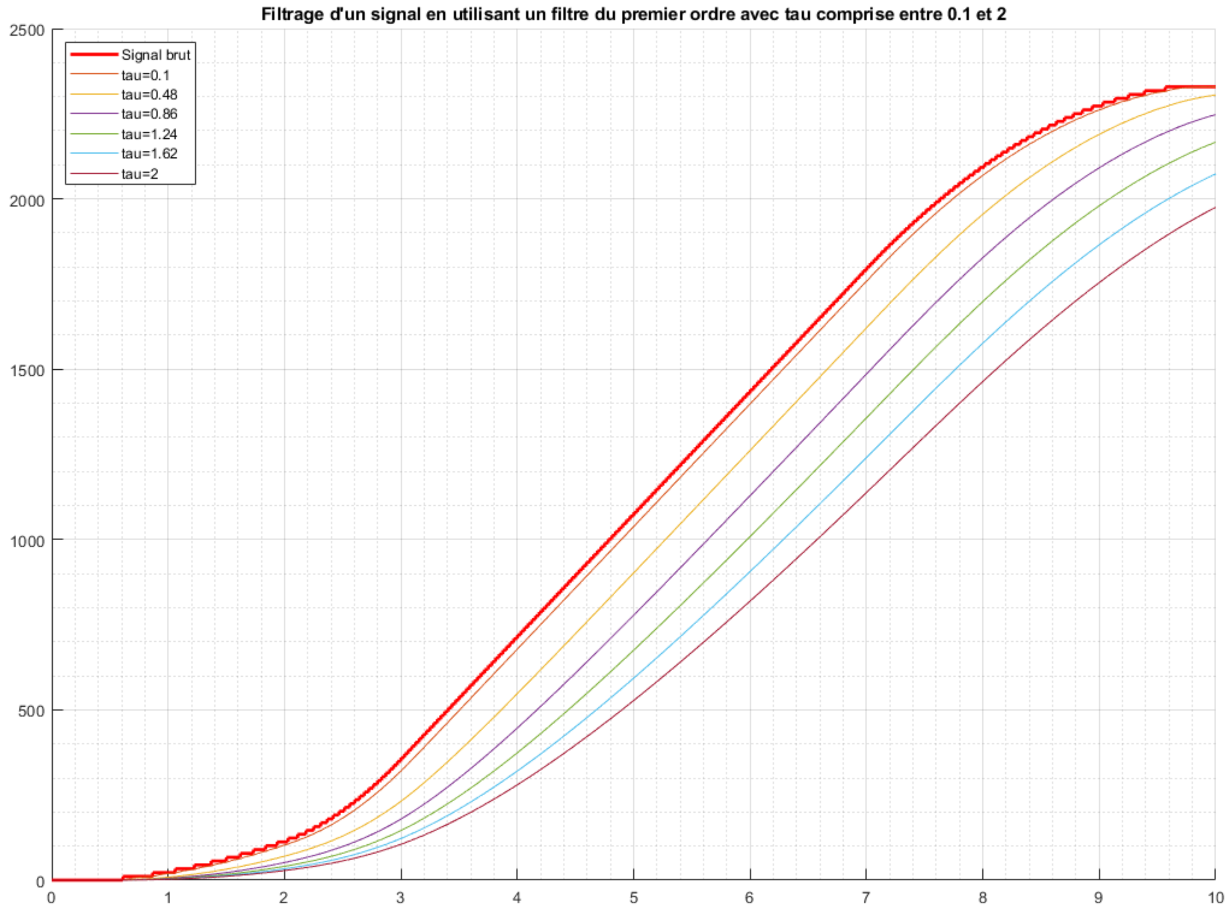


Figure 734 : filtrage d'un signal par un filtre passe-bas du premier ordre avec différentes valeurs de τ

Nous pouvons constater que le filtre passe-bas du premier ordre a pour effet de lisser le signal mais également de le retarder. Plus la valeur de τ est élevée et plus le signal est retardé. Il est donc intéressant de tester plusieurs valeurs de τ afin de trouver une valeur de τ adaptée.

D. Utilisation de Simulink pour le filtrage d'un signal

Simulink propose de nombreuses fonctionnalités permettant de filtrer un signal. Il est possible d'utiliser les blocs classiques comme les fonctions de transfert ou d'utiliser des blocs de la DSP System Toolbox qui propose tous les blocs dédiés au traitement du signal.
Afin de comparer les différentes fonctionnalités, nous allons lui appliquer le processus de traitement indiqué sur la Figure 735. Le signal sera dans un premier temps filtré afin de lui appliquer une méthode de dérivation numérique.

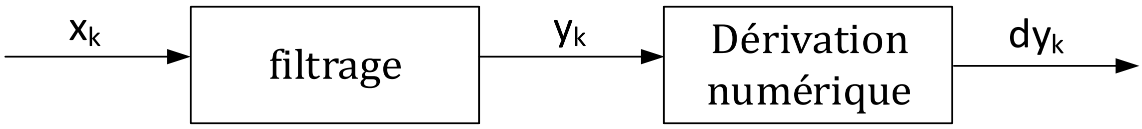


Figure 735 : processus de traitement du signal

Ouvrir le modèle **Simulink_numerical_derivative.slx** et lancer la simulation. Ce modèle permet de visualiser un signal provenant d'un codeur incrémental ainsi que sa dérivée numérique obtenue en utilisant le bloc **Numerical Derivative** de la bibliothèque **Continuous** de Simulink.

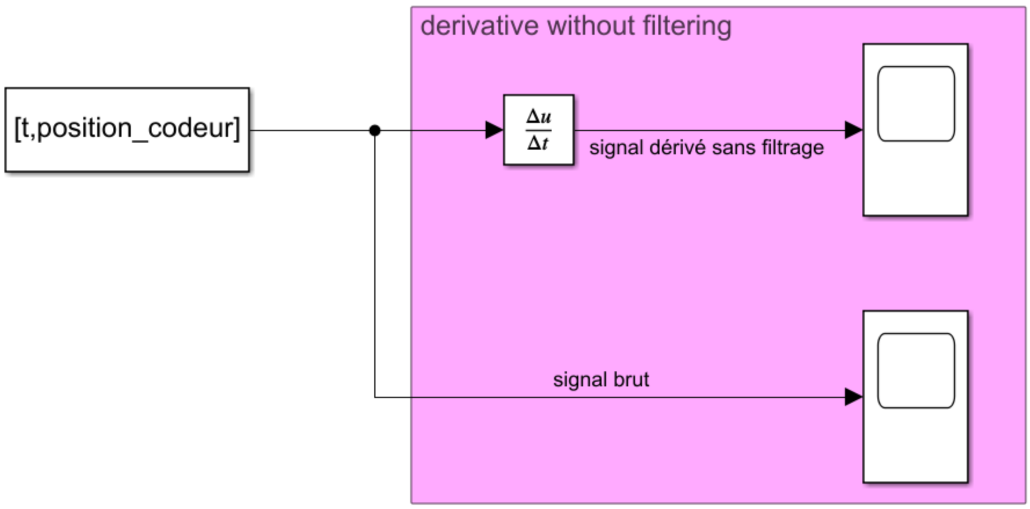


Figure 736 : dérivation numérique en utilisant Simulink

Ouvrir le scope permettant de visualiser le signal brut et observer la forme du signal sur la Figure 737. Nous pouvons constater que ce signal présente des discontinuités qui vont nuire au processus de dérivation numérique.

Ouvrir ensuite le scope correspondant au signal dérivé afin d'observer l'influence de ces discontinuités sur le calcul de la dérivée numérique (Figure 738).

Nous pouvons constater que le signal dérivé n'est pas exploitable, un processus de filtrage est nécessaire afin de lisser le signal avant le processus de dérivation numérique. Plusieurs méthodes seront présentées dans ce paragraphe.

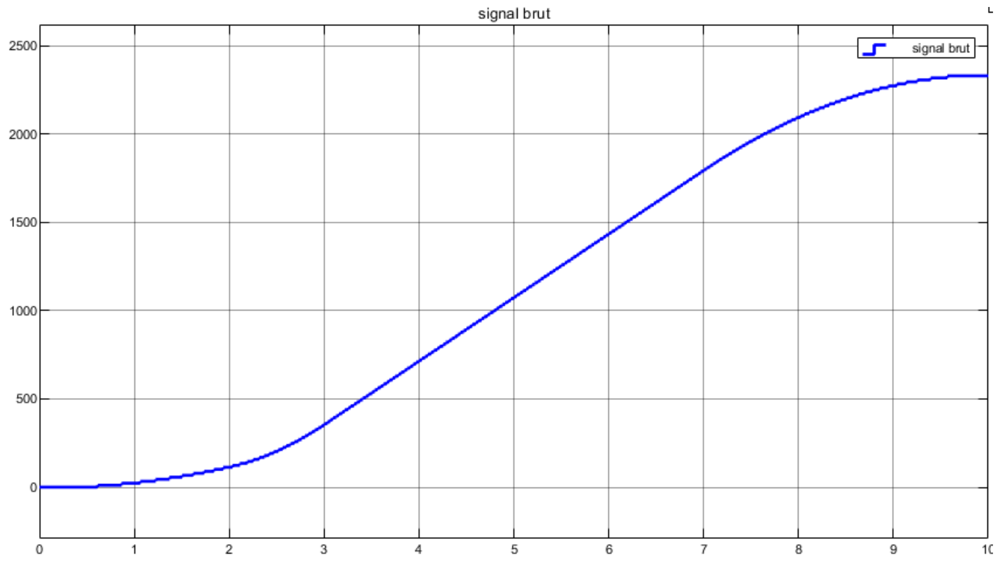


Figure 737 : signal brut à dériver

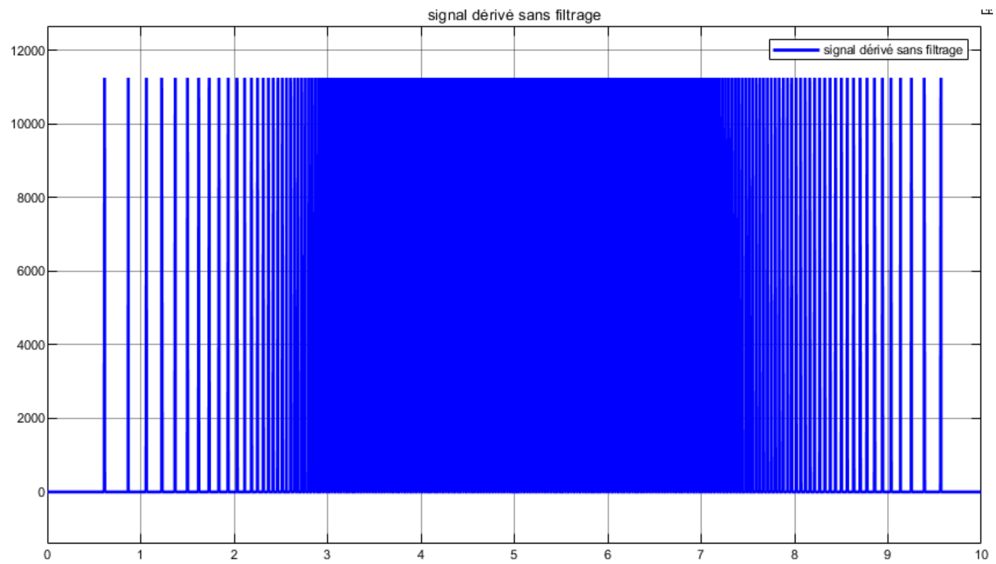


Figure 738 : dérivation d'un signal numérique discontinu sans filtrage

1. Utilisation d'une fonction de transfert de la bibliothèque Continuous de Simulink

Afin de reproduire l'effet d'un filtre passe-bas du premier ordre, il est possible d'utiliser un bloc **Transfer Fcn** de la bibliothèque **Continuous**.

Ouvrir le modèle Simulink **filtrage_Simulink_Transfert_Function.slx** et **lancer** la simulation (Figure 739). Ce modèle contient une fonction de transfert du premier ordre qui permet de modéliser le comportement d'un filtre passe-bas du premier ordre. La Figure 740 montre le paramétrage de la fonction de transfert $H(s)=\dfrac{1}{1+0.3\,s}$, ou s représente la variable de Laplace.

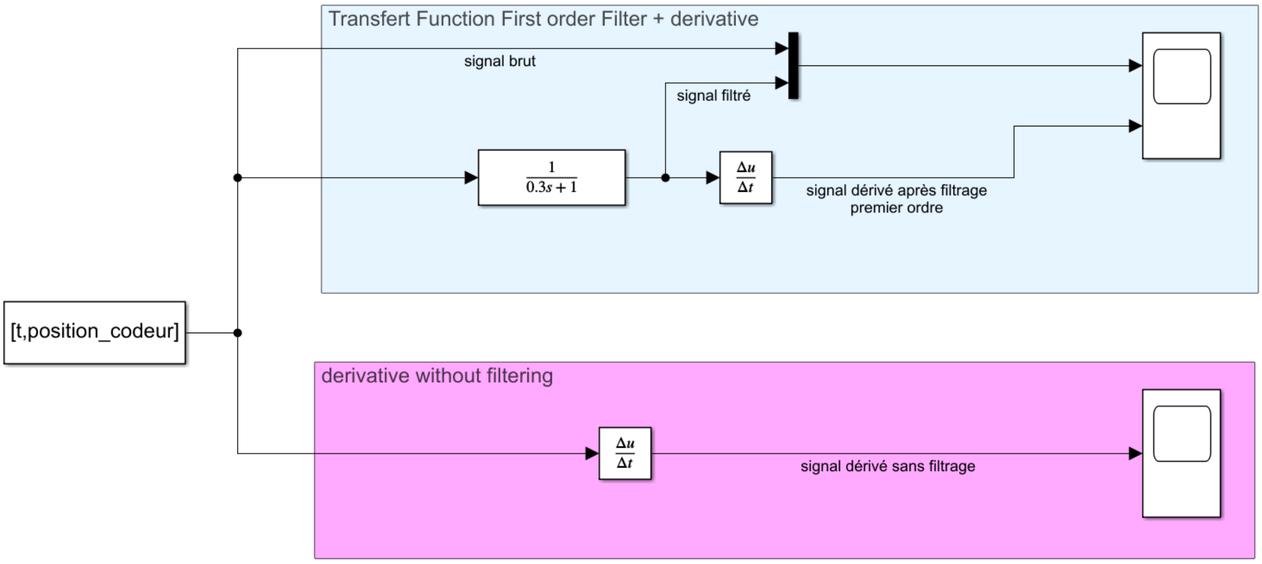


Figure 739 : filtrage réalisé avec une fonction de transfert

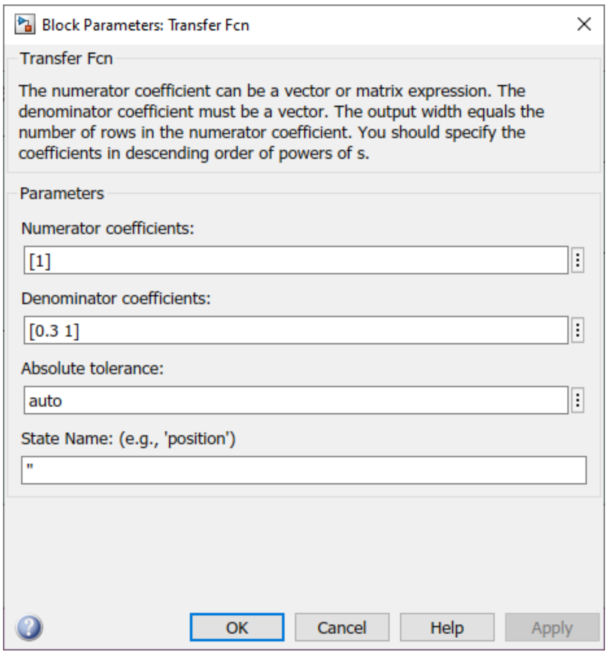


Figure 740 : paramétrage du bloc Transfer Fcn

Ouvrir le scope permettant de visualiser le signal brut, le signal filtré et le signal dérivé après filtrage. La Figure 741 permet de voir l'apport du filtrage. Le signal dérivé est maintenant exploitable. La constante de temps a été réglée à 0.3 s. Il est possible de faire d'autre simulation en faisant varier la constante de temps pour visualiser l'effet sur le signal filtré et sur le signal dérivé.

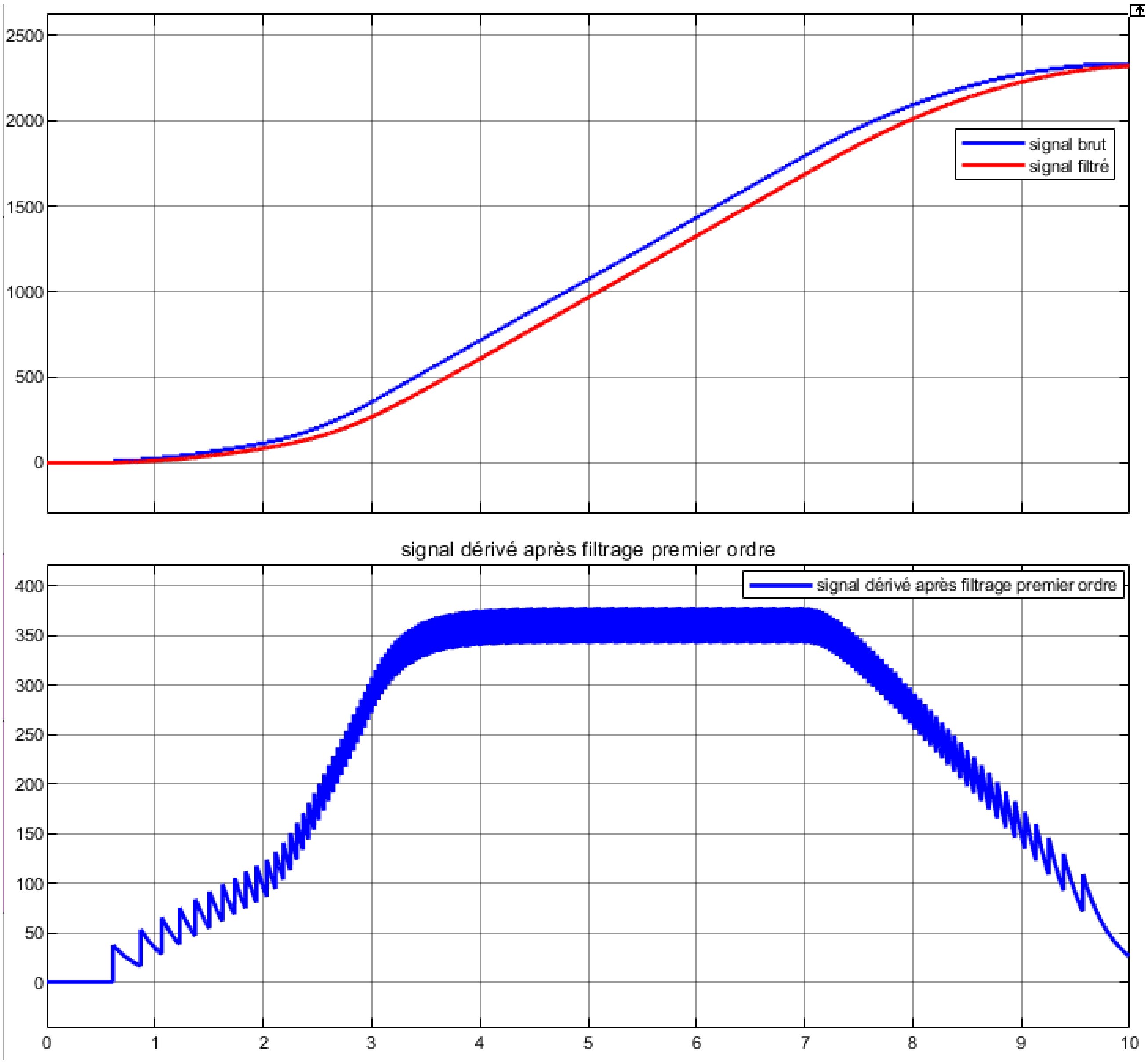


Figure 741 : dérivation numérique d'un signal filtré en utilisant Simulink

2. Utilisation du bloc Analog Filter Design de la DSP Toolbox de Simulink

Afin de reproduire l'effet d'un filtre passe-bas du premier ordre, il est également possible d'utiliser le bloc **Analog Filter Design** de la **DSP Toolbox** de Simulink (Figure 742).

Ouvrir le modèle Simulink **filtrage_Simulink_DSP_toolbox.slx** et **lancer** la simulation.
Ce modèle contient une fonction de transfert du premier ordre qui permet de modéliser le comportement d'un filtre passe-bas du premier ordre.

La Figure 743 montre le paramétrage du bloc **Analog Filter Design**.

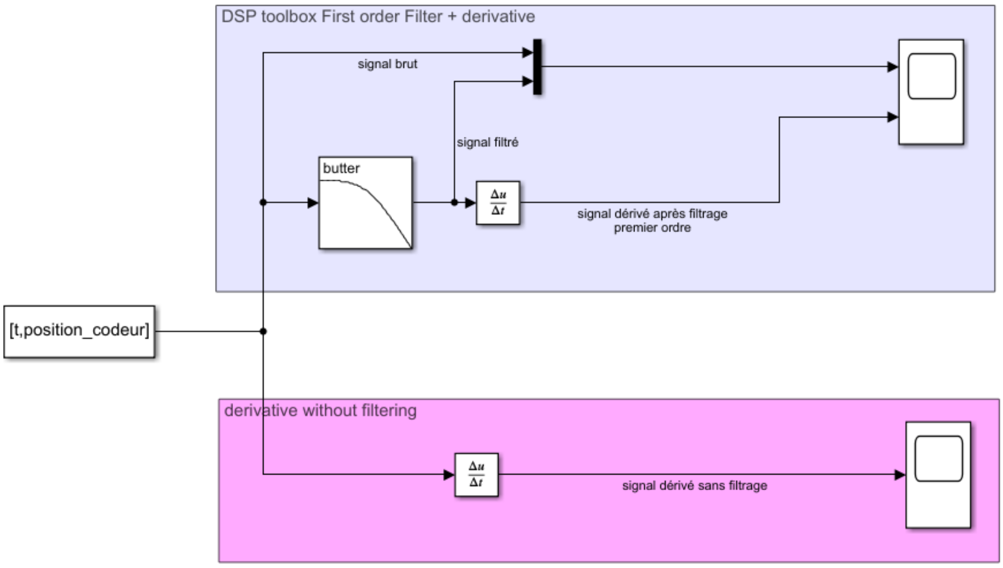


Figure 742 : filtrage réalisé avec le bloc Analog Filter Design

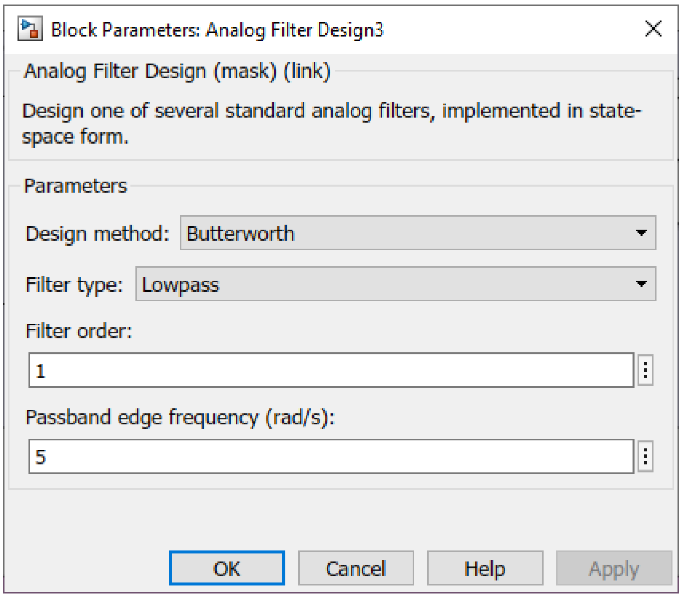


Figure 743 : paramétrage du bloc Analog Filter Design

Ouvrir le scope permettant de visualiser le signal brut, le signal filtré et le signal dérivé après filtrage. La Figure 744 permet de voir l'apport du filtrage. Le signal dérivé est maintenant exploitable. En réglant le paramètre « **Passband edge fequency** » à 5 rad/s, nous obtenons un résultat satisfaisant Il est possible de faire d'autre simulation en faisant varier ce paramètre pour visualiser l'effet sur le signal filtré et sur le signal dérivé.

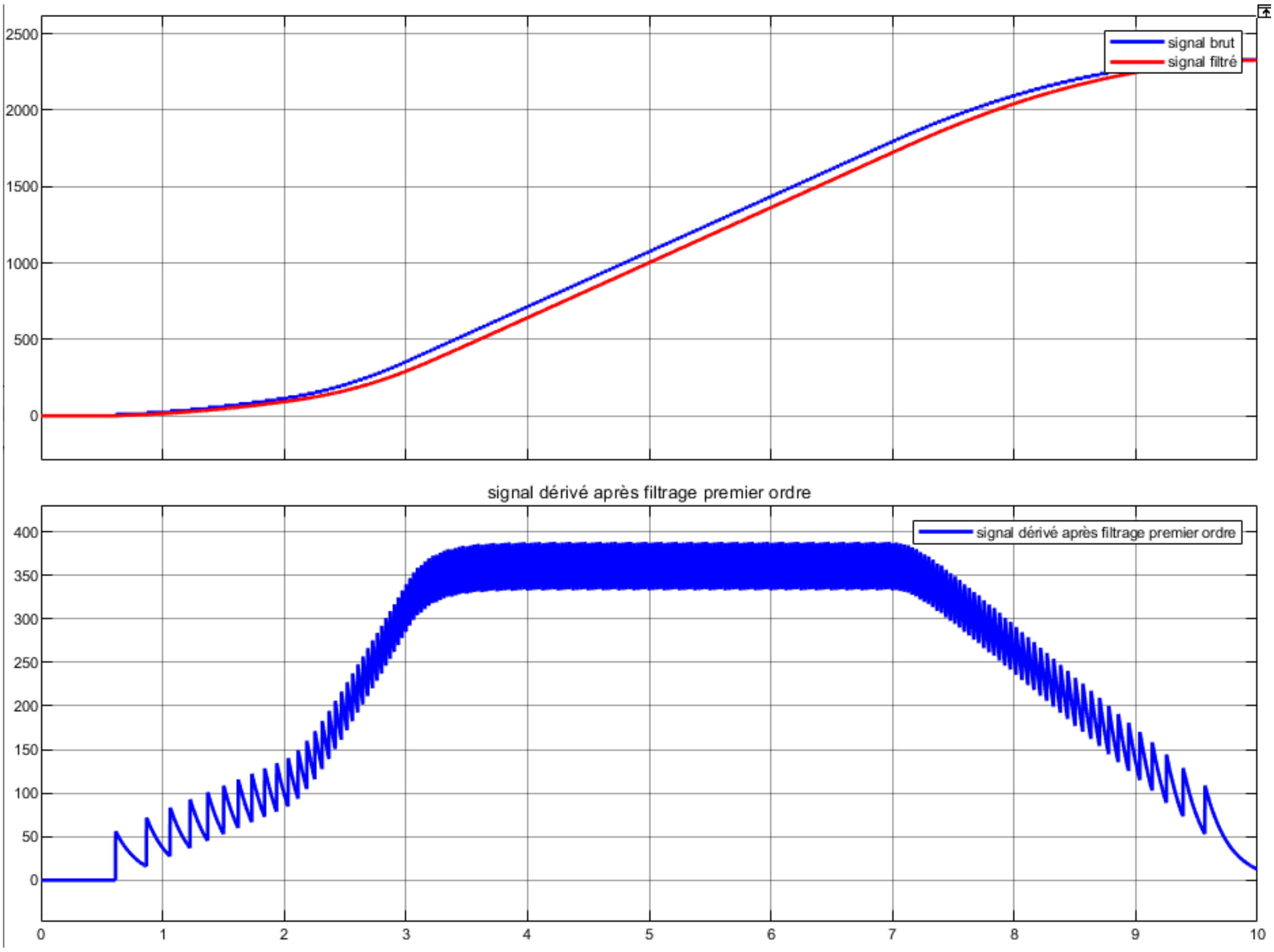


Figure 744 : dérivation numérique d'un signal filtré en utilisant Simulink

3. Utilisation du bloc Moving Average de la DSP System Toolbox

Afin de reproduire l'effet d'un filtre à moyenne glissante, il est également possible d'utiliser le bloc **Moving Average** de la **DSP system Toolbox** de Simulink.

Ouvrir le modèle Simulink **filtrage_Simulink_Moving_average.slx** et **lancer** la simulation (Figure 745). Ce modèle contient un bloc **Moving Average** de la **DSP System Toolbox**.

La Figure 746 montre le paramétrage du bloc **Moving Average.**

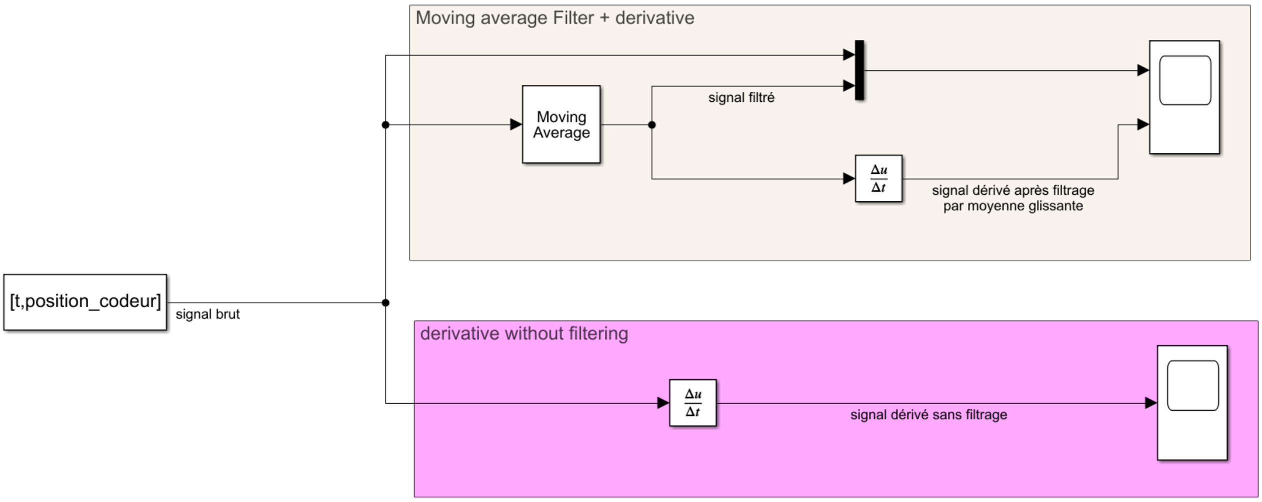


Figure 745 : filtrage réalisé avec le bloc Moving Average

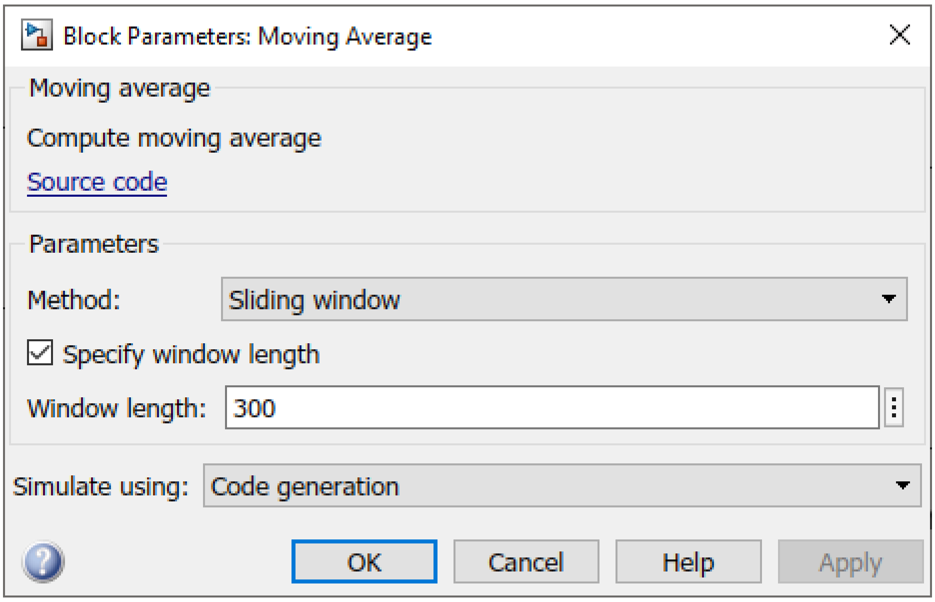


Figure 746 : paramétrage du bloc Moving Average

Ouvrir le scope permettant de visualiser le signal brut, le signal filtré et le signal dérivé après filtrage. La Figure 747 permet de voir l'apport du filtrage par moyenne glissante. Le signal dérivé est maintenant exploitable. En réglant le paramètre « **Window length** » à 300, on obtient un résultat satisfaisant (la moyenne est calculée avec les 300 derniers échantillons du signal). Il est possible de faire d'autre simulation en faisant varier ce paramètre pour visualiser l'effet sur le signal filtré et sur le signal dérivé.

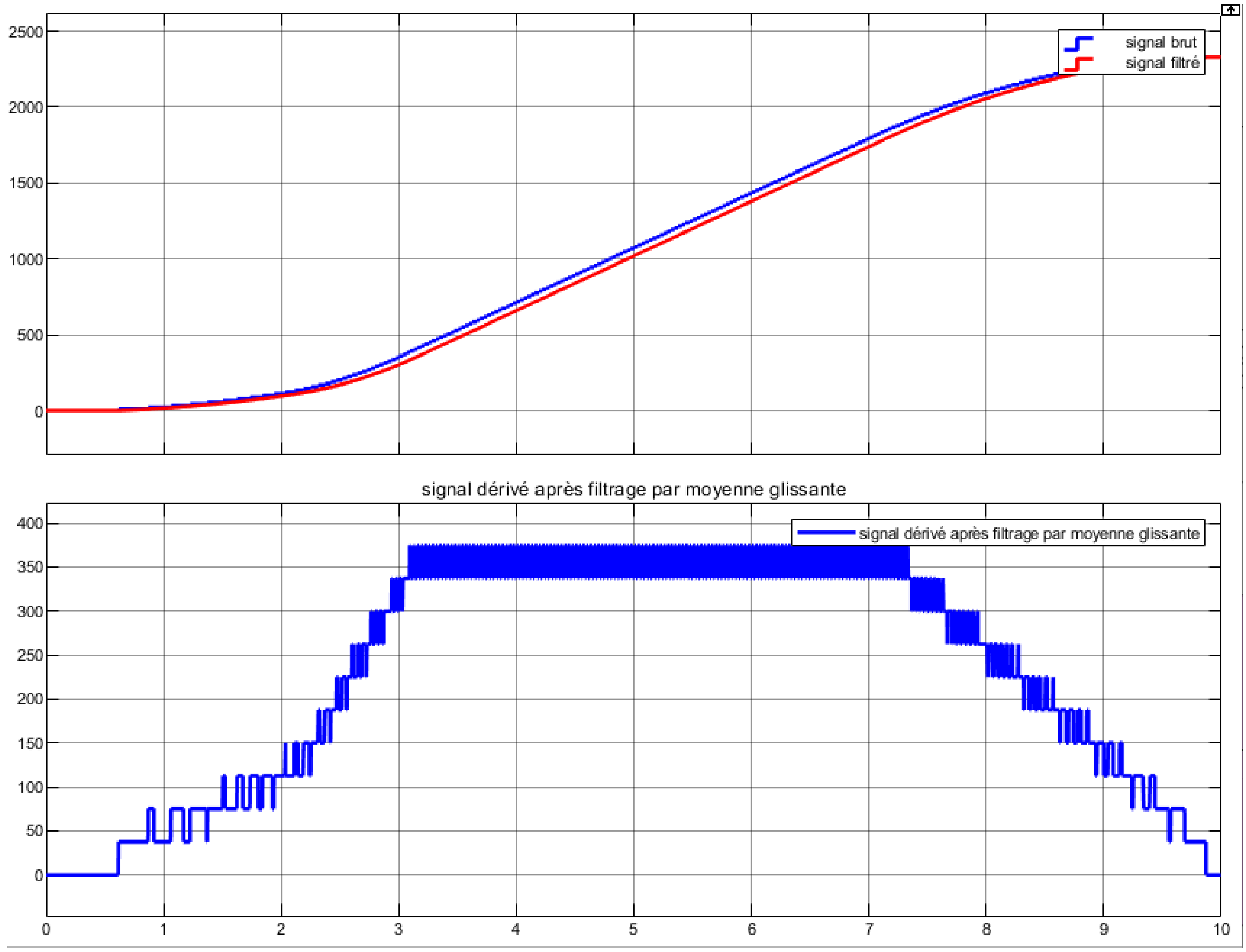


Figure 747 : dérivation numérique d'un signal filtré en utilisant Simulink

VII. Résolution numérique des équations différentielles

De nombreux problèmes scientifiques se modélisent sous la forme d'une équation différentielle. Un processus de résolution doit alors être défini afin de déterminer les solutions. Dans quelques cas particuliers, l'équation différentielle admet une solution qui peut être déterminée par un processus de calcul analytique. En général, les équations différentielles obtenues ne sont pas linéaires et la mise en place d'un processus de résolution numérique est nécessaire afin de déterminer une solution approchée au problème.

A. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 – Méthode d'Euler

1. Aspects théoriques

La méthode d'Euler va nous permettre de trouver la solution d'une équation différentielle d'ordre 1 donnée avec sa condition initiale sous la forme suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Cette mise en forme d'une équation différentielle est appelée **problème de Cauchy**. Sous de bonnes hypothèses, le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme qu'un tel problème admet une solution unique.

<u>Exemple</u> : Considérons l'équation différentielle suivante :

$y'(t) + y(t) = \sin(t)$ avec $y(0) = 1$

La mise sous la forme d'un problème de Cauchy de cette équation sera donc la suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(t) - y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad f(t, y(t)) = \sin(t) - y(t)$$

<u>Principe de la méthode</u> : La fonction $f(t_i, y(t_i)) = y'(t_i)$ va être utilisée au point t_i pour évaluer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de $f(t)$ pour l'intervalle $[t_i \,;\, t_{i+1}]$. La fonction $f(t_i, y(t_i))$ permettra de connaître la tendance de variation de la fonction $f(t)$ au niveau du point t_i. La solution numérique de l'équation différentielle sera constituée des tangentes aux points t_i pour chaque intervalle $[t_i \,;\, t_{i+1}]$.

La Figure 748 illustre les 3 premières itérations de la méthode d'Euler. Les différentes valeurs des y_i permettront de reconstituer la solution numérique.

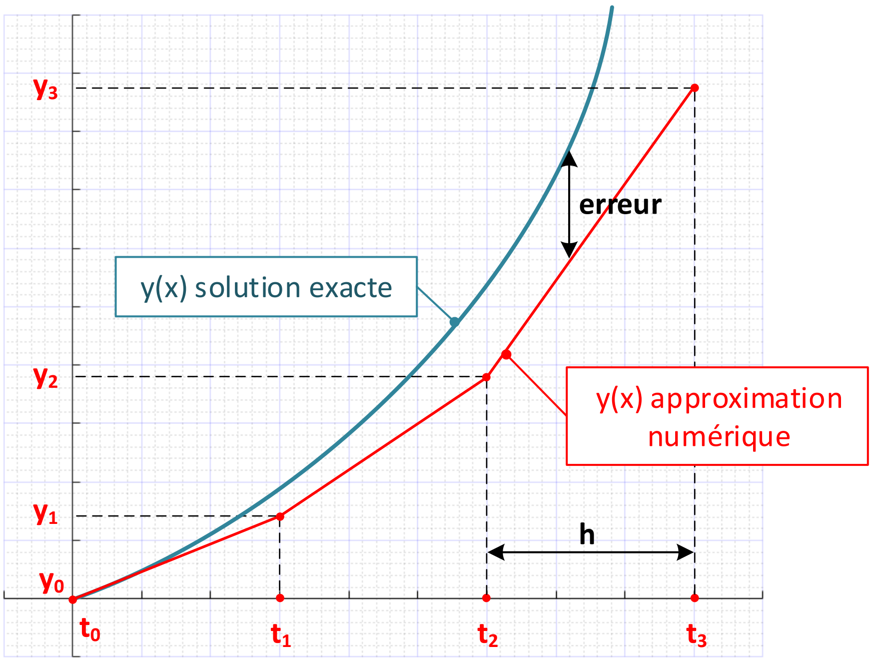


Figure 748 : illustration de la méthode d'Euler de résolution numérique d'une équation différentielle

- L'intervalle d'étude [a ; b] est discrétiser en N intervalles de longueur identique h.
- Sur l'intervalle [x_0 ; x_1], l'équation de la tangente au point t_0 sera donné par :

$$T_0(t) = y'(t_0)(t - t_0) + y(t_0) = f(t_0, y_0)(t - t_0) + y_0 \qquad \text{en exploitant } y'(t) = f(t, y(t))$$

La valeur de y_1 est donnée par $T_0(t_1)$:

$$y_1 = T_0(t_1) = f(t_0, y_0)(t_1 - t_0) + y_0 \quad \text{avec} \quad (t_1 - t_0) = h$$

$$\boxed{y_1 = h.f(t_0, y_0) + y_0}$$

- Sur l'intervalle [x_i ; x_{i+1}], l'équation de la tangente au point t_i sera donné par :
-

$$T_i(t) = y'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + y(t_i) = f(t_i, y_i)(t - t_i) + y_i \qquad \text{en exploitant } y'(t) = f(t, y(t))$$

La valeur de y_{i+1} est donnée par $T_i(t_{i+1})$:

$$y_{i+1} = T_i(t_{i+1}) = f(t_i, y_i)(t_{i+1} - t_i) + y_i \text{ avec } (t_1 - t_0) = h$$

$$\boxed{y_{i+1} = h.f(t_i, y_i) + y_i}$$

La solution numérique approchée sera alors reconstituée en joignant par des segments les points (t_k,y_k) tels que :

$$\boxed{\begin{cases} t_{k+1} = t_k + h \\ y_{k+1} = h.f\left(t_k, y_k\right) + y_k \end{cases}}$$

2. Codage en langage MATLAB

Vous pouvez trouver les fichiers de toutes les fonctions et scripts présentés dans ce paragraphe dans le dossier **Algorithmique_avec_MATLAB/ Equations_différentielles**

Nous prendrons comme exemple l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} 5y'(t) + y(t) = 10 \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

La mise sous la forme d'un problème de Cauchy nous permet de déterminer la fonction : $f\left(t, y(t)\right)$

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(t, y(t)\right) = \dfrac{10 - y(t)}{5} \\ y(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \boxed{f\left(t, y(t)\right) = \dfrac{10 - y(t)}{5}}$$

L'expression mathématique de cette fonction sera définie dans la fonction **F_1.m** (Figure 749). Cette expression peut être modifiée si l'on souhaite résoudre une autre équation différentielle du premier ordre.

```
%% F_1.m
% Ivan LIEBGOTT @ Décembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% F_1.m contient l'expression de la fonction F(t,y) utilisée pour résoudre
% une équation différentielle en utilisant la méthode d'Euler
% cette fonction correcpond à l'équation différentielle suivante:
% 5.dy/dt + y = 10
% dy/dt = F(t,y)= (10 - y) / 5

function f = F_1(t,y);
f = (10 - y) / 5;
end
```

Figure 749 : codage de la fonction F1_m qui contient l'expression de la fonction f(t,y)

Pour calculer les solutions de cette équation différentielle, nous allons créer la fonction **fEuler** (f,a,b,CI,nb_points) (Figure 750).

Cette fonction prendra en arguments :
f : fonction contenant l'expression de f(t,y)
a : borne inférieure de l'intervalle d'étude
b : borne supérieur de l'intervalle d'étude
CI : condition initiale de l'équation différentielle
nb_points : nombre de points à calculer

La fonction aura comme sorties :
t : vecteur contenant les instants correspondant aux points ou les valeurs de la solution sont calculées
y : vecteur contenant les valeurs de la fonction solution de l'équation différentielle

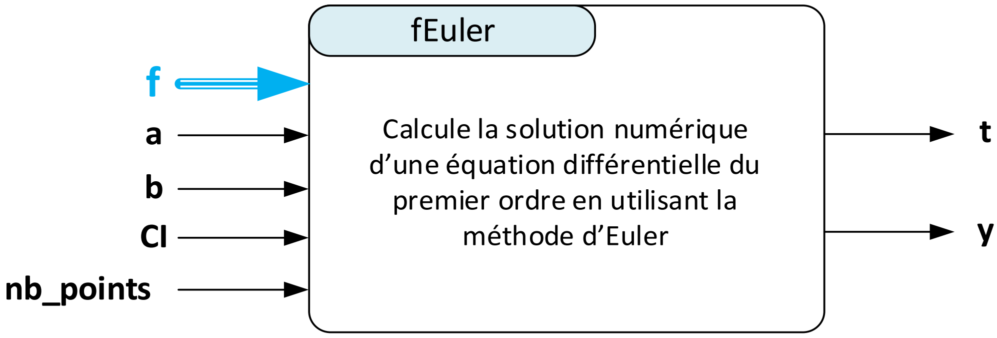


Figure 750 : fonction fEuler (f, a, b, CI, nb_points)

La Figure 751 montre le codage de la fonction **fEuler** (f,a,b,CI,nb_points).

```
%%fEuler
% Ivan LIEBGOTT @ Décembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Résolution d'une équation différentielle du premier ordre mise sous la forme
d'un problème
% de Cauchy
% Equation scalaire: dy/dt = F(t,y)

function [t,y] = fEuler(f,a,b,CI,nb_points)
% calcul du pas h en fonction de a,b et nb_points
h = (b-a)/nb_points;

% définition du vecteur t
t = [a:h:b];

y(1) = CI;
for k = 1:1:nb_points
    y(k+1) = y(k) + h * f(t(k),y(k));
end;
```

Figure 751 : codage de la fonction fEuler(f, a, b, CI, nb_points)

Afin de procéder à la résolution de l'équation différentielle, ouvrir le script **Euler.m**.

Le script est structuré en deux sections (Figure 752) :

- Définition de l'intervalle d'étude de la fonction **[a ;b]** et du nombre de points **nb_points** à calculer pour déterminer la solution numérique de l'équation différentielle.
- Appel de la fonction **fEuler**, puis tracé de la solution numérique dans une fenêtre graphique

```
%% Euler
% Ivan LIEBGOTT @ Décembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Résolution d'une équation différentielle du premier ordre en utilisant
% la méthode d'Euler
%
% la fonction F(y,t) est stockée dans la fonction F_1.m
%% définition de l'intervalle d'étude  [a;b] de la fonction considérée
```

```
a = 0;
b = 30;

%spécification du nombre de points
nb_points = 10;

%% Résolution d'une équation différentielle du premier ordre

% spécification de la condition initiale
y0 = 0;
% Résolution avec fEuler
[t,y] = fEuler(@F_1,a,b,y0,nb_points);

figure; hold all
plot(t,y,'LineWidth',2);
grid on; grid minor;
title({'Solution numérique d''une équation différentielle' ;  'du premier ordre
(méthode d''Euler)'})
legend(string(nb_points) + ' points sont calculés ')
axis([0 30 0 12]);
```

Figure 752 : résolution d'une équation différentielle du premier ordre

Exécuter le script avec un nombre de points très faible (nb_points = 10) afin de visualiser le processus de résolution et d'identifier les différents segments qui constituent la solution numérique.

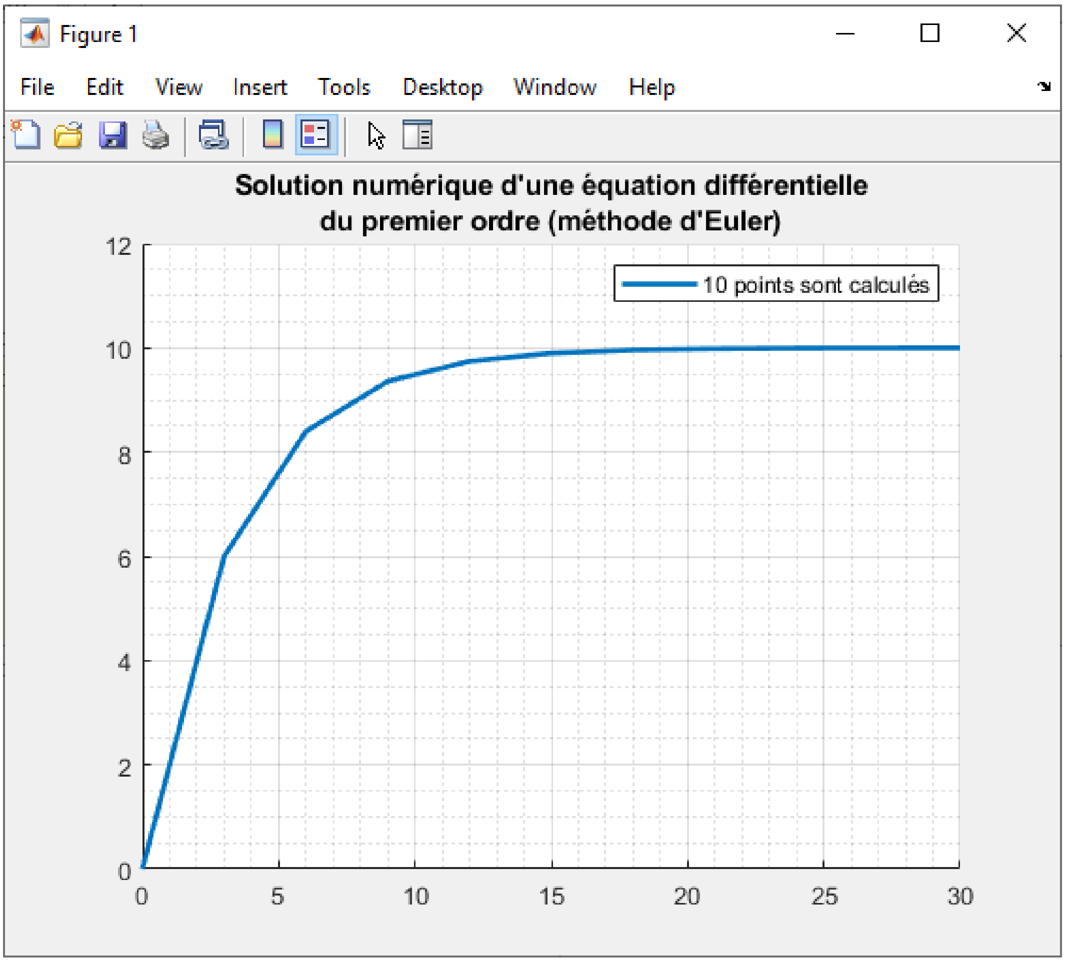


Figure 753 : solution numérique calculée avec 10 points

Exécuter à nouveau le script avec un nombre de points plus important (nb_points = 100)

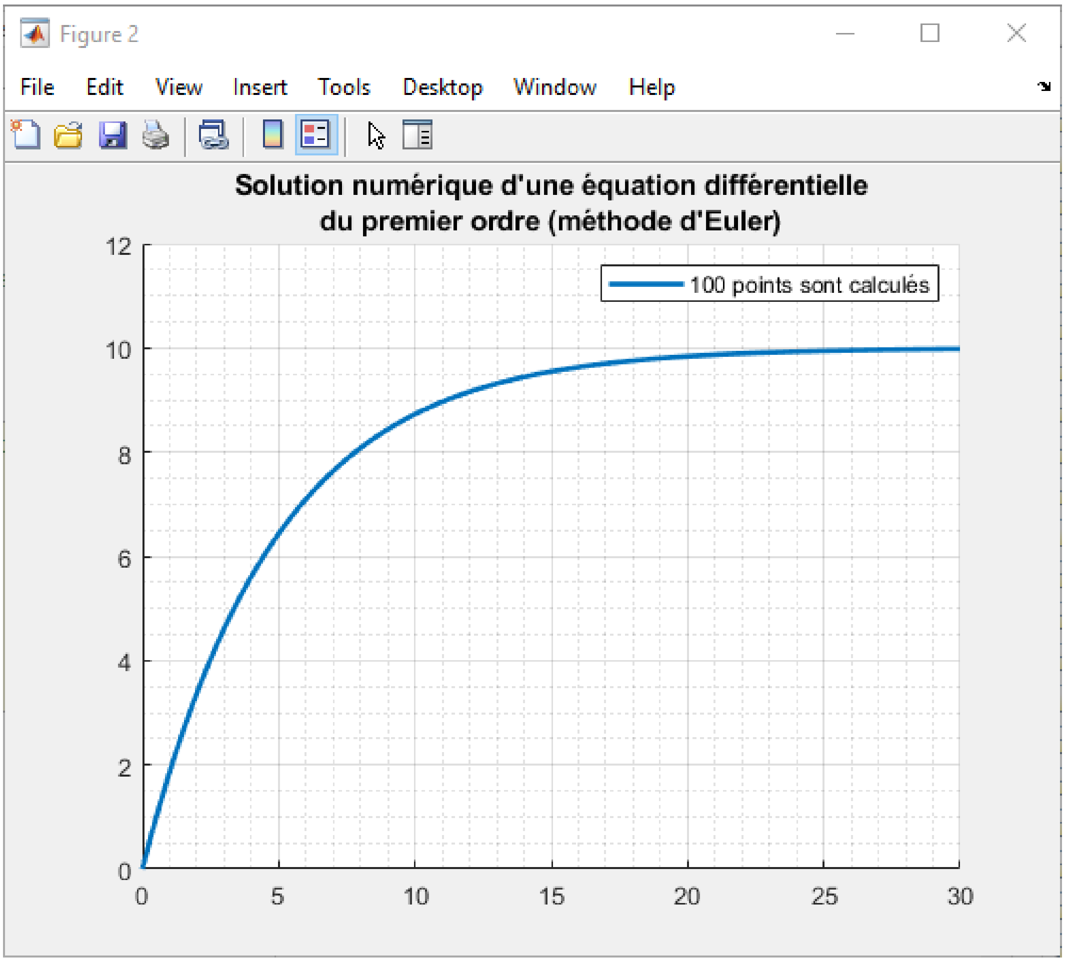


Figure 754 : solution numérique calculée avec 100 points

B. Résolution d'une équation différentielle d'ordre n – Méthode d'Euler

1. Aspects théoriques

La méthode d'Euler peut être généralisée et utilisée pour résoudre des équations différentielles d'ordre n en utilisant la vectorisation. Le principe consiste à transformer une équation différentielle d'ordre n en un système de n équations différentielles d'ordre 1.

<u>Exemple</u> : Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y''(t)+a\,y'(t)+b\,y(t)=g(t)$$

Avec pour conditions initiales : $y(t_0)=C_0$ et $y'(t_0)=C_1$

Posons : $\begin{cases} y_1(t)=y(t) \\ y_2(t)=y_1'(t) \end{cases}$

L'équation différentielle peut alors s'écrire en fonction de $y_1(t)$ et $y_2(t)$:

$$y_2'(t)+a\ y_2(t)+b\ y_1(t)=g(t)$$

Il est alors possible de se ramener au système suivant contenant deux équations différentielles d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y_1'(t)=y_2(t) \\ y_2'(t)=g(t)-a\ y_2(t)-b\ y_1(t)=\varphi\big(t,y_1(t),y_2(t)\big) \end{cases}$$

En considérant les vecteurs $Y(t)=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $Y'(t)=\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$ et $F\big(t,Y(t)\big)=\begin{pmatrix} y_2(t) \\ \varphi\big(t,y_1(t),y_2(t)\big) \end{pmatrix}$

Le système peut alors s'écrire sous forme vectorielle :

$$\boxed{Y'(t)=F\big(t,Y(t)\big)}$$

avec

$$\boxed{F\big(t,Y(t)\big)=\begin{pmatrix} y_2 \\ g(t)-a\ y_2(t)-b\ y_1(t) \end{pmatrix}}$$

Le problème se ramène à un problème de Cauchy avec une équation différentielle vectorialisée de dimension 2 et sa condition initiale Y_0 de dimension 2 également.

$$\begin{cases} Y'(t)=F\big(t,Y(t)\big) \\ Y_O=\begin{bmatrix} y_1'(t_0)=C_0 \\ y_2'(t_0)=C_1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ce raisonnement peut se généraliser à l'ordre n :
En considérant une équation différentielle d'ordre n mise sous la forme suivante :

$$y^{(n)}(t)=\varphi\big(t,y(t),y'(t),.....,y^{(n-1)}(t)\big)$$

Posons : $\begin{cases} y_1(t)=y(t) \\ y_2(t)=y'(t) \\ y_3(t)=y^{(2)}(t) \\ . \\ . \\ y_n(t)=y^{(n-1)}(t) \end{cases}$

L'équation différentielle peut s'écrire comme un système de n équations différentielles d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ . \\ . \\ y_{n-1}'(t) = y_n(t) \\ y_n'(t) = \varphi\left(t, y(t), y'(t), \ldots\ldots, y^{(n-1)}(t)\right) \end{cases}$$

En considérant les vecteurs :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix},\ Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ . \\ . \\ . \\ y_n' \end{pmatrix} \text{ et } F\left(t, Y(t)\right) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ . \\ . \\ y_n \\ \varphi\left(t, y(t), y'(t), \ldots\ldots, y^{(n-1)}(t)\right) \end{pmatrix}$$

Le système peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\boxed{Y'(t) = F\left(t, Y(t)\right)}$$

Le problème se ramène à un problème de Cauchy avec une équation différentielle vectorialisée de dimension n et sa condition initiale Y_0 de dimension n également.

$$\begin{cases} Y'(t) = F\left(t, Y(t)\right) \\ Y_O = \begin{bmatrix} C_0 \\ . \\ . \\ C_n \end{bmatrix} \end{cases}$$

La méthode d'Euler permettant de résoudre une équation différentielle d'ordre 1 peut alors s'appliquer. Les grandeurs manipulées par les algorithmes ne seront plus de dimension 1 mais deviendront des vecteurs de dimension n. Ce formalisme permettra de coder très simplement un algorithme de résolution d'équations différentielles d'ordre n. C'est également ce formalisme qui est utilisé par tous les solveurs de MATLAB qui permettent de résoudre les équations différentielles (ode45, ode23…). Il est donc indispensable pour un utilisateur de prendre en main ce formalisme.

2. Codage en langage MATLAB

Pour calculer les solutions d'une équation différentielle d'ordre n, nous allons créer la fonction **my_ode** (f,a,b,CI,nb_points) (Figure 755).

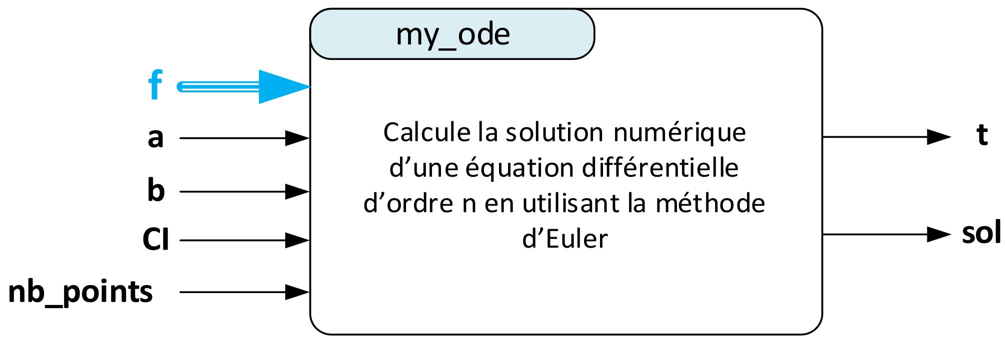


Figure 755 : fonction my_ode (f, a, b, CI, nb_points)

Cette fonction prendra en arguments :
f : fonction contenant l'expression de f(t,y). Cette fonction sera un vecteur colonne de dimension n.
a : borne inférieure de l'intervalle d'étude
b : borne supérieur de l'intervalle d'étude
CI : condition initiale de l'équation différentielle. La condition initiale sera un vecteur colonne de dimension n.
nb_points : nombre de points à calculer

La fonction aura comme sorties :
t : vecteur contenant les instants correspondant aux points ou les valeurs de la solution sont calculées
sol : matrice contenant les valeurs de toutes les fonction y_i définie dans la méthode. La structure de cette matrice est donnée sur la Figure 756. La première colonne de cette matrice regroupe les valeurs calculées de la fonction solution recherchée y(t).

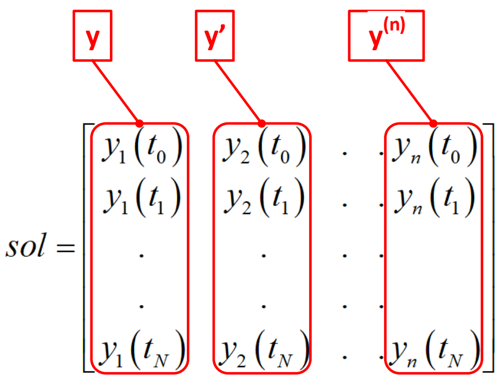


Figure 756 : structure de la matrice sol

La Figure 757 montre le codage de la fonction **my_ode** (f,a,b,CI,nb_points).

```
%% my_ode
% Ivan LIEBGOTT @ Décembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Résolution d'une équation différentielle mise sous la forme d'un problème
% de Cauchy
% Equation vectorielle: dy/dt = F(t,y)

function [t,sol] = my_ode_colonne(f,a,b,CI,nb_points)
h = (b-a)/nb_points;
t = [a:h:b];

% La première ligne de la matrice solution est constituée du vecteur
% condition initiales CI
sol(1,:) = CI;

% Chaque ligne de la matrice est construite en utilisant le schéma d'Euler
% Il est nécessaire de transposer l'expression "h * f(t(k),sol(k,:))" afin
% de la rendre de même dimension que les autres termes de l'équation
for k = 1:1:nb_points
    sol(k+1,:) = sol(k,:) + h * f(t(k),sol(k,:))';
end
end
```

Figure 757 : codage de la fonction my_ode (f,a,b,CI,nb_points)

Afin de tester notre solveur **my_ode**, nous allons utiliser un script qui va rechercher la solution d'une équation différentielle du second ordre de trois manières différentes :

- En utilisant **my_ode**
- En utilisant **ode23** (solveur intégré à MATLAB)
- En recherchant la solution analytique en calcul symbolique

L'équation sera la suivante :

$$\begin{cases} 5\,y''(t)+y'(t)+y(t)=2 \\ y(0)=0 \text{ et } y'(0)=0 \end{cases}$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{cases} y_1'(t)=y_2(t) \\ y_2'(t)=\dfrac{2-y_2(t)-y_1(t)}{5} \\ Y_0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow F(t,Y)=\begin{bmatrix} y_2(t) \\ \dfrac{2-y_2(t)-y_1(t)}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = \dfrac{2 - y_2(t) - y_1(t)}{5} \\ Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$Y'(t) = F\left(t, Y(t)\right) \text{ avec } F(t,Y) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ \dfrac{2 - y_2(t) - y_1(t)}{5} \end{bmatrix} \text{ et } Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'expression mathématique de cette équation différentielle sera définie dans la fonction **F_2.m** (Figure 758). Cette expression peut être modifiée si l'on souhaite résoudre une autre équation différentielle du second ordre. Dans cette fonction la sortie **F_2** calculée sera une matrice (2,1).

```
%% F_2.m
% Ivan LIEBGOTT @ Décembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% F_2.m contient l'expression de la fonction F(t,y) utilisée pour résoudre
% une équation différentielle du second ordre en utilisant la méthode d'Euler
% cette fonction correspond à l'équation différentielle suivante:
% 5.d2y/dt2 + dy/dt + y = 2
% f(t,y) est une matrice 2-by-1 tel que :
% f(1) = y(2)
% f(2) = 2-y(2)-y(1))/5

function f = F_2(t,y);
f = [y(2) ; (2-y(2)-y(1))/5];
end
```

Figure 758 : codage de la fonction F_2.m qui contient l'expression de la fonction f(t,y)

Ouvrir le script num_ode_comparaison.m (Figure 759).

Ce script va permettre de tracer dans une même fenêtre graphique la solution calculée avec **my_ode**, **ode23** et la **solution analytique**.

Il est possible de définir en début de script l'intervalle de calcul [a ; b] et le nombre de points **nb_points** utilisés pour le calcul.

```
%% num_ode_comparaison
% Ivan LIEBGOTT @ Décembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% comparaison de my_ode et ode_23 pour la résolution d'une équation
% différentielle du deuxième ordre
% définition de l'intervalle d'étude  [a;b] de la fonction considérée
a = 0;
b = 40;

% spécification du nombre de points et du pas h
nb_points = 100;
h= (b-a) / nb_points;
```

```
%% Résolution d'une équation différentielle du second ordre en utilisant
% des solveurs numériques

% spécification des conditions initiales CI = [y0 ; dydt0] (matrice 2-by-1)
CI = [0;0];

% Résolution avec my_ode
[t_my_ode_2,sol_my_ode_2] = my_ode(@F_2,a,b,CI,nb_points);

% Résolution avec ode23
% pour utiliser ode23 on rentre directement en argument le vecteur temporel
% nécéssaire au calcul (tspan). Dans my_ode, il fallait rentrer [a;b] et le
nombre
% de points ce qui revient exactement au même
tspan = [a:h:b];
[t_ode23_2,sol_ode23_2] = ode23(@F_2,tspan,CI);

%% Résolution analytique en calcul symbolique
%définition des variables et de la fonction symbolique
syms t;
syms y(t);

% définition des dérivées symboliques successives de f(t)
D1y=diff(y,1);
D2y=diff(y,2);

% Construction de l'équation à résoudre et résolution à l'aide de la
% fonction dsolve et spécification des conditions initiales
equ=5*D2y+D1y+y==2;
sol_symbolique(t)=dsolve(equ,y(0)==CI(1),D1y(0)==CI(2));

% calcul des valeurs du vecteur sol_ana qui contient les valeurs de la
% solution calculée analytiquement

t_ana = [a:h:b];
sol_ana = sol_symbolique(t_ana);

% conversion de la fonction symbolique en double précision
sol_ana = double(sol_ana);

%représentation graphique de la solution
figure;
hold all;
% Tracé de la première colonne de la matrice sol qui correcspond à la
% fonction y, solution de l'équation différentielle
plot(t_my_ode_2,sol_my_ode_2(:,1),'b','LineWidth',2);
plot(t_ode23_2,sol_ode23_2(:,1),'k--','LineWidth',2);
plot(t_ana,sol_ana,'r');
grid on; grid minor;
title({'Comparaison des solveurs pour la résolution',...
    'd''une équation différentielle du second ordre',string(nb_points) + ' points
sont calculés '});

legend('Solution calculée avec my ode','Solution calculée avec ode23',...
    'Solution calculée analytiquement');
```

Figure 759 : comparaison des différentes méthodes de résolution d'une équation différentielle

Exécuter le script avec un nombre de points calculés très faible (nb_points = 100) et observer le résultat

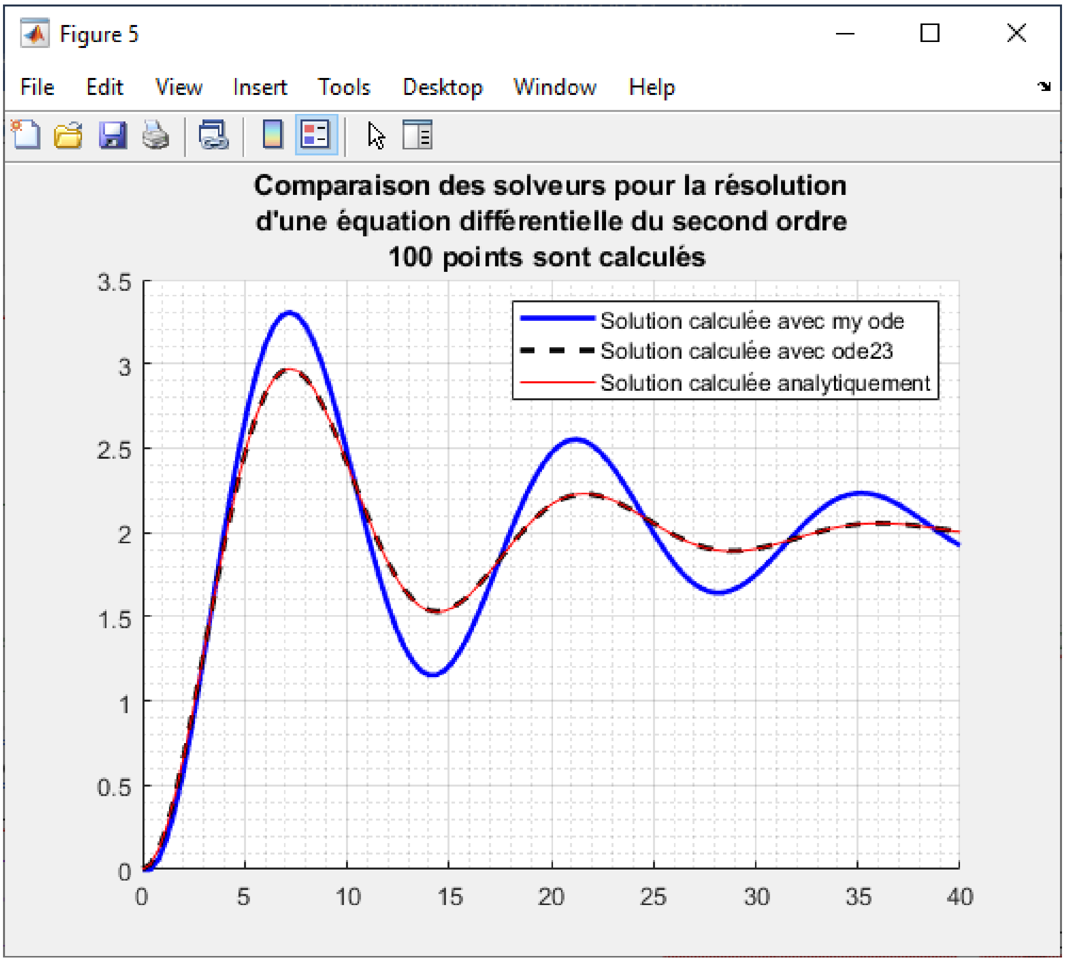


Figure 760 : comparaison des différentes méthodes de résolution d'une équation différentielle (100 points calculés)

Il apparaît que notre solveur **my_ode** nous donne une approximation de la solution avec une erreur très importante. Le solveur **ode23** est très proche de la solution analytique exacte et s'avère bien plus performant.

La simplicité du codage que nous avons adopté pour coder **my_ode** (6 lignes de code) le rend très sensible au nombre de points retenus pour le calcul. En toute logique et conformément à la méthode utilisée pour coder notre solveur la diminution du pas et l'augmentation du nombre de points calculés devrait améliorer considérablement sa précision.

Relancer le script en choisissant un nombre de point plus important (nb_points = 1000).

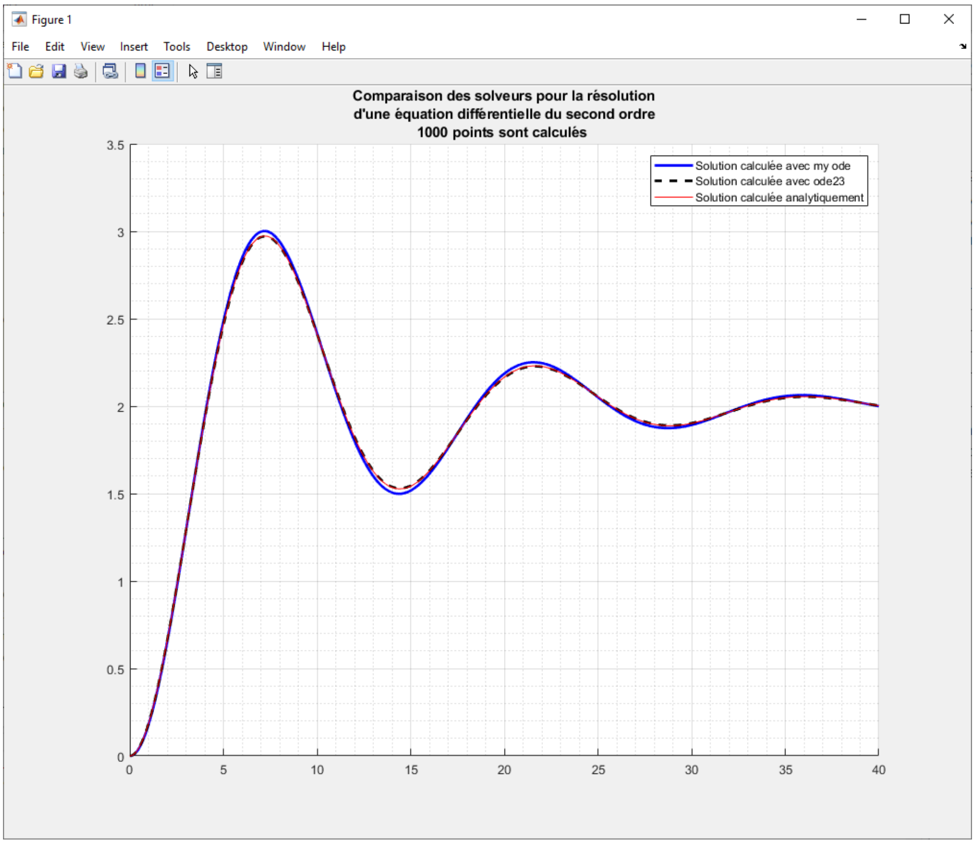


Figure 761 : comparaison des différentes méthodes de résolution d'une équation différentielle (1000 points calculés)

Nous pouvons constater que le solveur **my_ode** nous fournit une solution acceptable avec 1000 points calculés.

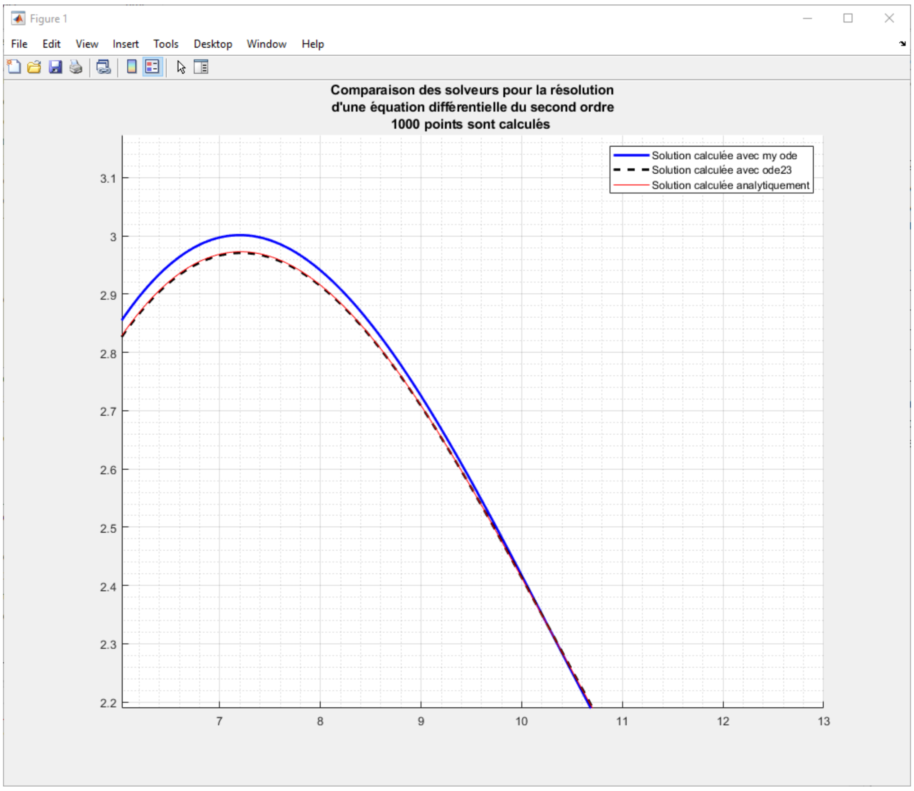


Figure 762 : zoom sur la courbe

A partir de 10000 points notre solveur donne le même ordre de grandeur de précision que **ode23**. Le temps de calcul est par contre considérablement augmenté.

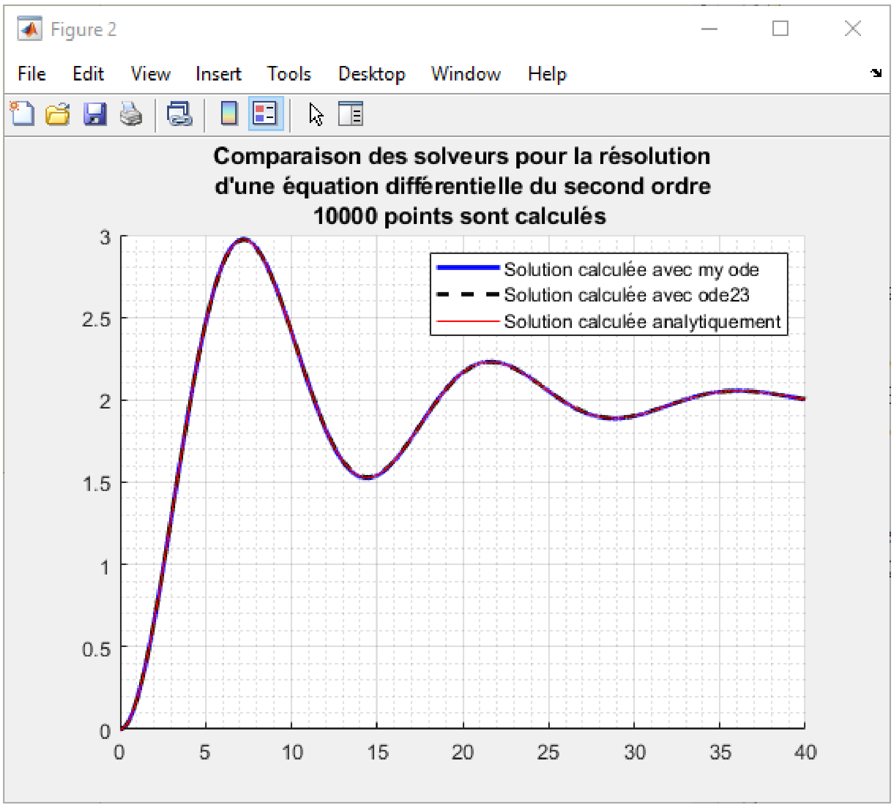


Figure 763 : comparaison des différentes méthodes de résolution d'une équation différentielle(10000 points calculés)

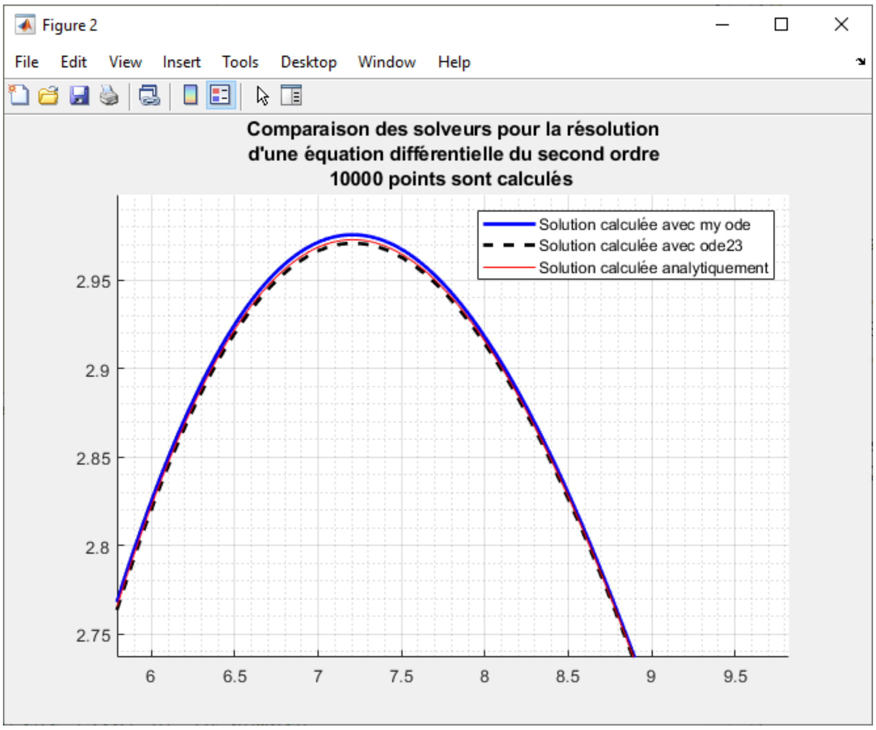


Figure 764 : zoom sur la courbe

3. Robustesse du processus. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 3

Afin de tester notre solveur sur une équation différentielle d'ordre supérieur à 2, nous allons considérer l'équation différentielle du troisième ordre suivante :

$$\begin{cases} y'''(t)+3\,y''(t)+3\,y'(t)+y(t)=10 \\ y(0)=1,\ y'(0)=0 \text{ et } y''(0)=3 \end{cases}$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{cases} y_1'(t)=y_2(t) \\ y_2'(t)=y_3(t) \\ y_3'(t)=10-3\,y_3(t)-3\,y_2(t)-y_1(t) \\ Y_0=\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow F(t,Y)=\begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_2(t) \\ 10-3\,y_3(t)-3\,y_2(t)-y_1(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1'(t)=y_2(t) \\ y_2'(t)=y_3(t) \\ y_2'(t)=10-3\,y_3(t)-3\,y_2(t)-y_1(t) \\ Y_0=\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} \end{cases}$$

$$Y'(t)=F\big(t,Y(t)\big) \text{ avec } F(t,Y)=\begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_2(t) \\ 10-3\,y_3(t)-3\,y_2(t)-y_1(t) \end{bmatrix} \text{ et } Y_0=\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$$

L'expression mathématique de cette équation différentielle sera définie dans la fonction **F_3.m** (Figure 765). Cette expression peut être modifiée si l'on souhaite résoudre une autre équation différentielle du second ordre. Dans cette fonction la sortie **F_3** calculée sera une matrice (3,1).

```
%% F_3.m
% Ivan LIEBGOTT @ Décembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% F_2.m contient l'expression de la fonction F(t,y) utilisée pour résoudre
% une équation différentielle du second ordre en utilisant la méthode d'Euler
% cette fonction correspond à l'équation différentielle suivante:
% d3y/dt3 + 3.d2y/dt2 + 3dy/dt + y = 10
% f(t,y) est une matrice 3-by-1 tel que :
% f(1) = y(2)
% f(2) = y(3)
% f(3) = 10 - 3*y(3) - 3*y(2) - y(1))/5

function f = F_3(t,y);
f = [y(2) ; y(3) ; (10 - 3*y(3) - 3*y(2) - y(1))/5];
end
```

Figure 765 : codage de la fonction F_3.m

Ouvrir le script **solve_ode_3.m** (Figure 766).

Ce script va permettre de tracer dans une même fenêtre graphique la solution de cette équation différentielle du troisième ordre calculée avec **my_ode** et avec **ode23** . Il n'y a aucune modification à faire sur la fonction **my_ode** qui peut traiter des matrices de toute dimension.

Il est possible de définir en début de script l'intervalle de calcul [a ; b] et le nombre de points **nb_points** utilisés pour le calcul.

```
%% solve_ode_3
% Ivan LIEBGOTT @ Décembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% comparaison de my_ode et ode_23 pour la résolution d'une équation
% différentielle du troisième ordre
% définition de l'intervalle d'étude  [a;b] de la fonction considérée
a = 0;
b = 40;

% spécification du nombre de points et du pas h
nb_points = 4000;
h= (b-a) / nb_points;

%% Résolution d'une équation différentielle du second ordre en utilisant
% des solveurs numériques

% spécification des conditions initiales CI = [y0 ; dydt0] (matrice 2-by-1)
CI = [1;0;3];

% Résolution avec my_ode
[t_my_ode_3,sol_my_ode_3] = my_ode(@F_3,a,b,CI,nb_points);

% Résolution avec ode23
% pour utiliser ode23 on rentre directement en argument le vecteur temporel
% nécéssaire au calcul (tspan). Dans my_ode, il fallait rentrer [a;b] et le
% nombre de points ce qui revient exactement au même
tspan = [a:h:b];
[t_ode23_3,sol_ode23_3] = ode23(@F_3,tspan,CI);

%représentation graphique de la solution
```

```
figure;
hold all;
% Tracé de la première colonne de la matrice sol qui correspond à la
% fonction y, solution de l'équation différentielle
plot(t_my_ode_3,sol_my_ode_3(:,1),'b','LineWidth',2);
plot(t_ode23_3,sol_ode23_3(:,1),'k--','LineWidth',2);

grid on; grid minor;
title({'Comparaison des solveurs pour la résolution',...
    'd''une équation différentielle du troisième ordre',string(nb_points) + '
points sont calculés '});

legend('Solution calculée avec my ode','Solution calculée avec ode23');
```

Figure 766 : résolution d'une équation différentielle d'ordre 3 avec my_ode et ode23

Exécuter le script et observer le résultat sur la Figure 767.

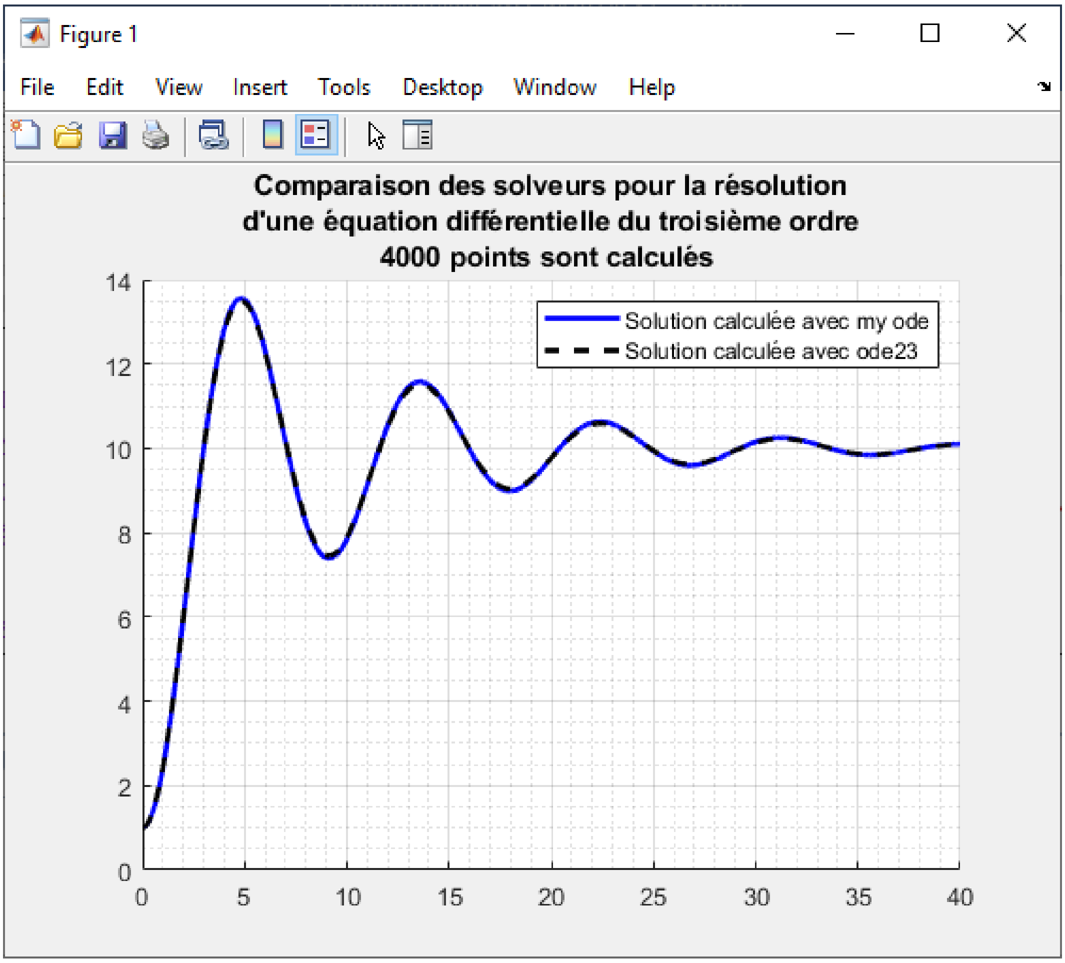


Figure 767 : solution d'une équation différentielle du troisième ordre

Le calcul étant réalisé avec 4000 points, le résultat obtenu avec **my_ode** est satisfaisant.

4. Robustesse du processus. Application à la résolution de l'équation de Van der Pol

La documentation de la fonction **ode23** de MATLAB propose la résolution de l'équation différentielle de Van der Pol.

$$y_1''(t) - \left(1 - y^2(t)\right) + y(t) = 0$$

Ouvrir le script **solve_ode_Van_der_Pol.m** permet de tester la résolution de cette équation à l'aide de **my_ode** et de **ode23**. La fonction F(t,y) correspondant à l'équation de Van der Pol est définie en fin de script.

```
%% solve_ode_Van_der_Pol
% Ivan LIEBGOTT @ Décembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% comparaison de my_ode et ode_23 pour la résolution de l'équation
% différentielle de Van der Pol (@ Mathworks documentation)
% La fonction qui définit la fonction F(t,y) est définie en fin de script

% définition de l'intervalle d'étude  [a;b] de la fonction considérée
a = 0;
b = 40;

% spécification du nombre de points et du pas h
nb_points = 10000;
h= (b-a) / nb_points;

%% Résolution de l'équation différentielle de Van der Pol

% spécification des conditions initiales CI = [y0 ; dydt0] (matrice 2-by-1)
CI = [2;0];

% Résolution avec my_ode
[t_my_ode_vdp,sol_my_ode_vdp] = my_ode(@vdp,a,b,CI,nb_points);

% Résolution avec ode23
% pour utiliser ode23 on rentre directement en argument le vecteur temporel
% nécéssaire au calcul (tspan). Dans my_ode, il fallait rentrer [a;b] et le
nombre
% de points ce qui revient exactement au même
tspan = [a:h:b];
[t_ode23_vdp,sol_ode23_vdp] = ode23(@vdp,[a b],CI);

%représentation graphique de la solution
figure;
hold all;
% Tracé de la première colonne de la matrice sol qui correspond à la
% fonction y, solution de l'équation différentielle
plot(t_my_ode_vdp,sol_my_ode_vdp(:,1),'c','LineWidth',2);
plot(t_ode23_vdp,sol_ode23_vdp(:,1),'k--','LineWidth',2);

grid on; grid minor;
title({'Comparaison des solveurs pour la résolution',...
    'd''une équation différentielle du troisième ordre',string(nb_points) + '
points sont calculés '});

legend('Solution calculée avec my ode','Solution calculée avec ode23');

function f = vdp(t,y)
f = [y(2); (1-y(1)^2)*y(2)-y(1)];
end
```

Figure 768 : résolution de l'équation différentielle de Van der Pol

Exécuter le script et observer le résultat sur la Figure 769.

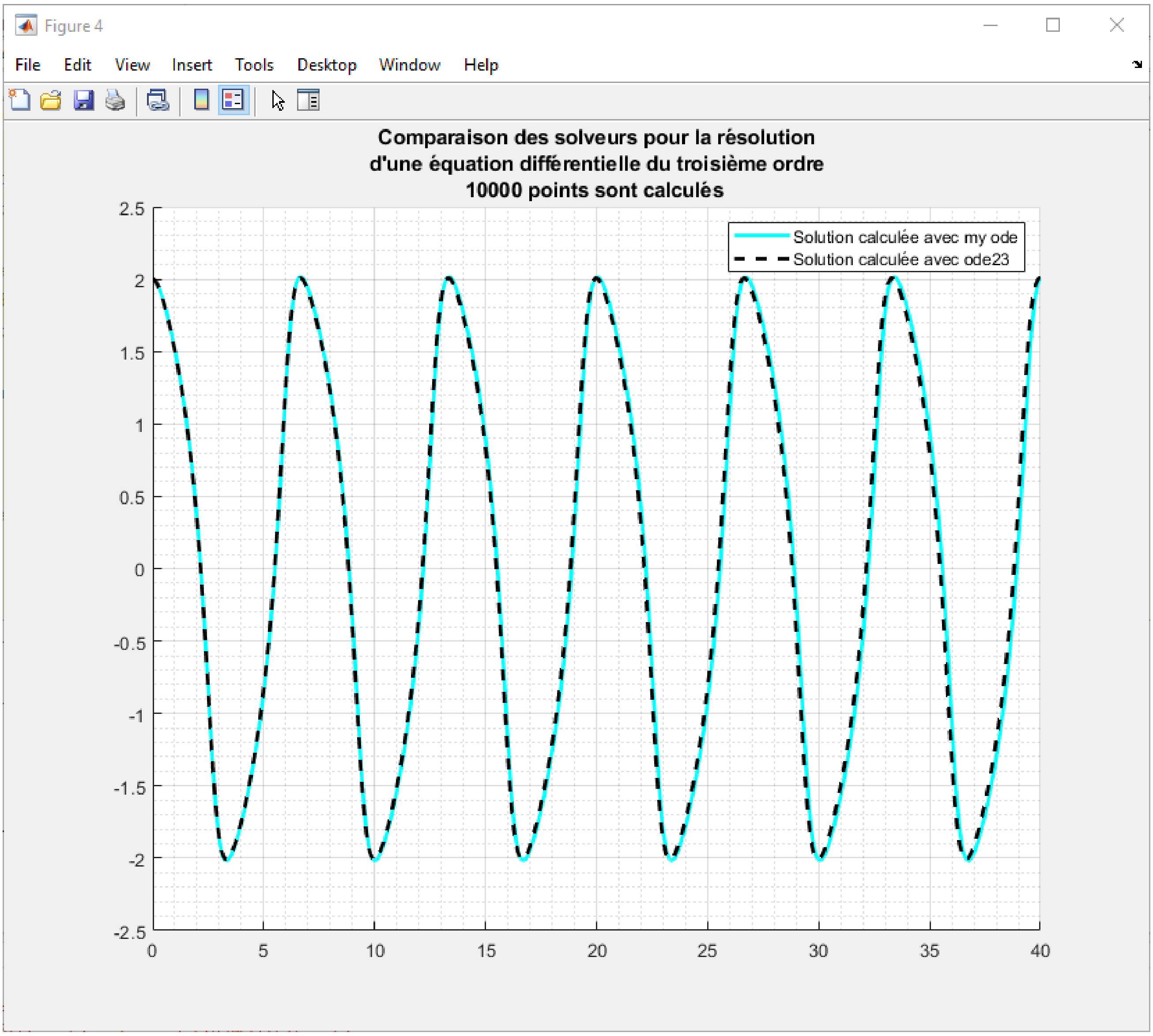


Figure 769 : solution de l'équation différentielle de Van der Pol, 10000 points calculés

La prise en compte d'un grand nombre de points (10000) garantit pour cet exemple la précision de résolution pour notre solveur **my_ode**.

Vous pouvez donc utiliser le solveur **my_ode** pour résoudre toutes les équations différentielles d'ordre quelconques, linéaires et non linéaires à conditions de choisir un nombre important de points de calcul.

C. Applications

1. Modélisation d'un oscillateur mécanique

La modélisation d'un problème se ramène très souvent à la résolution d'une équation différentielle. Prenons l'exemple de l'oscillateur mécanique de la Figure 770. Le mouvement est déclenché par un écartement de la masse par rapport à sa position d'équilibre de Δx=0.1 m. La masse évolue ensuite librement.

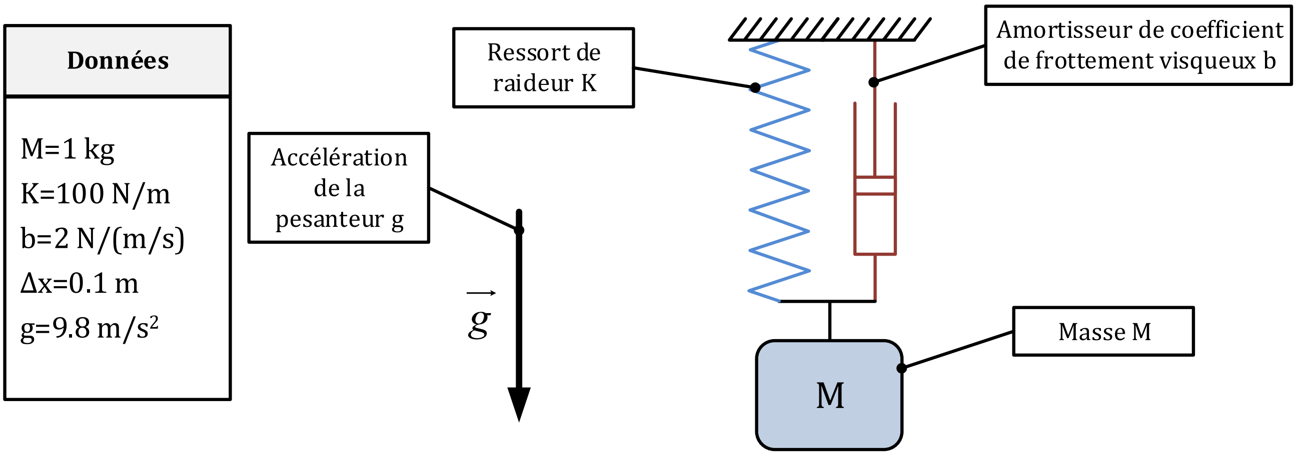


Figure 770 : oscillateur mécanique avec prise en compte de la pesanteur

En isolant la masse et en appliquant le principe fondamental de la dynamique, on obtient l'équation différentielle qui caractérise l'évolution de la position $x(t)$. en fonction du temps.

$$M\ v'(t)+b\ v(t)+K\ x=M\ g$$

En exploitant le fait que $v=\dfrac{dx}{dt}$, l'équation différentielle se ramène une équation différentielle du second ordre en $x(t)$. :

$$\boxed{M\ x''(t)+b\ x'(t)+K\ x=M\ g}$$

Les conditions initiales sont données par : $\begin{cases} x(0)=0.1 \\ x'(0)=0 \end{cases}$

2. Les différentes méthodes de résolution d'une équation différentielle avec MATLAB

Nous allons les différentes méthodes que nous propose MATLAB pour résoudre ce type d'équation et trouver l'évolution de $x(t)$.en fonction du temps.

- Résolution en utilisant notre solveur **my_ode** (code MATLAB)
- Résolution en utilisant **ode23** (code MATLAB)
- Résolution en utilisant le calcul symbolique (code MATLAB)
- Résolution à l'aide de Simulink en construisant un modèle Simulink de l'équation différentielle
- Résolution avec Simscape en construisant le modèle multi-physique de système masse ressort

Toutes ces méthodes vont donner des résultats satisfaisants.

3. Résolution avec my_ode, ode 23 et en calcul symbolique

L'équation différentielle du second ordre peut se mettre sous la forme d'un système d'équations différentielle du premier ordre.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \dfrac{1}{M}\left(M\ g - b\ y_2 - K\ y_1\right) \end{cases}$$

Pour utiliser les solveurs pour résoudre cette équation différentielle il faut commencer par créer la fonction qui va contenir l'équation différentielle. Le codage de la fonction **F_mass_spring_damper.m** est donné sur la Figure 771.

```
%% F_mass_spring_damper.m
% Ivan LIEBGOTT @ Décembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% F_mass_sprog_damper.m contient l'expression de la fonction F(t,y) utilisée pour
résoudre
% l'équation différentielle du second ordre correspondant à un oscillateur
% mécanique:
% M.d2y/dt2 + b.dy/dt + K.y = M.g
% F(t,y) est une matrice 2-by-1 tel que :
% f(1) = y(2)
% f(2) = M.g-b.y(2)-K.y(1))/M

function f = F_mass_spring_damper(t,y);

% définition des grandeurs physique qui interviennent dans l'équation
m = 1;      % mass : kg
k = 100;    % spring rate : N/m
b = 2;      % damping coefficient : N/(m/s)
g = 9.81;   % gravity acceleration : N/kg

f = [y(2) ; (m*g-b*y(2)-k*y(1))/m];
end
```

Figure 771 : codage de la fonction F_mass_spring_damper.m

Le script **ode_solve_mass_spring_damper.m** permet de résoudre l'équation différentielle en utilisant le solveur **my_ode**, le solveur **ode23** et le calcul symbolique pour déterminer la solution analytique exacte.

```
%% ode_solve_mass_spring_damper.m
% Ivan LIEBGOTT @ Décembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Permet la résolution de l'équation différentielle de l'oscillateur
% mécanique en utilisant my_ode et ode23
% définition de l'intervalle d'étude  [a;b] de la fonction considérée
a = 0;
b = 5;

% spécification du nombre de points
nb_points = 5000;
```

```
h= (b-a) / nb_points;

%% Résolution d'une équation différentielle du second ordre en utilisant
% des solveurs numériques

% spécification des conditions initiales CI = [y0 ; dydt0] (matrice 2-by-1)
CI = [0.1;0];

% Résolution avec my_ode
[t_my_ode,sol_my_ode] = my_ode(@F_mass_spring_damper,a,b,CI,nb_points);

% Résolution avec ode23
% pour utiliser ode23 on rentre directement en argument le vecteur temporel
% nécéssaire au calcul (tspan). Dans my_ode, il fallait rentrer [a;b] et le
nombre
% de points ce qui revient exactement au même
tspan = [a:h:b];
[t_ode23_2,sol_ode23_2] = ode23(@F_mass_spring_damper,tspan,CI);

%% Résolution analytique en calcul symbolique
%définition des variables et de la fonction symbolique
syms t;
syms y(t);

% définition des grandeurs physique qui interviennent dans l'équation
m = 1;      % mass : kg
k = 100;    % spring rate : N/m
b = 2;      % damping coefficient : N/(m/s)
g = 9.81;   % gravity acceleration : N/kg

% définition des dérivées symboliques successives de f(t)
D1y=diff(y,1);
D2y=diff(y,2);

% Construction de l'équation à résoudre et résolution à l'aide de la
% fonction dsolve et spécification des conditions initiales
equ= m*D2y + b*D1y + k*y ==m*g;
sol_symbolique(t)=dsolve(equ,y(0)==CI(1),D1y(0)==CI(2));

% calcul des valeurs du vecteur sol_ana qui contient les valeurs de la
% solution calculée analytiquement

t_ana = [a:h:b];
sol_ana = sol_symbolique(t_ana);

% conversion de la fonction symbolique en double précision
sol_ana = double(sol_ana);

%représentation graphique de la solution
figure;
hold all;
% Tracé de la première colonne de la matrice sol qui correcspond à la
% fonction y, solution de l'équation différentielle
plot(t_my_ode,sol_my_ode(:,1),'b','LineWidth',2);
plot(t_ode23_2,sol_ode23_2(:,1),'k--','LineWidth',2);
plot(t_ana,sol_ana,'r');
grid on; grid minor;
title({'Résolution de l''équation différentielle de l''oscillateur mécanique',...
    'en utilisant 3 méthodes différentes',string(nb_points) + ' points sont
calculés '});
```

```
legend('Solution calculée avec my ode','Solution calculée avec ode23',...
    'Solution calculée en symbolique');
```

Figure 772 : Calcul et tracé de la solution de l'équation différentielle en utilisant 3 méthodes de résolution

Ouvrir le script et **exécuter** le.

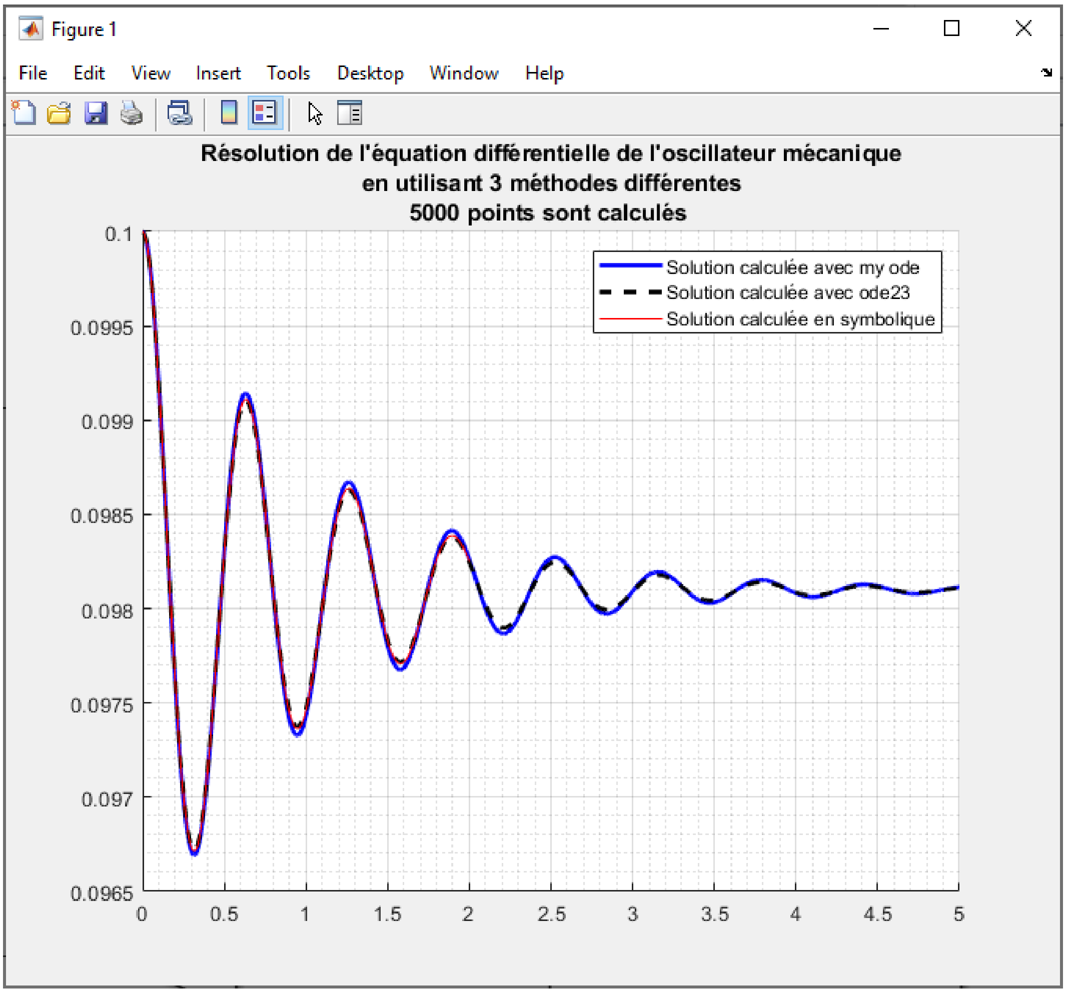


Figure 773 : résolution de l'équation différentielle avec 3 méthodes

Nous pouvons constater que les trois méthodes sont valables et donnent des résultats satisfaisants.

4. Résolution de l'équation différentielle avec Simulink

Pour résoudre une équation différentielle avec Simulink, il suffit de construire un modèle à partir de la forme suivante de l'équation :

$$\boxed{x''(t) = \frac{1}{M}\left(M\ g - b\ x'(t) - K\ x\right)}$$

Ouvrir le fichier **simulink_resolution.slx.**

La Figure 774 représente le modèle permettant de résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur mécanique en utilisant Simulink.

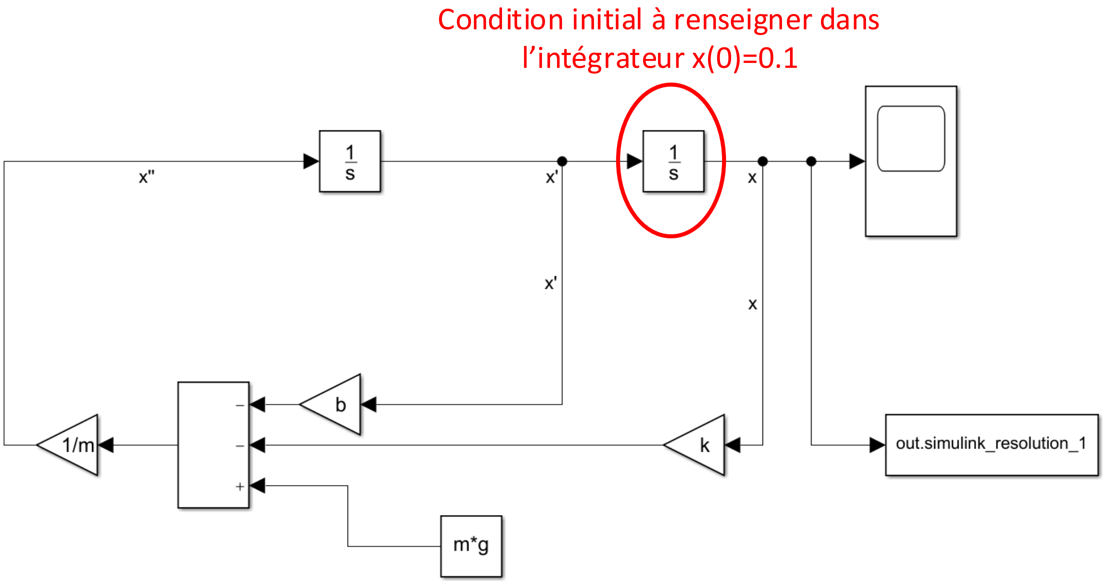


Figure 774 : modèle permettant la résolution de l'équation différentielle avec Simulnk

Afin de prendre en compte la condition initiale x(0)=0.1, il faut compléter le bloc intégrateur correspondant à la position x comme indiqué sur la Figure 775.

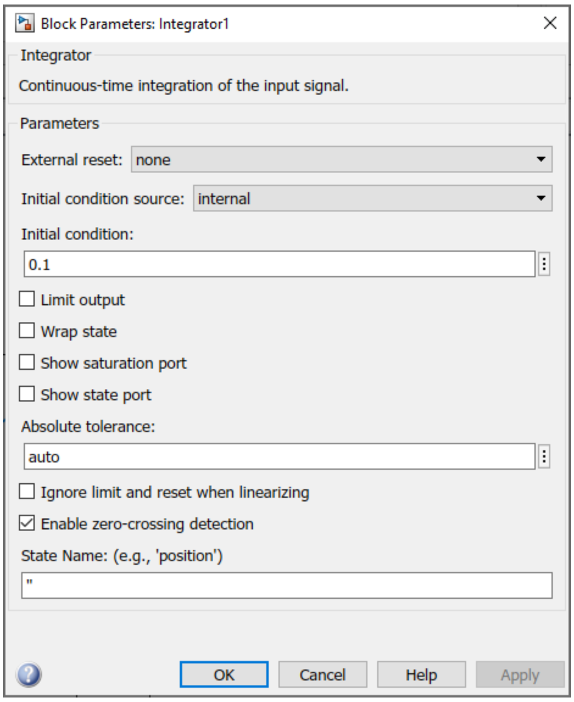


Figure 775 : spécification de la condition initiales x(0)=0.1 dans l'intégrateur de la position

Lancer la simulation et observer la réponse dans le scope de la Figure 776.

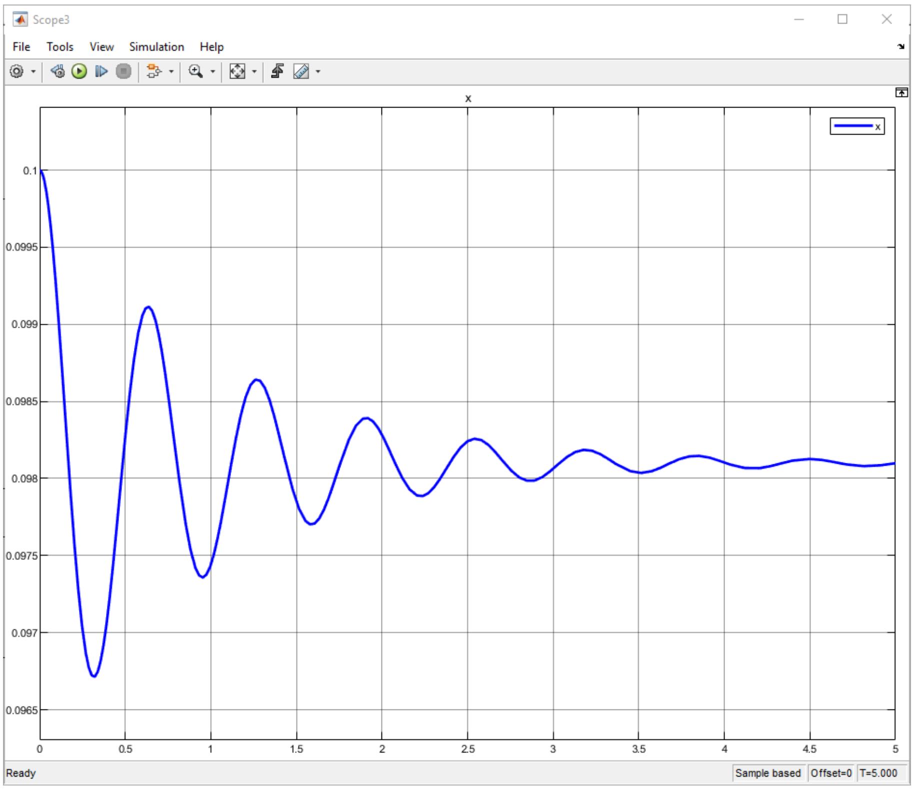


Figure 776 : visualisation de la solution x(t) déterminée avec Simulink

Nous pouvons constater que la réponse est identique à celles déterminées à l'aide des solveurs **my_ode** et **ode23** ainsi qu'en calcul symbolique.

5. Résolution de l'équation différentielle avec Simscape

Ouvrir le fichier **simscape_resolution.slx**.
Afin de résoudre l'équation différentielle avec Simscape, il faut construire le modèle multi-physique de la Figure 777.

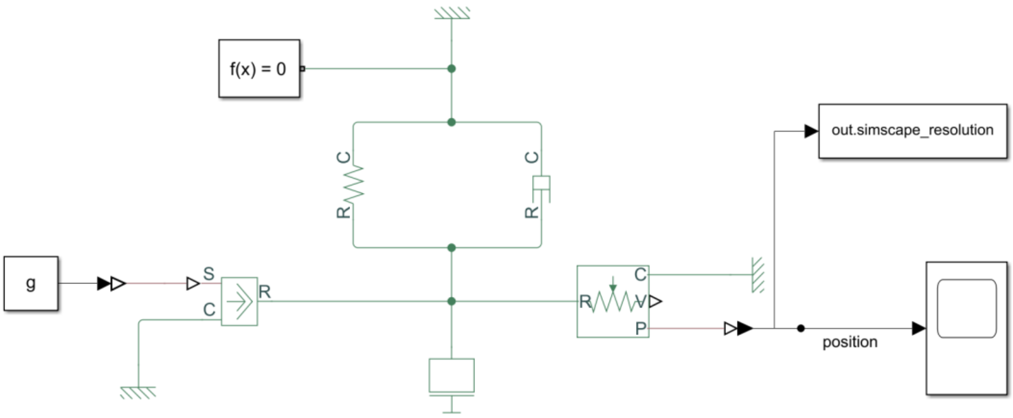


Figure 777 : modèle multi_physique du système masse-ressort-amortisseur

Afin de spécifier la condition initiale, il faut indiquer que le ressort n'est pas à sa position d'équilibre en début de simulation. Pour cela, **double-cliquer** sur le ressort et sélectionner l'onglet **Variables**.

Indiquer ensuite que la déformation initiale est de 0.1 m comme indiqué sur la Figure 778.

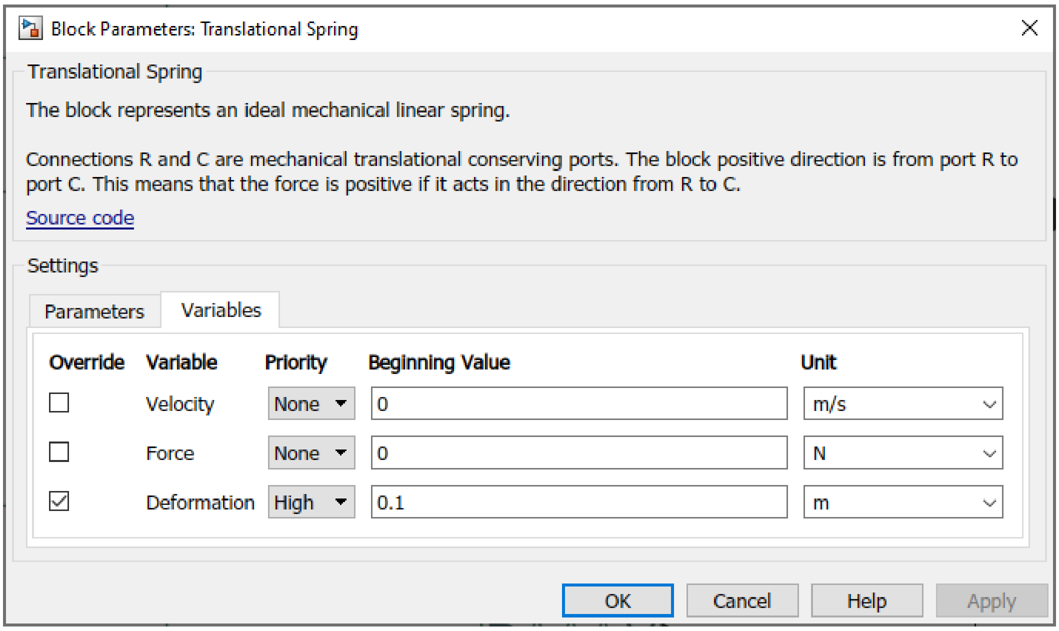


Figure 778 : spécification de la condition initiale dans Simscape

Lancer la simulation et observer la réponse dans le scope de la Figure 779.

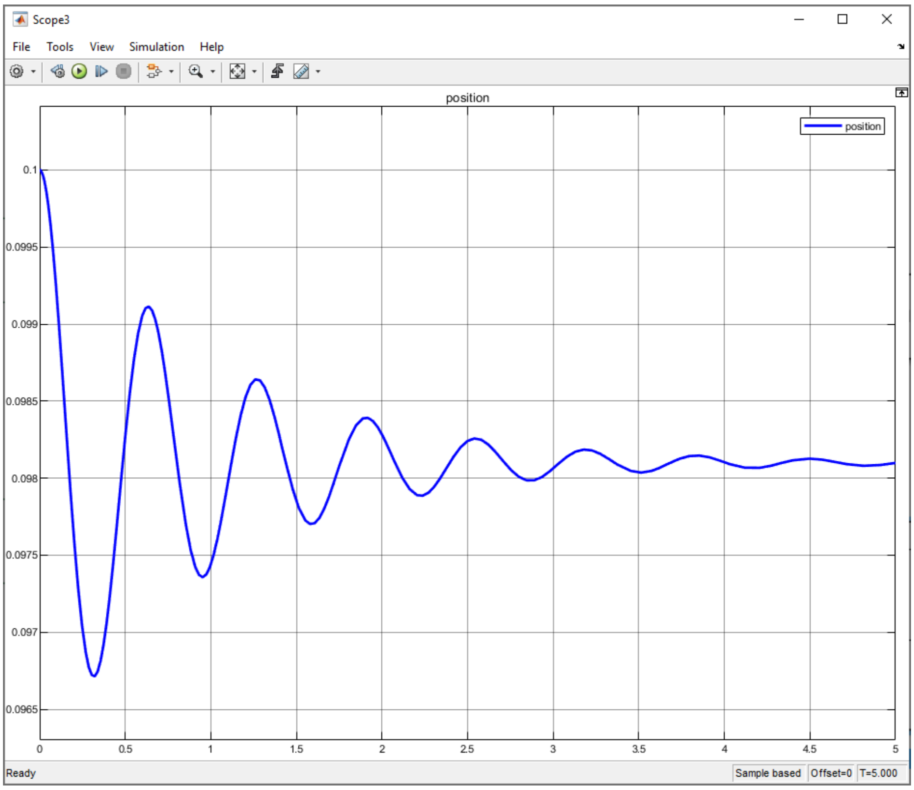


Figure 779 : visualisation de la solution x(t) calculée avec Simscape

Nous pouvons constater que la réponse est identique à celles déterminées par les autres méthodes.

VIII. Résolution de systèmes linéaires – Méthode de Gauss

A. Présentation de la méthode

Ce chapitre présente l'application de la méthode de Gauss dans la résolution d'un système linéaire de n équations à n inconnues admettant une solution unique. La méthode permet de substituer au système initial, un système équivalent qui sera plus facile à résoudre.

Soit le système linéaire de n équations à n inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}\ x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + \dots\dots\dots + a_{nn}\ x_n = b_1 \end{cases}$$

En posant : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Ce système peut se mettre sous forme matricielle : $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Connaissant les matrices A et B, l'algorithme de résolution à mettre en place doit nous permettre de trouver la solution X.

Dans un premier le système sera transformé en système triangulaire équivalent :

$$\begin{cases} a'_{11}\ x_1 + a'_{12}\ x_2 + \dots\dots\dots + a'_{1n}\ x_n = b_1 \\ 0 + a'_{22}\ x_2 + \dots\dots\dots + a'_{2n}\ x_n = b_1 \\ \vdots \\ 0 + 0 + \dots\dots\dots + a'_{nn}\ x_n = b_1 \end{cases} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix}$$

Afin de ne travailler que sur une seule matrice pour réaliser les différentes opérations, nous travaillerons avec la matrice augmentée M en concaténant A et B.

$$M = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix}$$

La résolution se fera alors de bas en haut en partant de la dernière équation (une équation pour une inconnue) :

$$\boxed{x_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}}}$$

Il suffira ensuite de substituer les inconnues trouvées dans les lignes inférieures pour trouver l'inconnue de la ligne supérieure. Le système est alors résolu en remontant ainsi jusqu'à la première équation.

B. Exemple

Soit le système suivant de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} x+4y+z=4 & (L_1) \\ 2x+2y+z=1 & (L_2) \\ x+4y+2z=2 & (L_3) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. Recherche du pivot

Nous commençons par chercher le plus grand coefficient devant la première inconnue x. Ce premier coefficient s'appelle le premier **pivot**. Dans notre exemple, le premier pivot pour l'inconnue x se trouve en L_2 .

$$\begin{cases} x+4y+z=4 & (L_1) \\ 2x+2y+z=1 & (L_2) \\ x+4y+2z=2 & (L_3) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Le choix du pivot aura une incidence sur la stabilité de l'algorithme. Les choix de pivots trop petits peuvent engendrer des erreurs d'arrondis. Nous admettrons que le choix du plus grand pivot améliore la stabilité de l'algorithme.

2. Echange de lignes

Nous faisons remonter l'équation correspondant au pivot en première position.

$$\begin{cases} 2x+2y+z=1 & (L_1) \\ x+4y+z=4 & (L_2) \\ x+4y+2z=2 & (L_3) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Transvection - Triangularisation

Il faut maintenant faire disparaitre l'inconnue correspondant au pivot choisi dans les deux autres équations. Pour cela, nous allons réaliser des opérations de transvection :

$$\boxed{\begin{cases} L_2 \Rightarrow L_2 - \dfrac{1}{2} L_1 \\ L_3 \Rightarrow L_3 - \dfrac{1}{2} L_1 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ x - \dfrac{2x}{2} + 4y - \dfrac{2y}{2} + z - \dfrac{z}{2} = 4 - \dfrac{1}{2} \\ x - \dfrac{2x}{2} + 4y - \dfrac{2y}{2} + 2z - \dfrac{z}{2} = 2 - \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 3y + \dfrac{z}{2} = \dfrac{7}{2} \\ 3y + \dfrac{3}{2} z = \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1/2 \\ 0 & 3 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Nous recommençons la recherche du plus grand pivot avec la seconde inconnue y. Le plus grand pivot pour l'inconnue y est en L_2. Il n'y pas d'échange de lignes à faire.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 3y + \dfrac{z}{2} = \dfrac{7}{2} \\ 3y + \dfrac{3}{2} z = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Il faut refaire une opération de transvection pour faire disparaitre la variable y de l'équation 3.

$$\boxed{L_3 \Rightarrow L_3 - L_2}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 3y + \dfrac{z}{2} = \dfrac{7}{2} \\ 3y - 3y + \dfrac{3}{2} z - \dfrac{z}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 3y + \dfrac{z}{2} = \dfrac{7}{2} \\ z = -2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7/2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

4. Résolution

Le processus de résolution peut alors débuter.

On résout pour commencer l'équation du bas (L_3) :

$$\boxed{z=-2}$$

On injecte la valeur de z pour déterminer y dans la seconde équation (L_2) :

$$3y+\frac{z}{2}=\frac{7}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}-\frac{z}{2}\right)\Rightarrow \boxed{y=\frac{3}{2}}$$

On injecte les valeurs de y et z pour déterminer x dans la première équation (L_1) :

$$2x+2y+z=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}(1-2y-z)\Rightarrow \boxed{x=0}$$

La solution recherchée est $\boxed{X=\begin{bmatrix}0\\1.5\\-2\end{bmatrix}}$

C. Codage en langage MATLAB

Vous pouvez trouver les fichiers de toutes les fonctions présentées dans ce paragraphe dans le dossier **Algorithmique_avec_MATLAB/ Pivot de Gauss.**

Ce type d'algorithme de résolution nécessite de nombreuses opérations et peut s'avérer complexe à valider s'il n'est pas structuré rigoureusement avec des fonctions. Une bonne méthode consiste à isoler chaque fonction élémentaire de l'algorithme, de les coder dans des fichiers séparés afin de pouvoir les valider les unes après les autres. Une fois la validation de toutes les fonctions élémentaires effectuée, il sera très simple de construire une dernière fonction permettant de coordonner toutes les fonctions de notre algorithme.

1. Recherche du pivot

Cette recherche consiste à trouver la ligne correspondant au plus grand pivot (en valeur absolue). Il suffira de chercher la ligne avec le plus grand coefficient devant la variable considérée. Pour une colonne k donnée, la fonction devra parcourir tous les coefficients de la matrice qui correspondent à cette colonne en partant de l'élément A(k,k) (Figure 780).

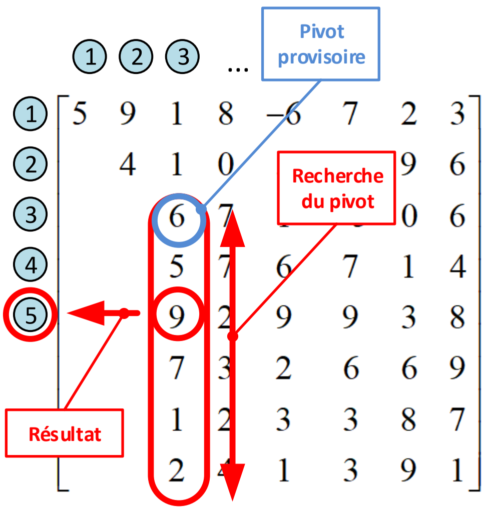


Figure 780 : recherche du numéro de ligne du plus grand pivot

La fonction **num_ligne_pivot.m (A,num_col)** permet de réaliser ce processus de recherche (Figure 781).

Cette fonction prendra en arguments :
A: matrice correspondant au système à résoudre
num_col : numéro de la colonne correspondant à la recherche du pivot

La fonction aura comme sorties :
n : numéro de la colonne correspondant au plus grand pivot

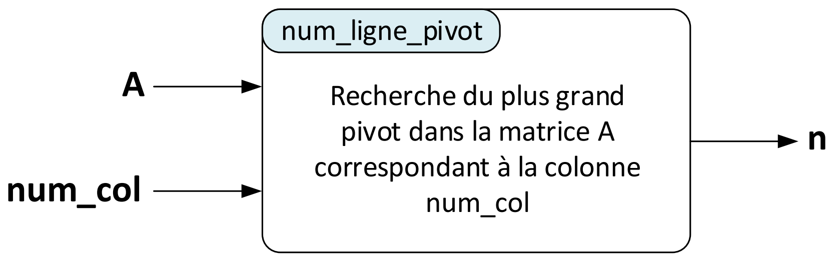


Figure 781 : fonction num_ligne_pivot.m

La Figure 782 montre le codage de la fonction **num_ligne_pivot(A,num_col).**

```
%% n = num_ligne_pivot(A,num_col)
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Cette fonction est utilisée par le script Pivot_de_Gauss.m
% Recherche la ligne correspondant au plus grand pivot de la colonne
% num_col pour la matrice A

function n = num_ligne_pivot(A,num_col);

% affectation du nombre de lignes et du nombre de colonne de la matrice
[nb_lignes, nb_colonnes] = size(A);

% affectation du pivot provisoire à la ligne correspondant à num_col. La
% ligne du pivot provisoire correspond à la colonne de recherche
n = num_col;
```

```
% on parcourt la colonne en effectuant une comparaison élément par élément
for k = num_col:1:nb_lignes
    if abs(A(k,num_col)) > abs(A(n,num_col))
        % on récupère la valeur du pivot si l'élément comparé est plus
        % grand que le pivot mémorisé
        n = k;
    end
end
end
```

Figure 782 : codage de la fonction num_ligne_pivot(A,num_col)

Afin de valider la fonction, nous allons faire des tests sur une matrice générée aléatoirement.
Tapez dans la fenêtre de commande la commande suivante :

```
>> A = randi(50,5)

A =

  39   15   26   34   13
  22   23   48   15   12
   5   27   32   34   34
  14   23   48   35   43
   8   44   13    4   18
```

La commande randi(50,5) permet de créer une matrice 5x5 en choisissant des nombres entiers aléatoires entre 1 et 50.

Testons maintenant notre fonction en recherchant le plus grand pivot de chaque colonne. Il faut que la fonction **num_ligne_pivot.m** soit dans le path de MATLAB pour que nous puissions l'utiliser dans la fenêtre de commande ou dasn un script.
Il faut bien noter que **pour chaque colonne k, la recherche commence à la ligne k** et notre algorithme ne recherche pas le plus grand élément de la colonne.

```
>> num_ligne_pivot(A,1)
ans =
    1      (le plus grand pivot de la colonne 1 est bien en ligne 1, la recherche commence en ligne 1)

>> num_ligne_pivot(A,2)

ans =
    5      (le plus grand pivot de la colonne 2 est bien en ligne 5, la recherche commence en ligne 2)

>> num_ligne_pivot(A,3)
ans =
    4      (le plus grand pivot de la colonne 3 est bien en ligne 3, la recherche commence en ligne 3)

>> num_ligne_pivot(A,4)
ans =
    4      (le plus grand pivot de la colonne 4 est bien en ligne 4, la recherche commence en ligne 4)

>> num_ligne_pivot(A,5)
ans =
```

```
   5      (le plus grand pivot de la colonne 5 est bien en ligne 5, la recherche commence en ligne 5)
```

Il est également possible de tester notre fonction avec une matrice contenant des nombres positifs et négatifs.

```
>> A = randi([-50,50],5)

A =

  -23     8    15    21    -4
   27    19    18   -27    16
  -31     5    14   -38    27
  -21    -8    45    11   -15
  -41    15   -29    -5    16

>> num_ligne_pivot(A,1)
ans =
   5

>> num_ligne_pivot(A,2)
ans =
   2
```

Notre fonction **num_ligne_pivot(A,num_col)** est maintenant validée.

2. Echange de lignes

La fonction **echange_lignes(A,ligne_i,ligne_j)** (Figure 783) permet d'échanger les lignes i et j de la matrice A.
Cette fonction prendra en arguments :
A: matrice
ligne_i : ligne à échanger
ligne_j : ligne à échanger

La fonction aura comme sorties :
A : matrice A modifiée avec les lignes i et j échangées.

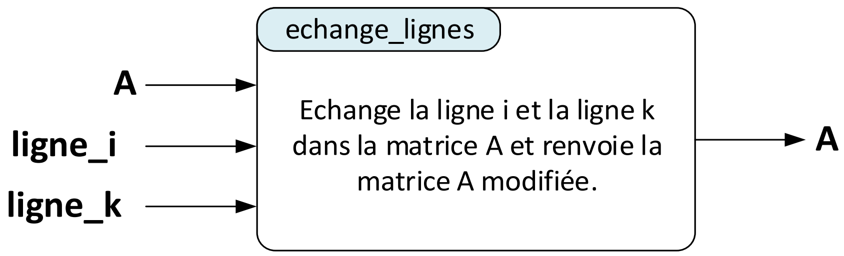


Figure 783 : fonction echange_lignes(A, ligne_i, ligne_j)

La Figure 784 montre le codage de la fonction **echange_ligne(A, ligne_i, ligne_k).**

```
%% B = echange_lignes(A,ligne_i,ligne_k)
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Cette fonction est utilisée par le script Pivot_de_Gauss.m
```

```
% Permet d'échanger la ligne_i et la ligne_k dans la matrice A

function A = echange_lignes(A,ligne_i,ligne_k)
% permutation des éléments des lignes i et j
A([ligne_i ligne_k],:) = A([ligne_k ligne_i],:);
end
```

Figure 784 : codage de la fonction echange_ligne(A, ligne_i, ligne_k)

Testons maintenant notre fonction en créant une matrice aléatoirement et en testant la permutation des lignes i et j.

```
>> A = randi(100,5,5)

A =

  76   74    2   83   40
  25   40   34   43   81
  45   69   43   89   76
  69   71   28   40   38
  36   45   20   77   22
>> echange_lignes(A,1,5)

ans =

  36   45   20   77   22
  25   40   34   43   81
  45   69   43   89   76
  69   71   28   40   38
  76   74    2   83   40

>> echange_lignes(A,2,3)

ans =

  76   74    2   83   40
  45   69   43   89   76
  25   40   34   43   81
  69   71   28   40   38
  36   45   20   77   22
```

(les lignes 1 et 5 ont bien permutés par rapport à la matrice A)

(les lignes 2 et 3 ont bien permutés par rapport à la matrice A)

Notre fonction **echange_lignes(A, ligne_i, ligne_j)** est maintenant validée.

3. Transvection

La fonction **transvection(A, Ligne_pivot)** (Figure 785) permet de réaliser les opérations de transvection qui éliminent l'inconnue correspondant au pivot dans toutes les autres équations.

Cette fonction prendra en arguments :
A: matrice augmentée correspondant au système à résoudre
Ligne_pivot : numéro de la ligne du pivot ou se trouve l'inconnue à éliminer dans les autres équations

La fonction aura comme sorties :
A : matrice A modifiée par les opérations de transvection

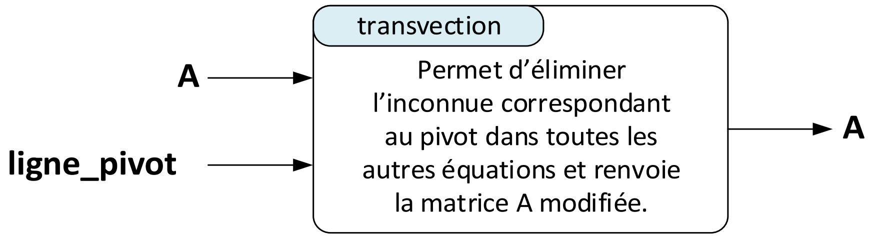


Figure 785 : fonction transvection(A, num_ligne_pivot)

La Figure 786 montre le codage de la fonction **transvection(A,num_ligne_pivot).**

```
%% A = transvection(A,num_ligne_pivot)
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Cette fonction est utilisée par le script Pivot_de_Gauss.m
% Permet de soustraire à la ligne Li la Ligne_pivot multipliée par un
% coefficient c.

function A = transvection(A,num_ligne_pivot)
% affectation du nombre de lignes et du nombre de colonne de la matrice
[nb_lignes, nb_colonnes] = size(A);

% la boucle parcourt les lignes en partant de num_ligne_pivot + 1
for k = num_ligne_pivot + 1:1:nb_lignes

    % calcul du coefficient c permettant d'éliminer l'inconnue
    c = A(k,num_ligne_pivot) / A(num_ligne_pivot,num_ligne_pivot);

    % opération de transvection
    A(k,:) = A(k,:) -  c * A(num_ligne_pivot,:);
    end
end
```

Figure 786 : codage de la fonction transvection(A, num_ligne_pivot)

Testons maintenant notre fonction en créant une matrice aléatoirement et en appliquant plusieurs fois la fonction transvection à la matrice M afin de la triangulariser.

```
>>  A= transvection(A,1)

A =
   5.0000  14.0000   16.0000   1.0000
      0      -24.2000  -32.8000   0.2000
      0       12.4000   12.6000  17.6000
      0      -16.4000  -29.6000   7.4000

>> A = transvection(A,2)

A =
   5.0000  14.0000   16.0000   1.0000
      0      -24.2000  -32.8000   0.2000
      0      0.0000     -4.2066  17.7025
      0       0          -7.3719   7.2645

>> A = transvection(A,3)
```

```
A =
   5.0000   14.0000    16.0000    1.0000
        0   -24.2000   -32.8000    0.2000
        0    -0.0000    -4.2066   17.7025
        0     0.0000          0  -23.7583
```

Notre fonction **transvection(A,num_ligne_pivot)** est maintenant validée.

4. Triangularisation

La fonction **triangularisation(A)** (Figure 787) va triangulariser la matrice augmentée.

Cette fonction prendra en arguments :
A: matrice augmentée correspondant au système à résoudre

La fonction aura comme sorties :
A : matrice A triangularisée

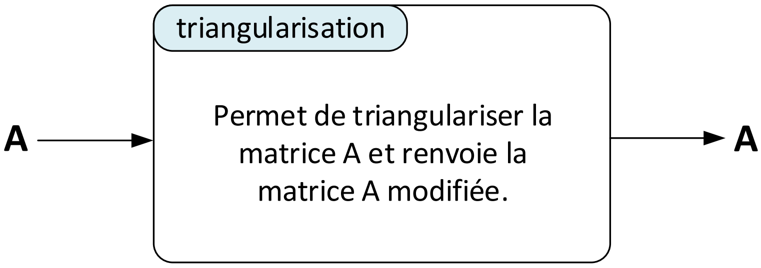


Figure 787 : fonction triangularisation(A)

La Figure 788 montre le codage de la fonction **triangularisation(A).m**.

```
%% A = triangularisation(A)
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Cette fonction est utilisée par le script Pivot_de_Gauss.m
% Cette fonction permet de triangulariser la matrice augmentée du système

function A = triangularisation(A)
% affectation du nombre de lignes et du nombre de colonne de la matrice
[nb_lignes, nb_colonnes] = size(A);

% la boucle parcourt les lignes, fait remonter la ligne de plus grand
% pivot en utilisant la fonction echange_lignes et réalise les opérations de
% transvection en utilisant la fonction transvection afin de triangulariser la
% matrice

for k = 1:1:(nb_lignes-1)
ligne_pivot = num_ligne_pivot(A,k);
    % remonté du plus grand pivot
    if ligne_pivot ~= k
        A = echange_lignes(A,ligne_pivot,k);
    end
    % opérations de transvections pour toutes les lignes sous la ligne du
    % pivot
    for p = k:1:nb_lignes-1
        A = transvection(A,p);
    end
```

```
end
end
```

Figure 788 : codage de la fonction triangularisation(A)

Afin de valider la fonction triangularisation nous allons construire une matrice augmenter de 5 lignes et 6 colonnes.

```
>> A = randi(5,5,6)

A =

   1    1    1    2    3    4
   2    3    2    2    4    5
   5    1    3    1    4    3
   1    5    1    2    1    1
   2    1    5    1    1    5

>> triangularisation(A)

ans =

   5.0000   1.0000   3.0000      1.0000   4.0000    3.0000
        0   2.6000   0.8000      1.6000   2.4000    3.8000
        0        0    0.1538     1.3077   1.4615    2.2308
        0        0         0     8.0000   6.0000    9.0000
        0        0         0          0   -12.620  -15.1875
```

Notre fonction **triangularisation(A)** est maintenant validée. La matrice est prête pour la phase de résolution.

5. Résolution

La fonction **resolution(M)** (Figure 789) va résoudre le système en déterminant la valeur des inconnues.

Cette fonction prendra en arguments :
M: matrice augmentée correspondant au système à résoudre

La fonction aura comme sorties :
X : vecteur contenant les solutions du système d'équation

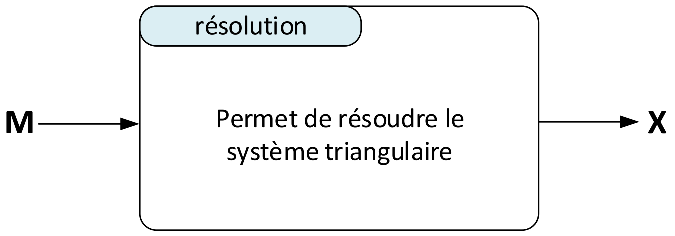


Figure 789 : fonction résolution.m

La matrice augmentée M comporte n lignes et p=n+1 colonnes et le vecteur X, solution du système $AX = B$ est de la forme $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

A ce stade, la matrice M a été triangularisée et sa forme avant la phase de résolution est la suivante :

$$M = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(1,1) & M(1,2) & \cdots & M(1,n) & M(1,n+1) \\ 0 & M(2,2) & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & M(n-1,n+1) \\ 0 & 0 & 0 & M(n,n) & M(n,n+1) \end{bmatrix}$$

Nous commençons par résoudre l'équation du bas correspondant à la ligne n :

$$x_n = \frac{M(k,n+1)}{M(n,n)}$$

Ensuite, nous passons à la ligne $(n-1)$, en utilisant la valeur de x_n trouvée précédemment :

$$x_{n-1} = \frac{1}{M(n-1,n-1)}\left[M(n-1,n+1) - M(k,n).X(n)\right]$$

Cette relation peut être généralisée au rang k et les autres solutions x_k sont données par la relation suivante qui sera implémentée dans l'algorithme :

$$\boxed{x_k = \frac{1}{M(k,k)}\left[M(k,n+1) - \sum_{i=k+1}^{n} M(k,i).X(i)\right]}$$

La Figure 790 montre le codage de la fonction **resolution(M).**

```
%% M = résolution(M)
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Cette fonction est utilisée par le script Pivot_de_Gauss.m
% Résolution d'un système triangulaire

function X = resolution(M)
[nb_lignes, nb_colonnes] = size(M);
X = zeros(nb_lignes,1);
% on parcourt les lignes en partant du bas et en remontant
for k = nb_lignes:-1:1
    somme = 0;
    % calcul de la somme en injectant les valeurs des inconnues déjà
    % déterminées
    for i = k+1:1:nb_lignes
        somme = somme + M(k,i) * X(i);
```

```
    end
    % calcul de la solution X(k)
    X(k) = (1/M(k,k))*(M(k,nb_lignes + 1) - somme);
end
end
```

Figure 790 : codage de la fonction resolution(M)

Afin de tester notre fonction **resolution(M)**, nous allons saisir la matrice triangulaire augmentée qui correspond au système donné en exemple en début de paragraphe. Ensuite nous allons la triangulariser puis la résoudre à l'aide des fonctions que nous avons définies.

```
>> M = [ 1 4 1 4 ; 2 2 1 1 ; 1 4 2 2]

M =
   1   4   1   4
   2   2   1   1
   1   4   2   2

>> X = resolution(triangularisation(M))

X =

     0
  1.5000
 -2.0000
```

Nous pouvons vérifier que l'algorithme nous donne bien la solution de notre système.

6. Pivot de Gauss

La fonction **Pivot_de_Gauss(A,B)** (Figure 791) prendra en argument les matrice A et B telles que la système à résoudre soit de la forme AX=B.

Cette fonction prendra en arguments :
A: matrice A telle que le système à résoudre soit de la forme AX=B
B: matrice B telle que le système à résoudre soit de la forme AX=B

La fonction aura comme sorties :
X : vecteur contenant les solutions du système d'équation AX=B

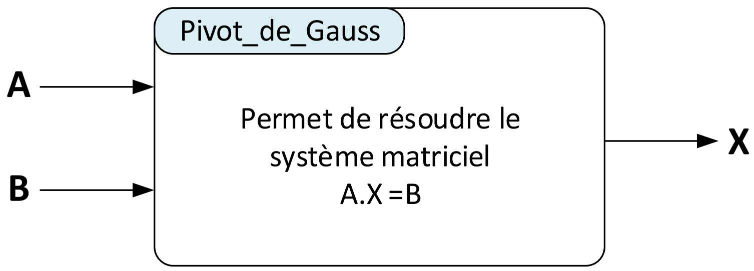


Figure 791 : fonction Pivot_de_Gauss(A,B)

La Figure 792 montre la hiérarchisation des fonctions qui sont utilisées dans l'algorithme du pivot de Gauss.

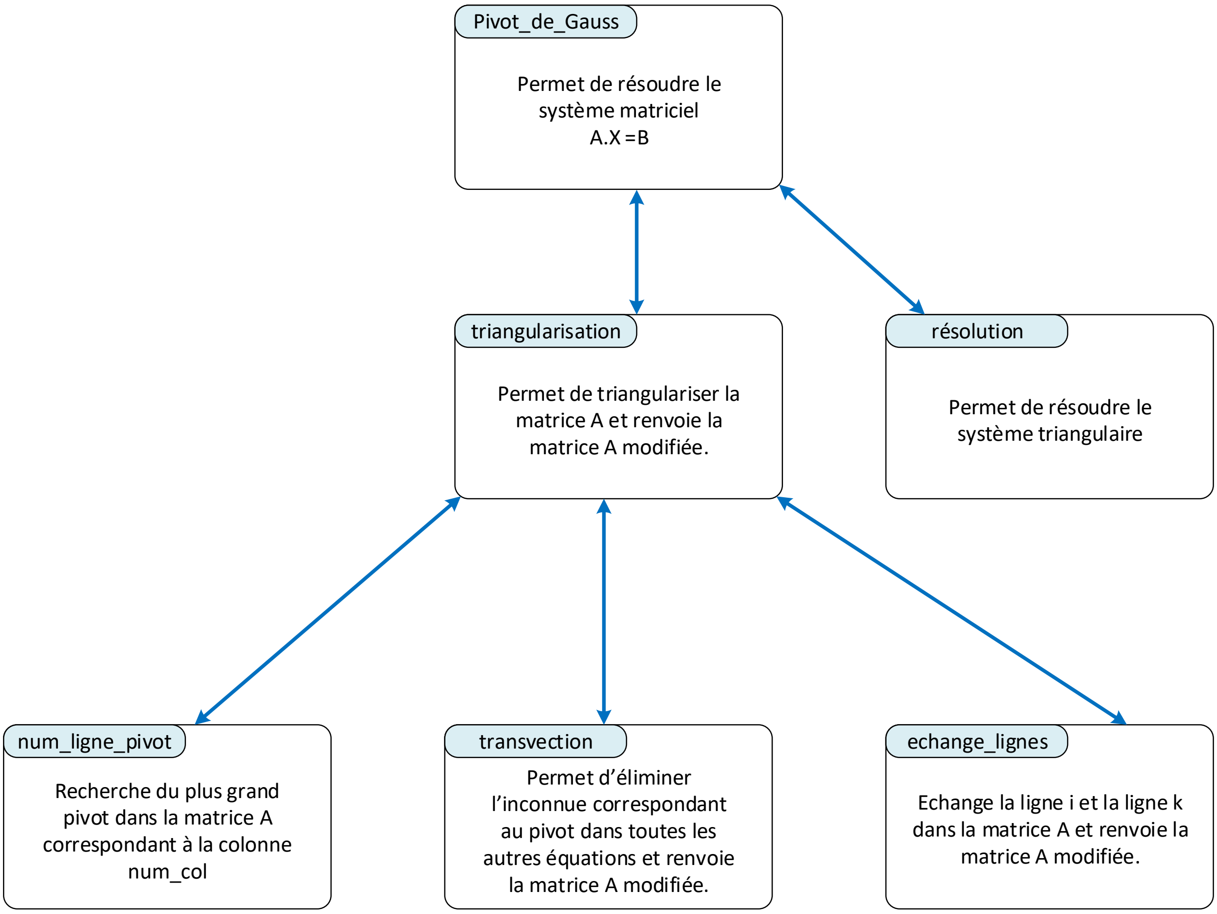


Figure 792 : hiérarchisation des fonctions utilisées dans l'algorithme du pivot de Gauss

La Figure 793 montre le codage de la fonction **Pivot_de_Gauss(A,B)**.

```
%% X = Pivot_de_Gauss(A,B)
% Ivan LIEBGOTT @ Novembre 2019
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
% Algorithme de résolution d'un système d'équation linéaire en utilisant la
% méthode du pivot de Gauss
% le système est de la forme [A][X] = [B]
% On forme la matrice augmentée

function X = Pivot_de_Gauss(A,B)
% concaténation de A et de B pour former la matrice augmentée M
M = [A B];

% triangularisation de M
M = triangularisation (M);

% résolution de M
X = resolution(M)
end
```

Figure 793 : codage de la fonction Pivot_de_Gauss(A,B)

Afin de tester notre fonction Pivot_de_Gauss.m(A,B), nous allons créer les deux matrice A et B correspondant à notre système et utiliser notre fonction.

```
>> A = [1 4 1; 2 2 1; 1 4 2]
```

```
A =
    1     4     1
    2     2     1
    1     4     2

>> B = [4;1;2]
B =

    4
    1
    2

>> Pivot_de_Gauss(A,B)

X =

        0
   1.5000
  -2.0000
```

Nous pouvons vérifier que la fonction nous donne bien la solution du système d'équations.

D. Robustesse

Afin d'évaluer la robustesse de notre algorithme, nous allons comparer les résultats trouvés avec un calcul réalisé par MATLAB. En langage MATLAB en tapant A\B dans la fenêtre de commande, MATLAB donne la solution X du système d'équation.

```
>> A\B

ans =

        0
   1.5000
  -2.0000
```

Nous allons tester notre fonction sur un système de 10 équations à 10 inconnues

```
>> A = randi(100,10,10);
>> B = randi(100,10,1);
>> A\B

ans =

   0.4849
  -0.6699
   0.3289
   0.6217
  -0.3165
```

```
   0.1280
   0.1572
   1.5665
  -0.8841
  -0.6414

>> Pivot_de_Gauss(A,B)

X =

   0.4849
  -0.6699
   0.3289
   0.6217
  -0.3165
   0.1280
   0.1572
   1.5665
  -0.8841
  -0.6414
```

Nous pouvons constater que les solutions données par MATLAB sont identiques aux solutions déterminées à l'aide de notre algorithme.

Chapitre 12 : MATLAB/Simulink online

I. Présentation

MATLAB/Simulink est également utilisable en version online. Il n'est donc pas forcément nécessaire d'installer MATLAB/Simulink sur son ordinateur personnel pour utiliser les fonctionnalités du logiciel. Une simple connexion à MATLAB/Simulink online à l'aide d'un login et d'un mot de passe permettra de développer des modèles ou du code. La capacité de calcul est déportée vers des serveurs et l'ordinateur joue alors le rôle d'un simple afficheur. Cette solution sera particulièrement intéressante pour les utilisateurs qui ne dispose pas d'un ordinateur performant ou pour ceux qui ne souhaite pas utiliser de l'espace sur leur disque dur avec les fichiers d'installation. Cette solution permet également d'utiliser MATLAB/Simulink dans les laboratoires d'enseignement sans procéder à l'installation et en travaillant toujours sur la dernière version du logiciel avec les étudiants. Ces derniers pourront sans difficultés travailler sur leurs fichiers à la maison en se connectant à MATLAB/Simulink online. L'utilisation de MATLAB/Simulink online est étroitement liée à l'exploitation du cloud dédié de 5Go, appelé **MATLAB Drive** et associé à chaque compte Mathworks. Il sera ainsi très simple d'accéder aux fichiers depuis n'importe quel ordinateur (Figure 794). L'outil **MATLAB Drive Connector** permettra de lier le dossier de **MATLAB Drive** au gestionnaire de fichier de Windows afin de faciliter l'exploitation de ces fichiers. Les fichiers sont alors stockés sur le disque dur de l'ordinateur et sont synchronisés avec le cloud.

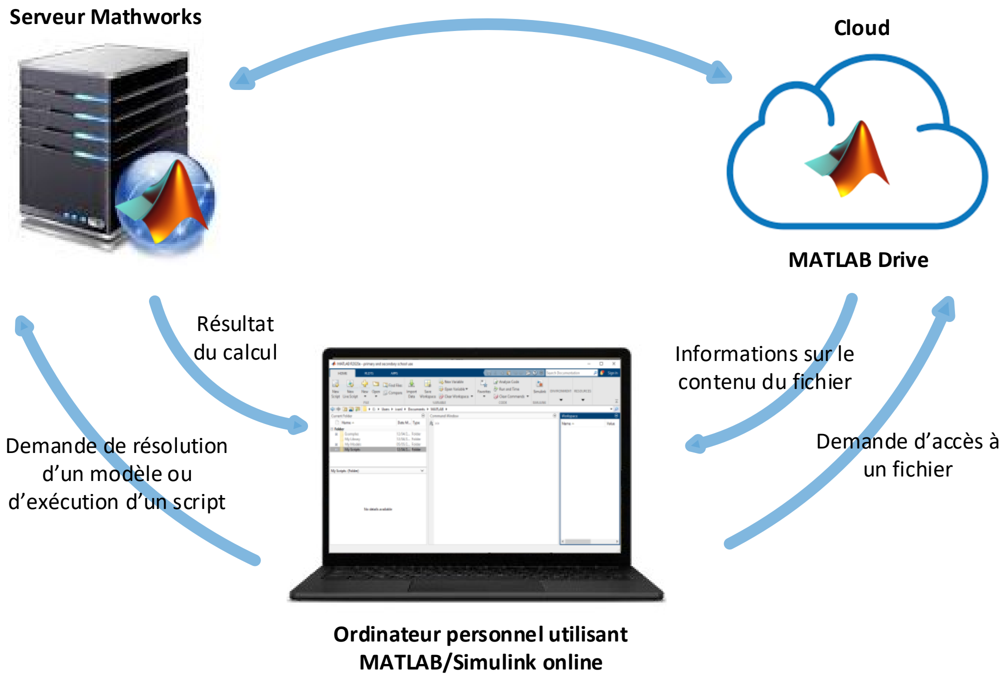


Figure 794 : MATLAB/Simulink online et MATLAB Drive

II. Installation de l'environnement de travail à distance

Afin d'utiliser MATLAB/Simulink online, procéder à l'installation de **MATLAB Drive**, puis de **MATLAB Drive Connector** à partir de liens suivants :

Lien pour installer **MATLAB Drive** :
https://www.mathworks.com/products/matlab-drive.html

Lien pour installer **MATLAB Drive Connector :**
https://www.mathworks.com/products/matlab-drive.html#matlab-drive-connector

Une fois l'installation réalisée, vous pouvez voir apparaître votre dossier MATLAB Drive dans la version de MATLAB installée sur votre ordinateur (Figure 795)

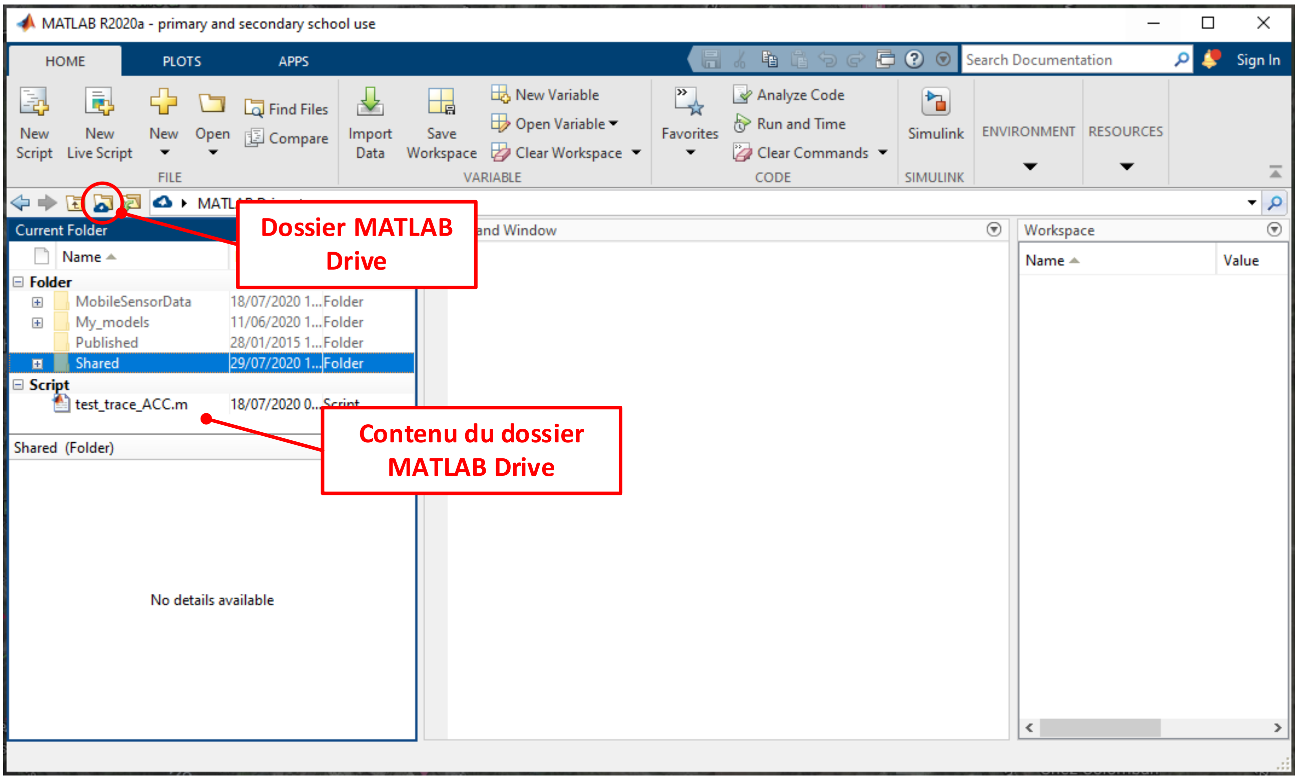


Figure 795 : Dossier MATLAB Drive dans la version installée de MATLAB/Simulink

Vous pouvez également visualiser l'interface de MATLAB Drive Connector dans la barre de tâche de Windows (en bas à droite de votre écran) (Figure 796).

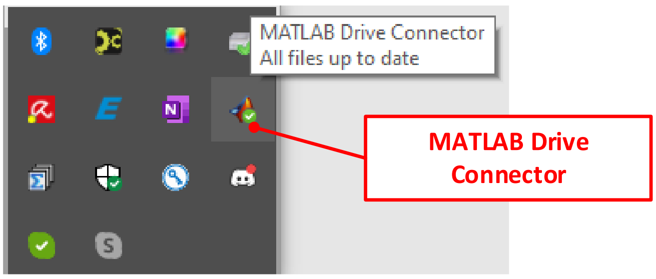


Figure 796 : visualisation de MATLAB Drive Connector dans la barre de tâche de Window

Cliquer sur l'icône de **MATLAB Drive Connector** afin d'ouvrir l'interface (Figure 797).

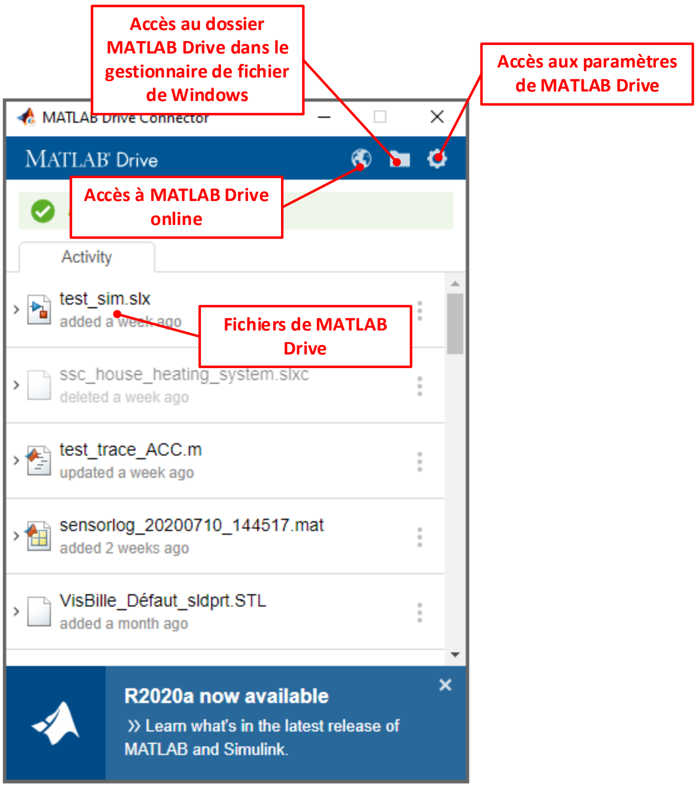


Figure 797 : interface de MATLAB Drive Connector

Il est possible à partir de cette interface :

- D'accéder à MATLAB Drive online
- D'accéder au dossier MATLAB Drive à partir du gestionnaire de fichiers de Windows
- D'accéder aux paramètres de MATLAB Drive pour indiquer la localisation du dossier MATLAB Drive sur le disque dur de l'ordinateur.

Nous verrons plus tard dans ce chapitre comment exploiter cette plateforme de travail.

III. Utilisation de MATLAB/Simulink online

Pour utiliser MATLAB online, il suffit de cliquer sur le lien suivant et de renseigner le login et le mot de passe de son compte Mathworks.

Lien vers **MATLAB online** :
https://www.mathworks.com/products/matlab-online.html

Une fois les informations d'authentification saisies, la fenêtre de travail de MATLAB/Simulink online apparaît (Figure 798).

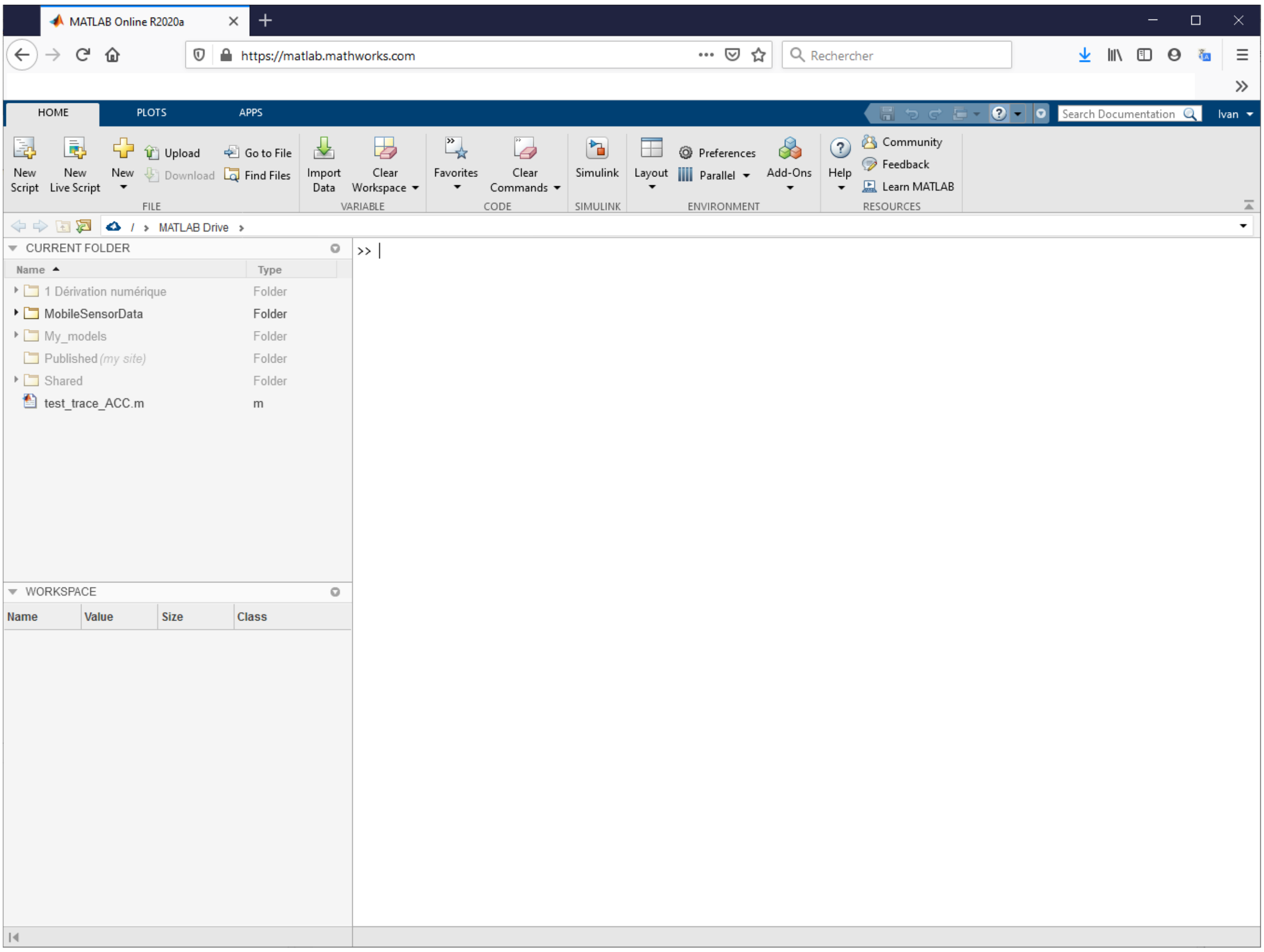
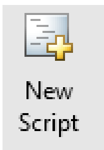


Figure 798 : fenêtre de MATLAB online

Il est maintenant possible de travailler dans l'environnement online, les fonctionnalités et les menus sont strictement identiques à la version MATLAB installée sur le PC.

A. Création d'un script élémentaire avec MATLAB online

Ouvrir un nouveau script en cliquant sur 

et saisir les lignes de code suivantes :

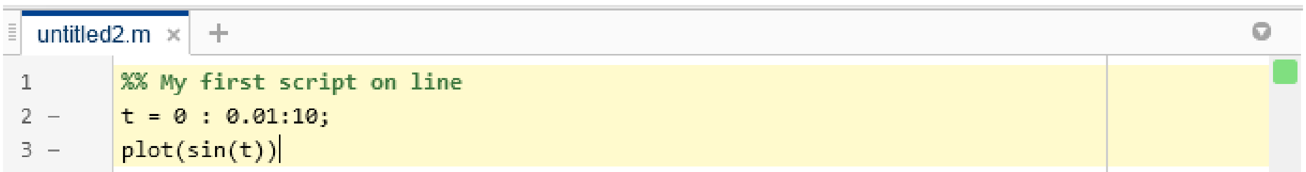


Figure 799 : script à saisir online

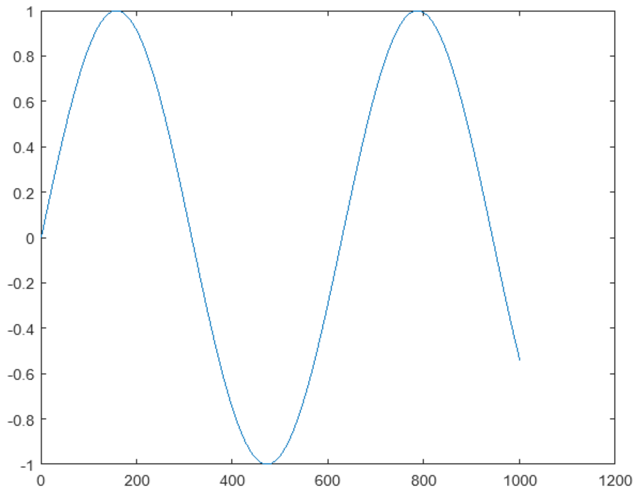
Sauvegarder le script en cliquant sur 

.

Le fichier est alors automatiquement sauvegardé dans le dossier courant de MATLAB Drive et sera accessible dans le cloud.

Cliquer sur 

pour exécuter le script et visualiser le résultat



B. Création d’un modèle élémentaire avec Simulink online

Cliquer maintenant sur 

pour lancer Simulink online. La Simulink Start Page s’ouvre alors et vous pouvez créer un Blank Model (Figure 800).

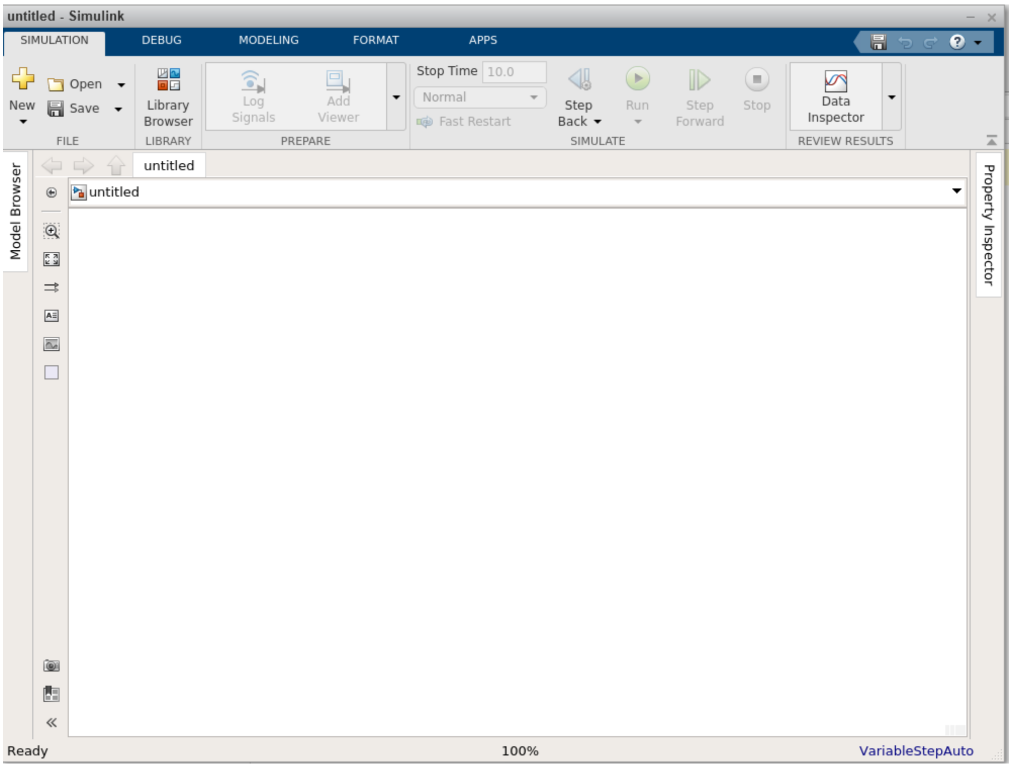
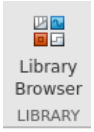


Figure 800 : création d'un Blank Model dans Simulink online

Cliquer alors sur 

pour ouvrir la librairie Simulink.

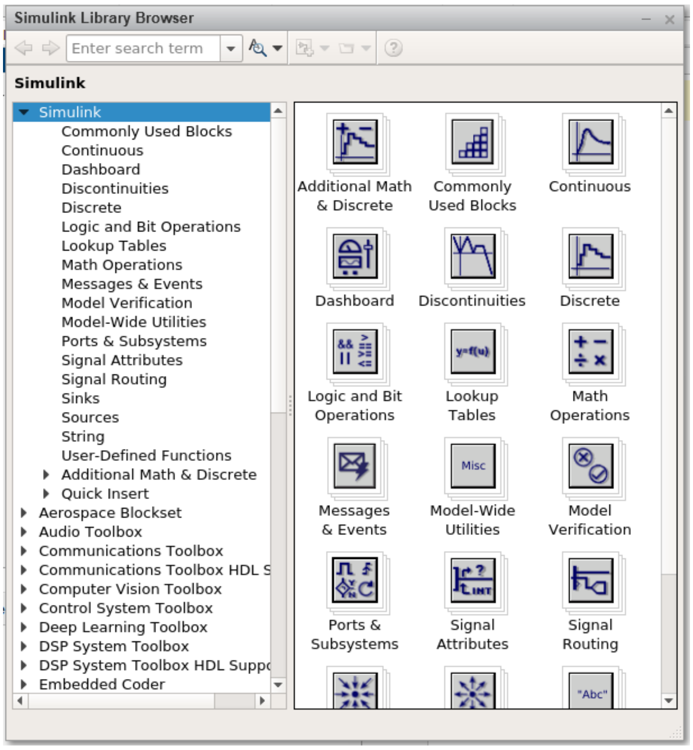


Figure 801 : librairie de Simulink online

Vous pouvez maintenant créer vos modèles en faisant glisser les blocs dans la fenêtre du modèle.
Créer un modèle simple et exécuter le.

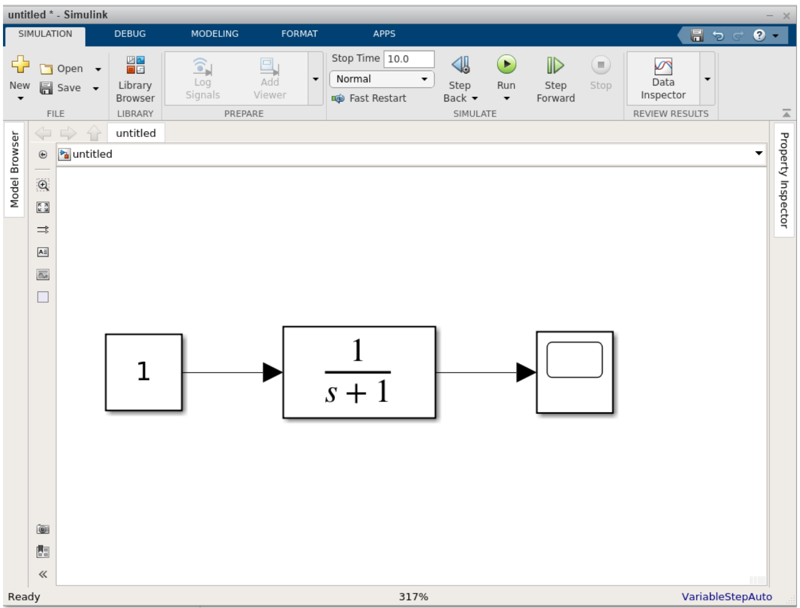


Figure 802 : modèle créer à l'aide de Simulink online

Ouvrir le scope pour visualiser le résultat (Figure 803).

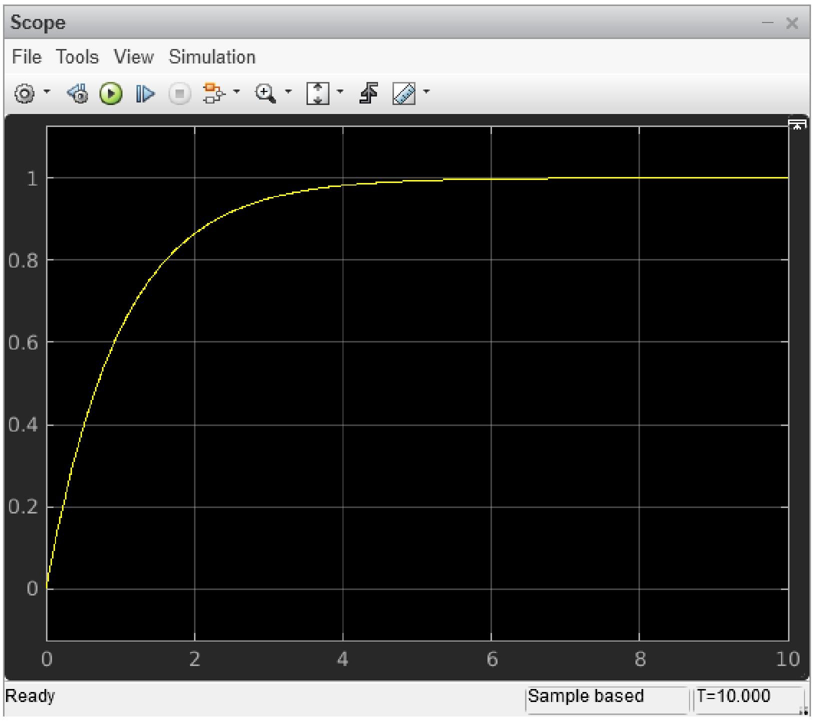


Figure 803 : résultat de la simulation

Sauvegarder le fichier en cliquant sur 

.

Le fichier est alors automatiquement sauvegardé dans le dossier courant de MATLAB Drive et sera accessible dans le cloud.

C. Exploitation d'un modèle multi-physique avec MATLAB/Simulink on line

Nous allons maintenant exécuter un modèle multi-physique complexe en utilisant MATLAB/Simulink online. Pour cela copier tout le contenu du dossier **Chapitre_3_Strategie_de_conception_d_un_modele_multi_physique / Maxpid** dans le dossier **MATLAB drive/My_Models**.

Une fois le dossier copié, placer le dossier dans le Path de **MATLAB online** en cliquant avec le bouton droit de la souris sur le dossier **Maxpid** et en sélectionnant **Add to Path/ Selected Folders and Subfolders** (Figure 804).

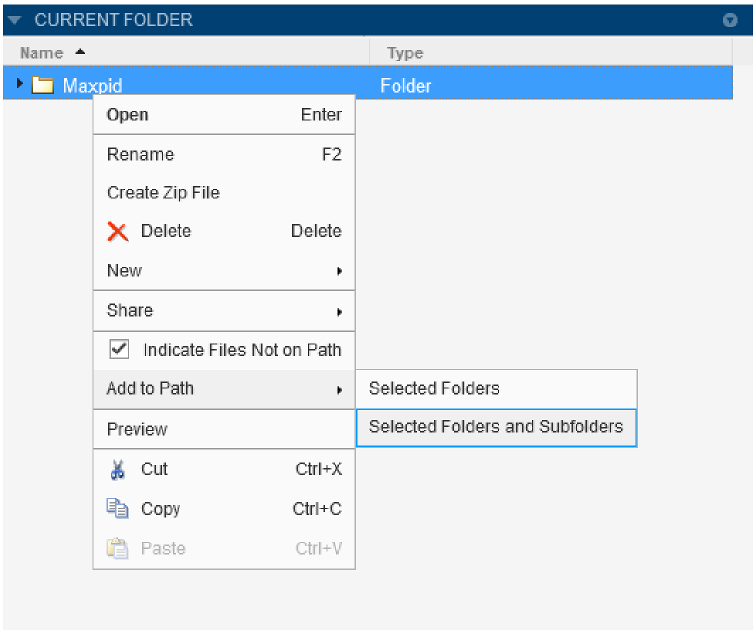


Figure 804 : ajout du dossier Maxpid dans le Path de MATLAB online

Ouvrir le dossier Maxpid et ouvrir le modèle **MAXPID.slx**.

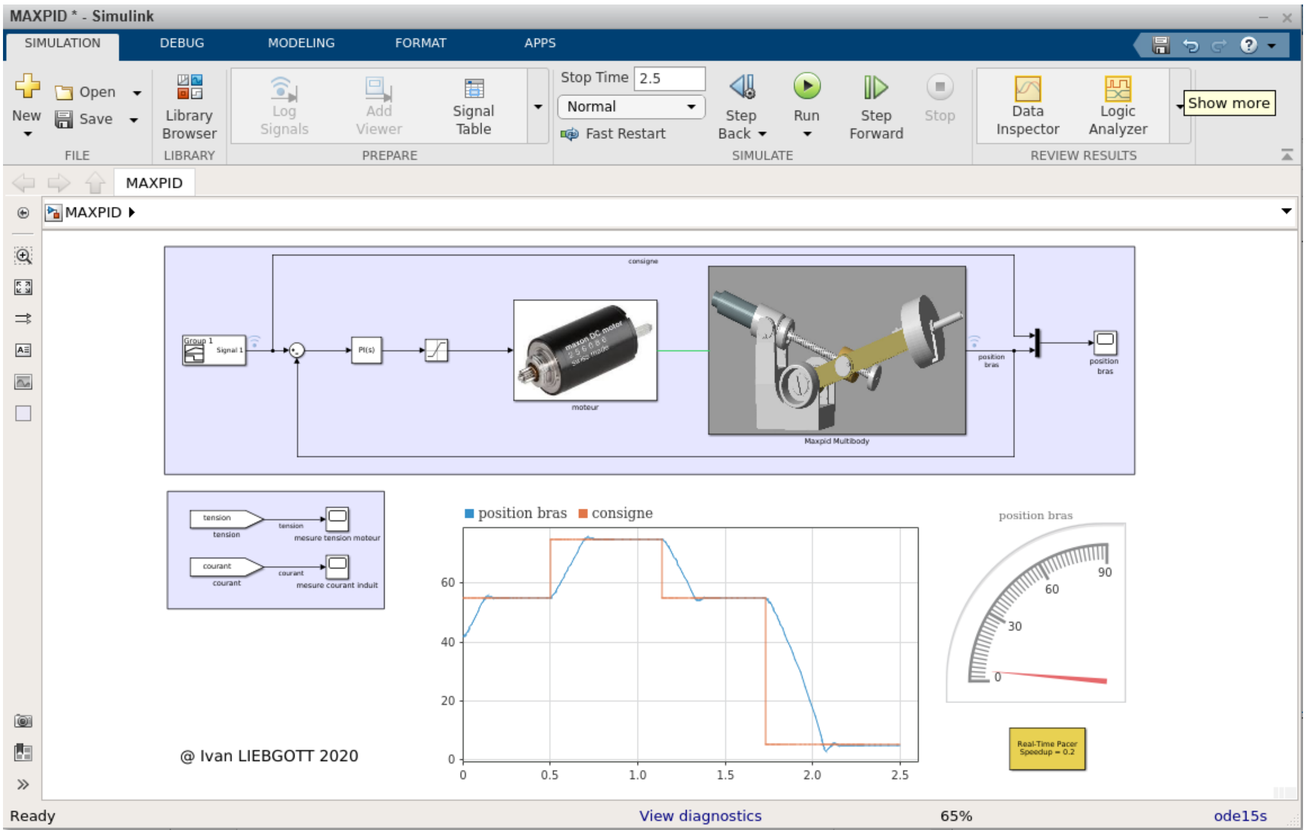
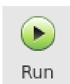


Figure 805 : modèle du robot Maxpid ouvert dans MATLAB/Simulink online

Lancer la simulation du modèle en cliquant sur 

et observer les résultats obtenus dans le dashboard scope et dans le scope.

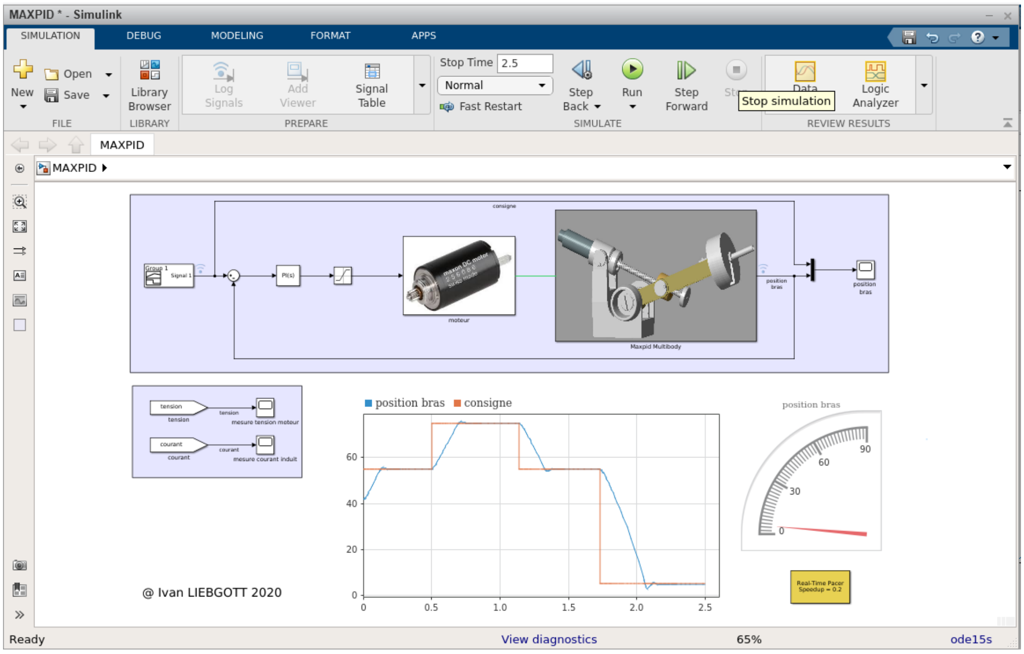


Figure 806 : résultats de la simulation

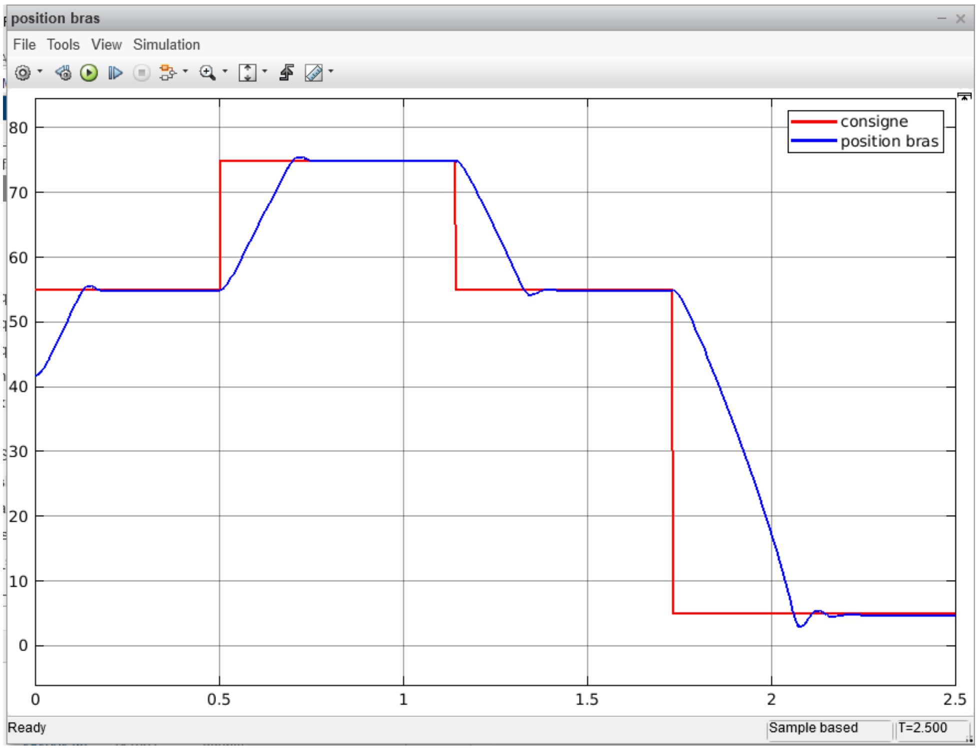


Figure 807 : visualisation des résultats dans le scope

Nous pouvons constater que la simulation se déroule tout à fait normalement à l'exception de la fenêtre Mechanics Explorer qui n'est pas encore disponible sur la version online. Il n'est donc pas possible de visualiser l'animation de la maquette 3D. Cette fonctionnalité sera disponible sur les versions ultérieures.

D. Partager des dossiers contenant ses modèles avec d'autres utilisateurs

Il est très simple à partir du dossier MATLAB Drive de partager ses fichiers ou ses dossiers avec d'autres utilisateurs qui possèdent également un compte Mathworks et un Drive MATLAB. Cette fonctionnalité est très pratique pour mettre à dispositions des étudiants le dossier qui contient les fichiers de travail.
Il existe plusieurs méthodes pour partager un dossier de MATLAB Drive.

- En utilisant la version de MATLAB installée sur son ordinateur
- En utilisant MATLAB/Simulink online
- En utilisant MATLAB Drive online

Il est possible de créer un lien qui pointera vers le dossier que l'on souhaite mettre à disposition

1. Partage d'un dossier à l'aide de la version de MATLAB installée sur son ordinateur

Sélectionner **MATLAB Drive** pour qu'il apparaisse dans la fenêtre **Current Folder.**
Cliquer avec le bouton droit de la souris sur le dossier que vous souhaitez partager et sélectionner **Share/Manage Members** (Figure 808).

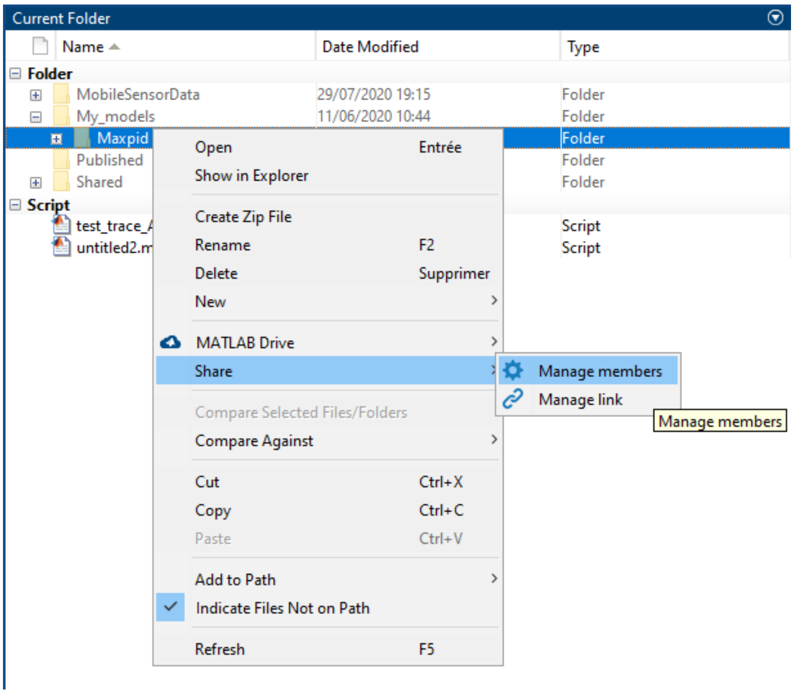


Figure 808 : partage d'un dossier du Drive de MATLAB

La fenêtre MATLAB Drive Sharing s'ouvre et vous permet d'inviter des membres à accéder à votre dossier. Il suffit d'indiquer l'adresse mail de leur compte Mathworks et de préciser si le membre aura un accès en simple consultation (**Can View**) ou s'il aura la possibilité de modifier les fichiers (**Can Edit**) (Figure 809).

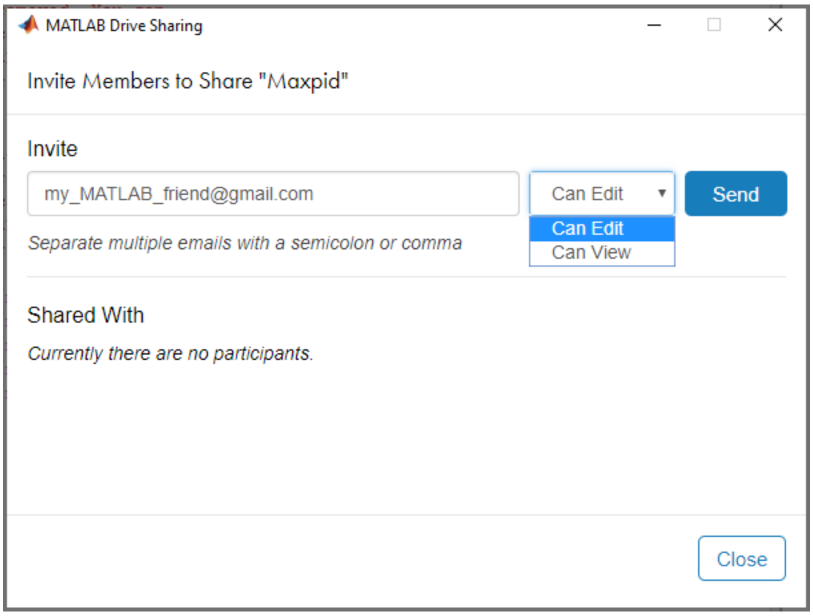


Figure 809 : définition des membres et des droits d'accès au dossier

Un fois l'invitation envoyée, l'utilisateur recevra un mail lui indiquant que vous voulez partager un dossier avec lui et pourra ensuite accéder aux fichiers contenus dans le dossier partagé.
En cliquant ensuite sur **Back**, vous revenez dans la fenêtre initiale et vous pouvez alors modifier à tout moment les droits et les membres qui peuvent accéder à votre dossier (Figure 810).

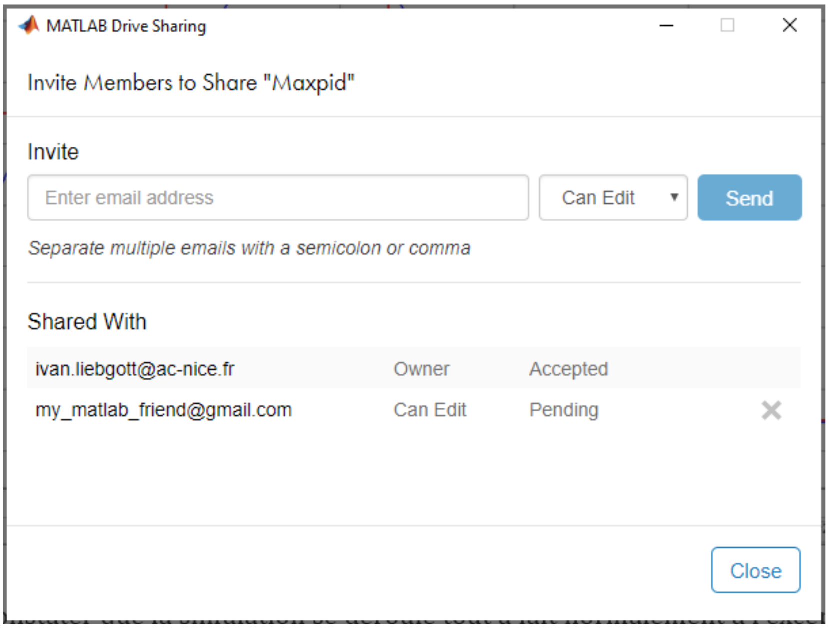


Figure 810 : gestion des droits d'accès et des membres

Il est également possible de créer un simple lien de téléchargement qui pointera sur le dossier partagé que vous pouvez alors diffuser (Figure 811).

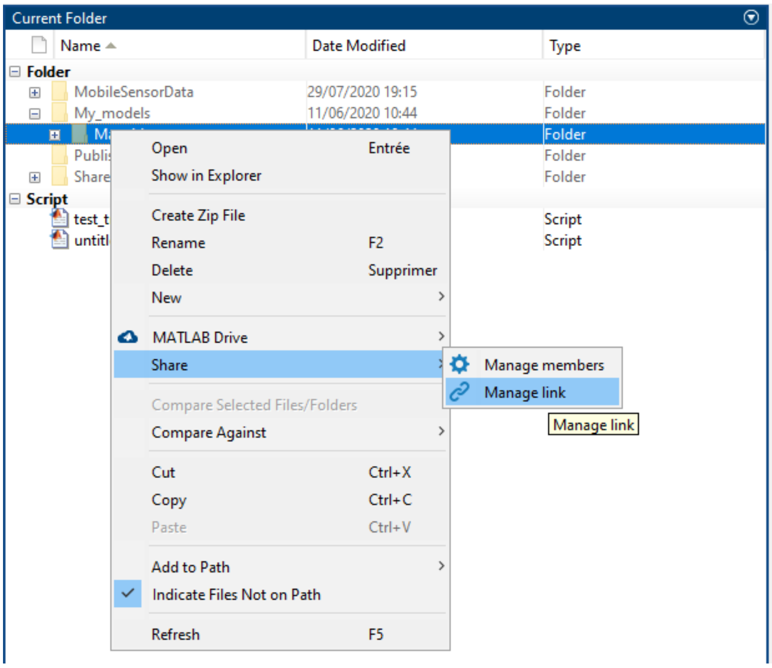


Figure 811 : création d'un lien pour partager un dossier de MATLAB Drive

2. Partage d'un dossier en utilisant MATLAB online

A partir de la fenêtre **CURRENT FOLDER** de **MATLAB Drive**, cliquer avec le bouton droit de la souris sur le dossier que vous voulez partager et sélectionner **Share/Invite Members** ou **Share/Create Link** (Figure 812). Le reste de la procédure est identique au partage en utilisant la version installée de MATLAB.

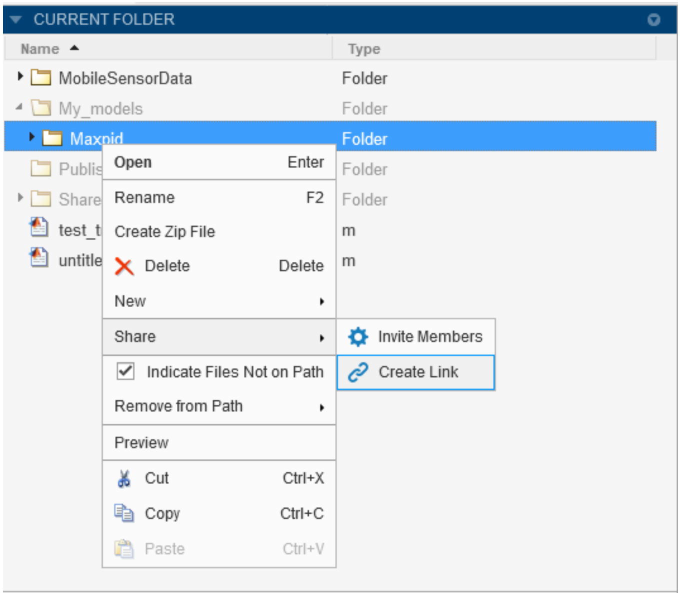


Figure 812 : partage d'un dossier en utilisant MATLAB on line

3. Partage d'un dossier en utilisant MATLAB Drive online

Ouvrir l'interface de **MATLAB Drive Connector** dans la barre de tâche de Windows (en bas à droite de votre écran) (Figure 813).

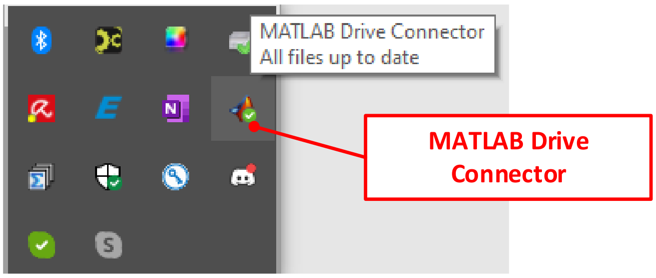


Figure 813 : ouverture de l'interface MATLAB Drive Connector

A partir de la fenêtre de l'interface de **MATLAB Drive Connector**, cliquer sur l'icône  pour lancer **MATLAB Drive online** (Figure 814)

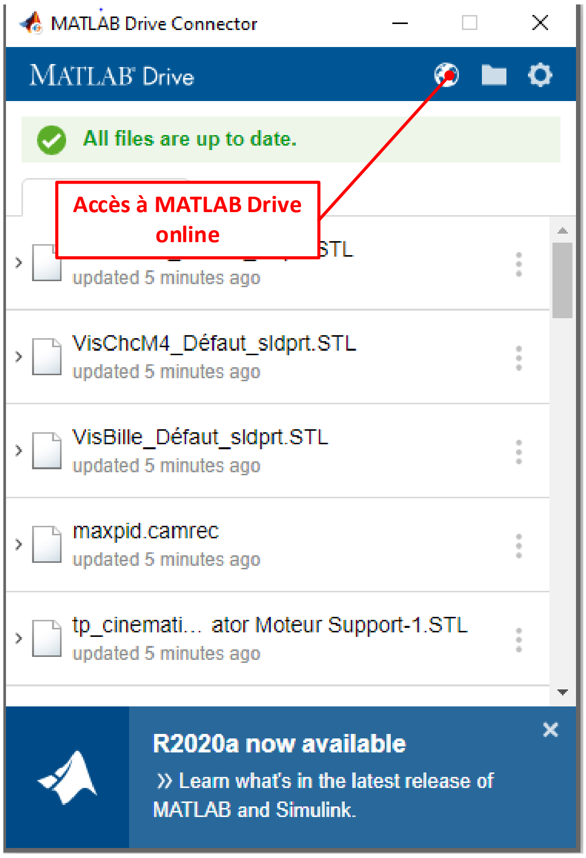


Figure 814 : lancement de MATLAB Drive online

MATLAB Drive online permet d'afficher l'ensemble des dossiers de **MATLAB Drive**.
Cliquer avec le bouton droit de la souris sur le dossier que vous voulez partager et sélectionner **Share/Invite Members** ou **Share/Create Link**. Le reste de la procédure est identique au partage en utilisant la version installée de MATLAB.

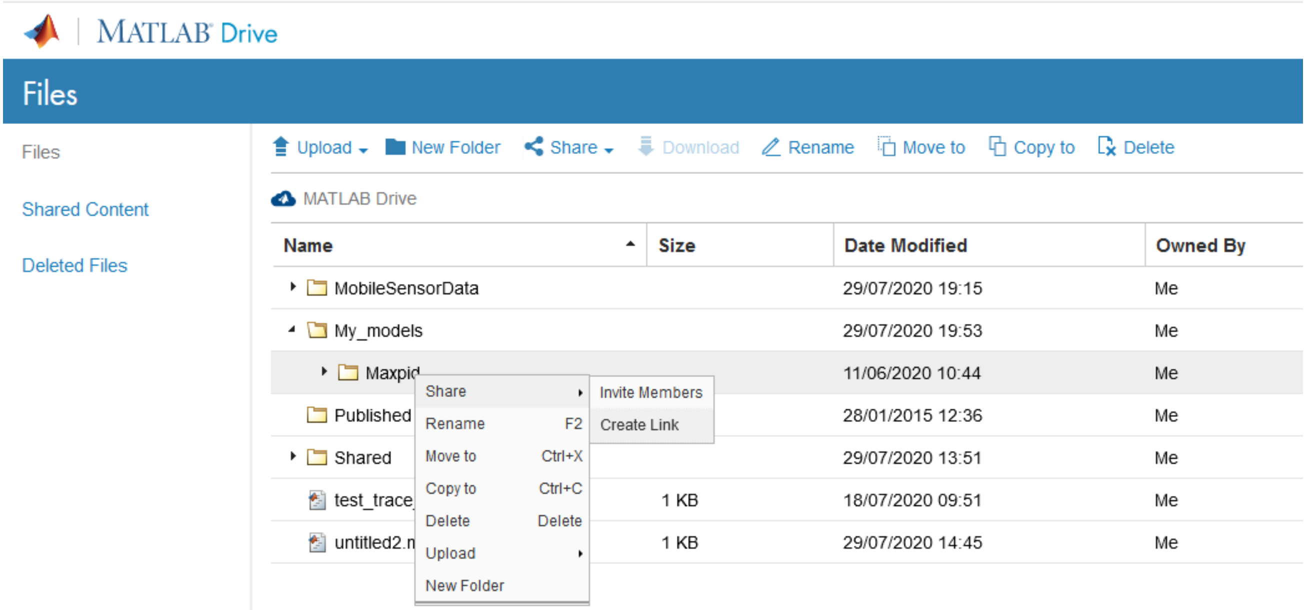


Figure 815 : partage d'un dossier à partir de MATLAB Drive online

Chapitre 13 : MATLAB Mobile

I. Présentation

MATLAB peut également être utilisé à partir d'un smartphone en téléchargeant l'application **MATLAB Mobile**. Cette application permet :

- de profiter de toutes les fonctionnalités de MATLAB pour le calcul scientifique (création de variables, opérations sur les variables, tracés de courbes, calcul symbolique, résolution d'équation différentielles…)
- de monitorer les mesures issues des capteurs du téléphone (accéléromètre, capteur de champ magnétique, capteur d'orientation, gyroscope, capteur de position terrestre…). Le téléphone peut être utilisé comme capteur pour de nombreuses expériences scientifiques
- d'exécuter des scripts et de visualiser les résultats

Comme pour **MATLAB online**, la capacité de calcul est déportée vers des serveurs et le smartphone joue le rôle d'un simple afficheur, il n'est donc pas nécessaire de disposer d'un smartphone performant pour pouvoir utiliser l'application mobile. Pour pouvoir utiliser l'application mobile, il suffit de disposer d'un compte Mathworks, aucune licence n'est requise et l'application mobile est libre d'utilisation. **MATLAB Mobile** permet d'accéder au contenu de **MATLAB Drive** dans lequel l'utilisateur peut stocker des fichiers créés à partir de **MATLAB online** ou de la version de MATLAB installée sur un ordinateur. L'interaction entre **MATLAB Mobile, MATLAB online** et **MATLAB Drive** permet à l'utilisateur de disposer en permanence de l'ensemble de ses fichiers de travail depuis toutes les plates formes (Figure 816).

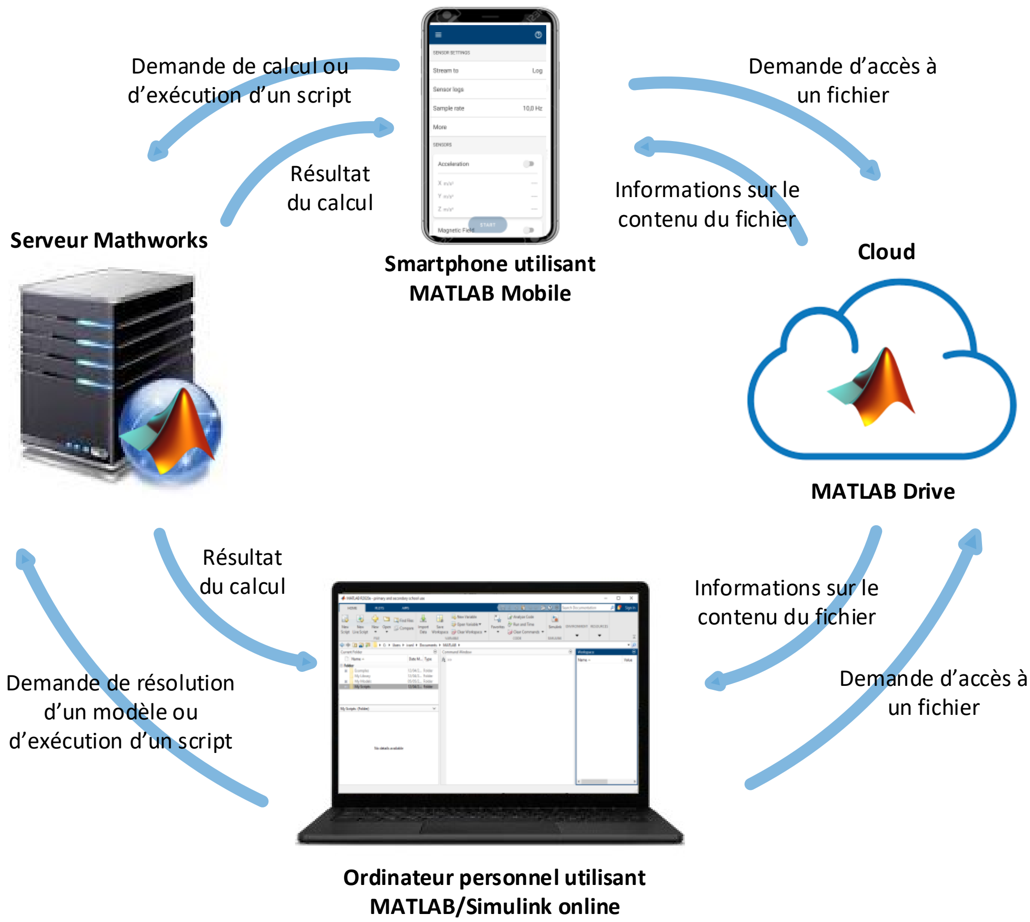


Figure 816 : MATLAB Mobile

II. Les fonctionnalités de MATLAB Mobile

1. Taper des lignes de commandes

Au lancement de l'application, la fenêtre de la Figure 817 apparaît. Il est alors possible de saisir des commandes dans la fenêtre de commande et de visualiser les résultats obtenus.

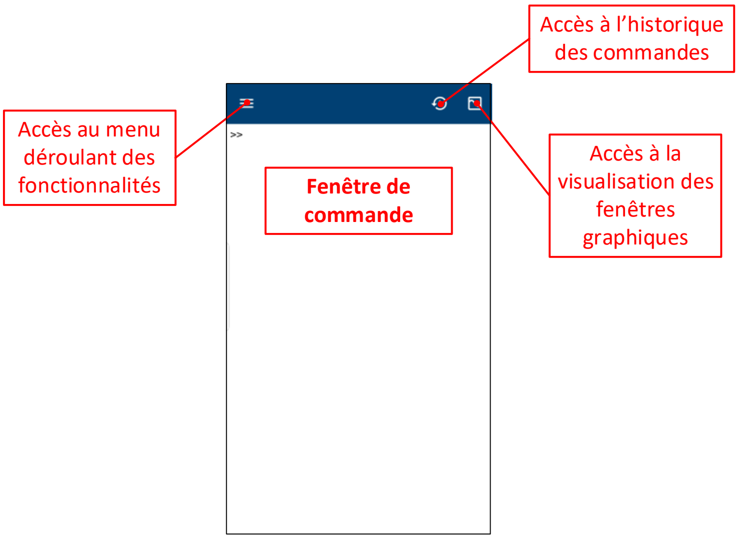


Figure 817 : ouverture de MATLAB Mobile

Taper les lignes de commandes de la Figure 818 dans l'application et observer le résultat obtenu.

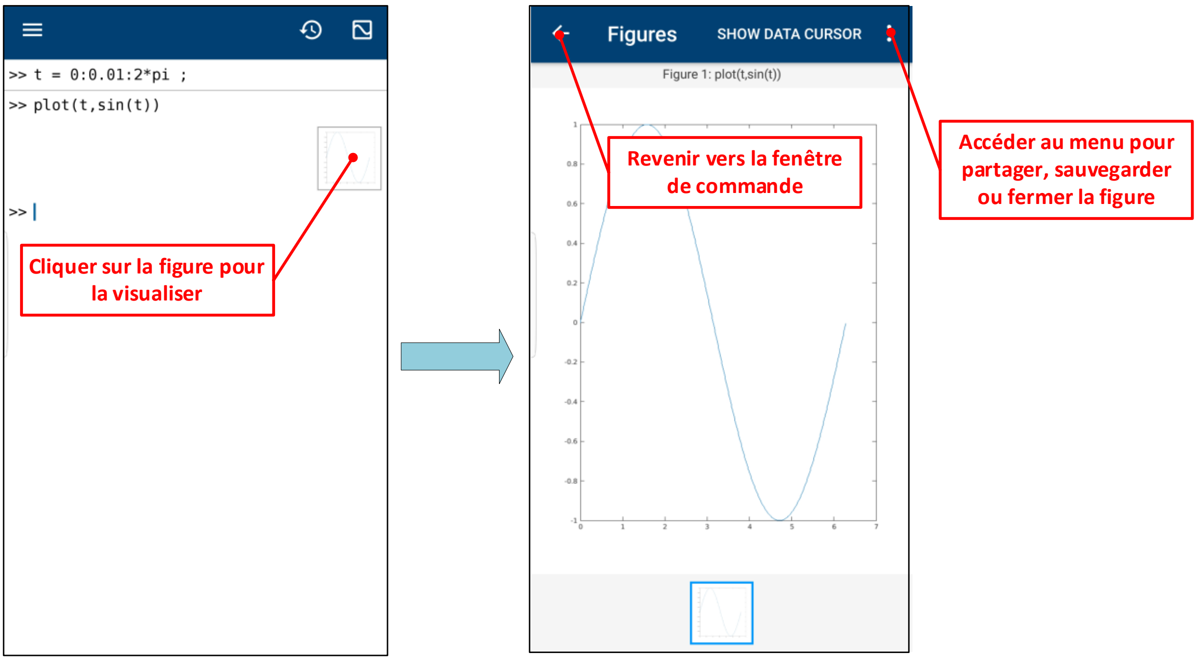


Figure 818 : utilisation des lignes de commandes dans MATLAB Mobile

2. Configurer le clavier MATLAB Keyboard

Afin de saisir plus facilement les lignes de commandes, il est possible d'utiliser un clavier spécialement dédié à l'utilisation de MATLAB. Pour cela suivre la procédure indiquée sur la Figure 819.

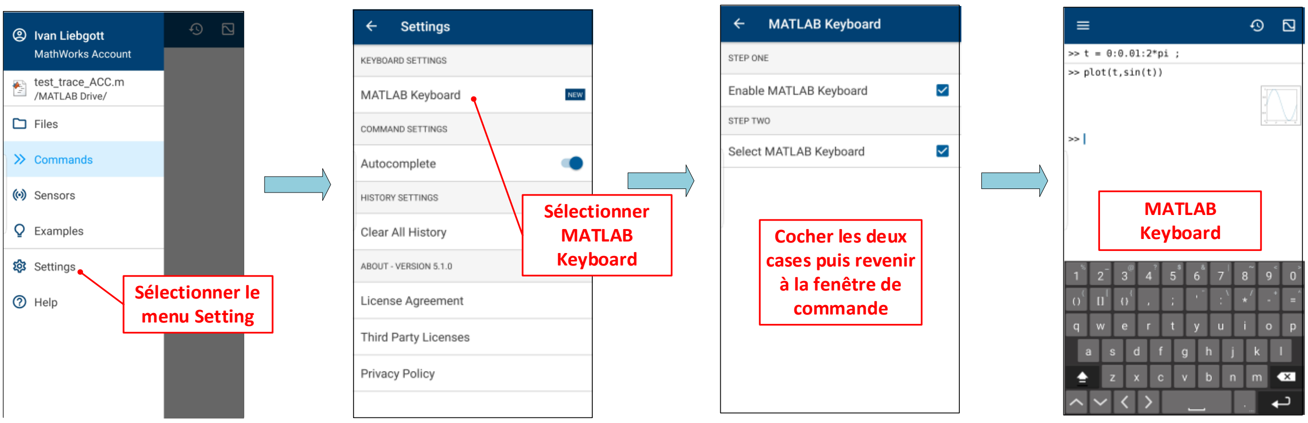


Figure 819 : configuration MATLAB Keyboard

Le clavier qui apparaît maintenant est parfaitement adapté à la saisie des lignes de commandes, il est conseillé de l'utiliser afin de gagner du temps dans le processus de saisie.

3. Accès à MATLAB Drive

Afin d'accéder à MATLAB Drive depuis MATLAB Mobile, suivez la procédure indiquée sur la Figure 820.

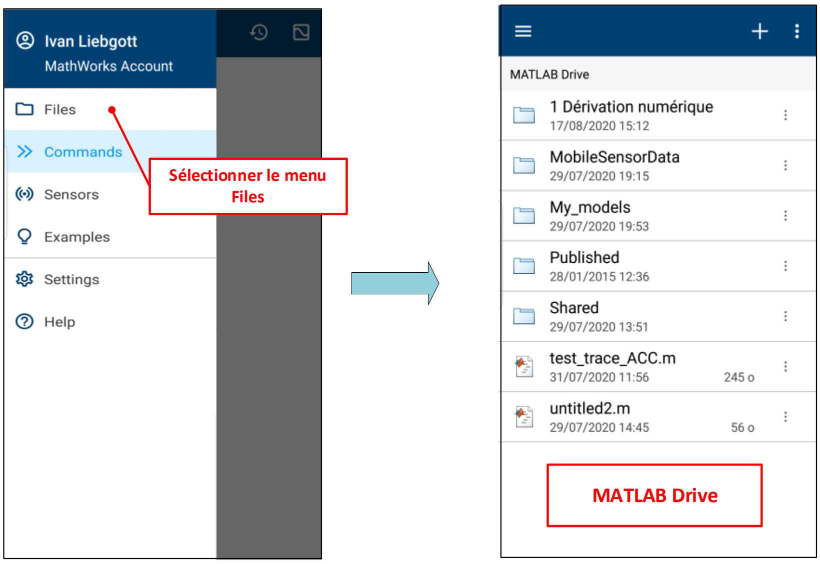


Figure 820 : accès à MATLAB Drive depuis MATLAB Mobile

Il est alors possible de naviguer dans les dossiers et d'accéder à tous les fichiers de MATLAB Drive.

4. Exécuter un script depuis MATLAB Mobile

Le dossier « 1 Dérivation Numérique » du chapitre « Ingénierie Numérique avec MATLAB » a été placé dans MATLAB Drive, il est donc visible depuis l'application mobile. Naviguer dans les dossiers pour ouvrir le script **num_deriv_plot_error.m** puis exécuter le script et visualiser les résultats conformément à la Figure 821.

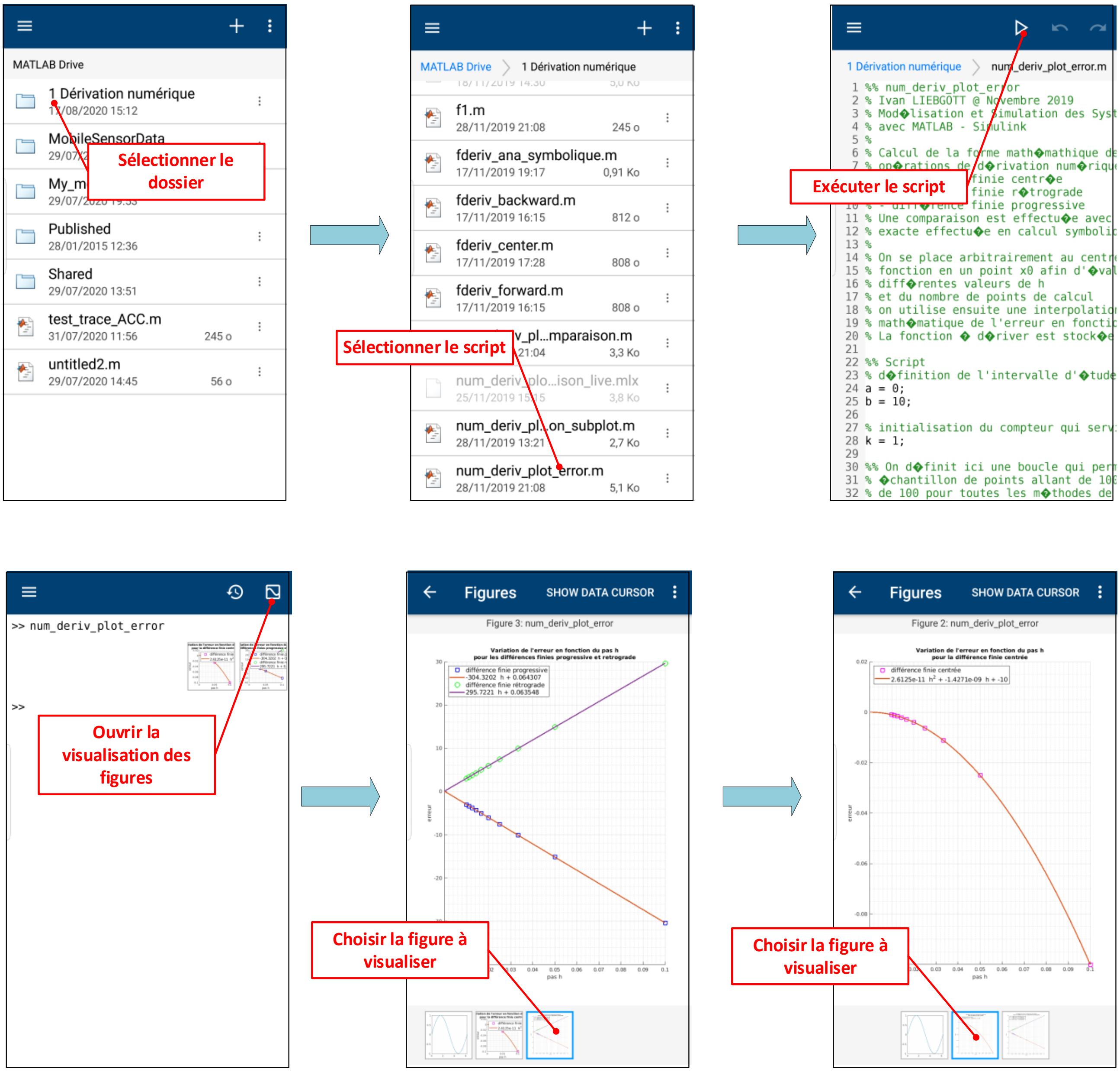


Figure 821 : exécution d'un script depuis MATLAB Mobile

5. Acquisition des données des capteurs du smartphone avec MATLAB Mobile

MATLAB Mobile permet de relever et d'exploiter très facilement les données issues des capteurs intégrés dans le smartphone :

- Accéléromètre 3 axes
- capteur de champ magnétique 3 axes
- capteur d'orientation (tangage, roulis, lacet)
- gyroscope 3 axes
- capteur de position terrestre (lattitude, longitude, vitesse, altitude…)

Pour relever une série de mesure, suivez la procédure indiquée sur la Figure 822.

Figure 822 : configuration et démarrage d'une acquisition des mesures issues des capteurs du smartphone

En faisant défiler la fenêtre des capteurs, il est possible d'activer les autres capteurs (ce ne sera pas utile pour l'instant). Après avoir appuyé sur « START », les données des capteurs activés sont stockées dans des variables.

Réaliser alors une série de mouvements avec le smartphone puis appuyer sur « STOP » pour arrêter le processus d'acquisition. Indiquer alors le nom du fichier « **test_mesures_acc_3_axes** » qui sera automatiquement sauvegardé dans le dossier **MATLAB Drive /MobileSensorData/ test_mesures_acc_3_axes .mat**. Le fichier porte l'extension **.mat** qui indique qu'il contient des variables que l'on pourra visualiser dans le Workspace de MATLAB en utilisant la commande **load('test_mesures_acc_3_axes .mat')**.

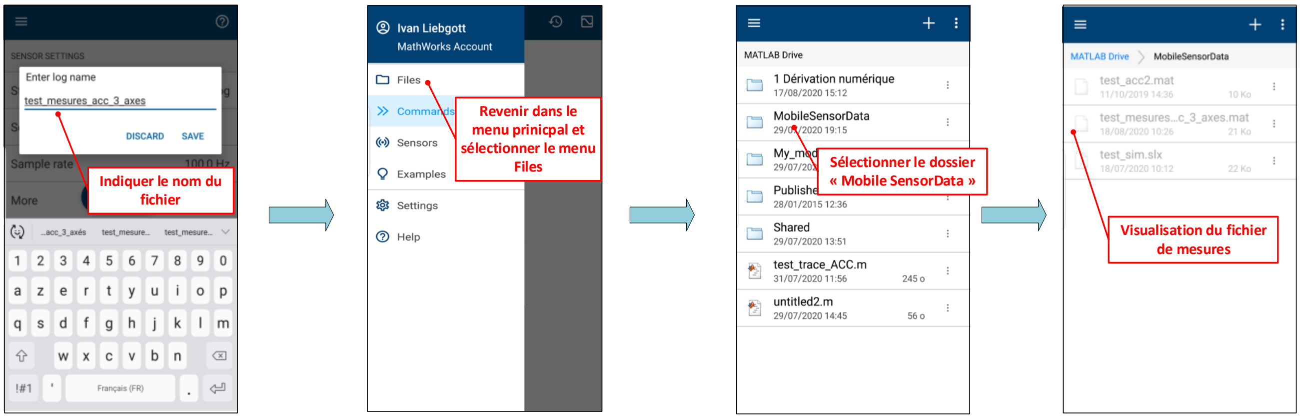


Figure 823 : sauvegarde du fichier de mesures dans MATLAB Drive

A partir du menu Files, il est possible de voir le fichier sauvegardé dans MATLAB Drive. Le fichier est alors instantanément accessible à partir de MATLAB online ou de la version de MATLAB installée sur votre PC

6. Exploitation des données des capteurs du smartphone avec MATLAB Mobile

L'exploitation des données doit se faire à partir de MATLAB online ou de la version de MATLAB installée sur votre PC. La condition nécessaire est de pouvoir accéder à MATLAB Drive.

Ouvrir MATLAB ou MATLAB online, sur votre PC et ouvrir le dossier **MATLAB Drive /MobileSensorData**. Observez l'apparition du fichier de mesure dans MATLAB Drive (Figure 824).

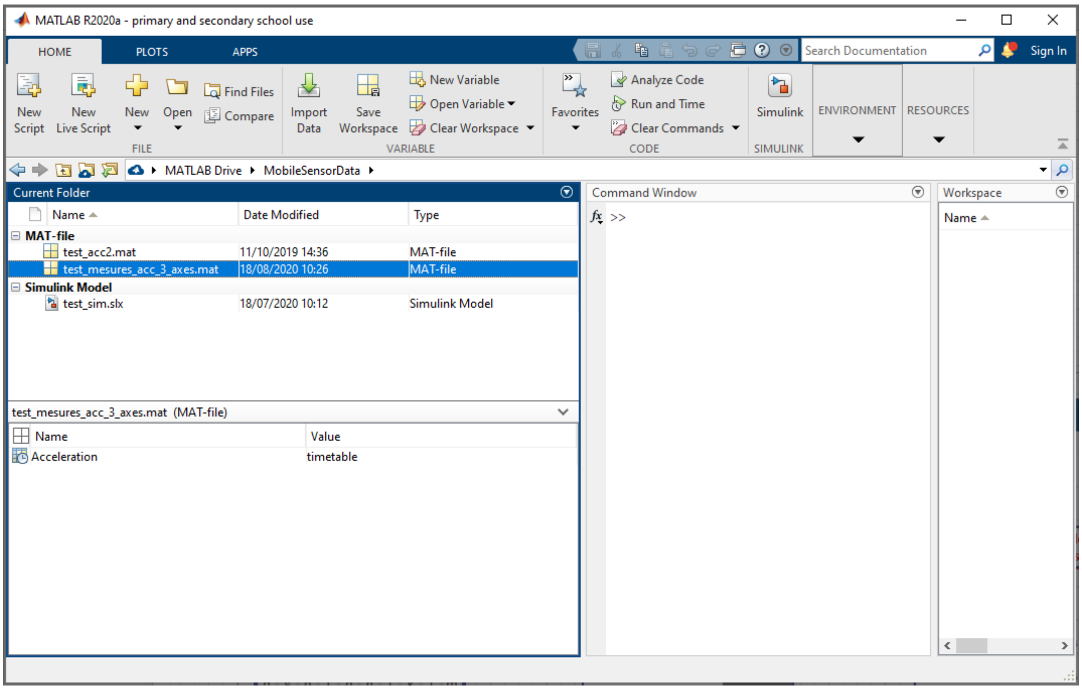


Figure 824 : visualisation du fichier de mesure sur le PC

Dans la fenêtre de commande, taper la commande suivante puis valider :

```
>> load test_mesures_acc_3_axes.mat
```

La variable« Acceleration » apparaît alors dans le Workspace et peut être exploité.

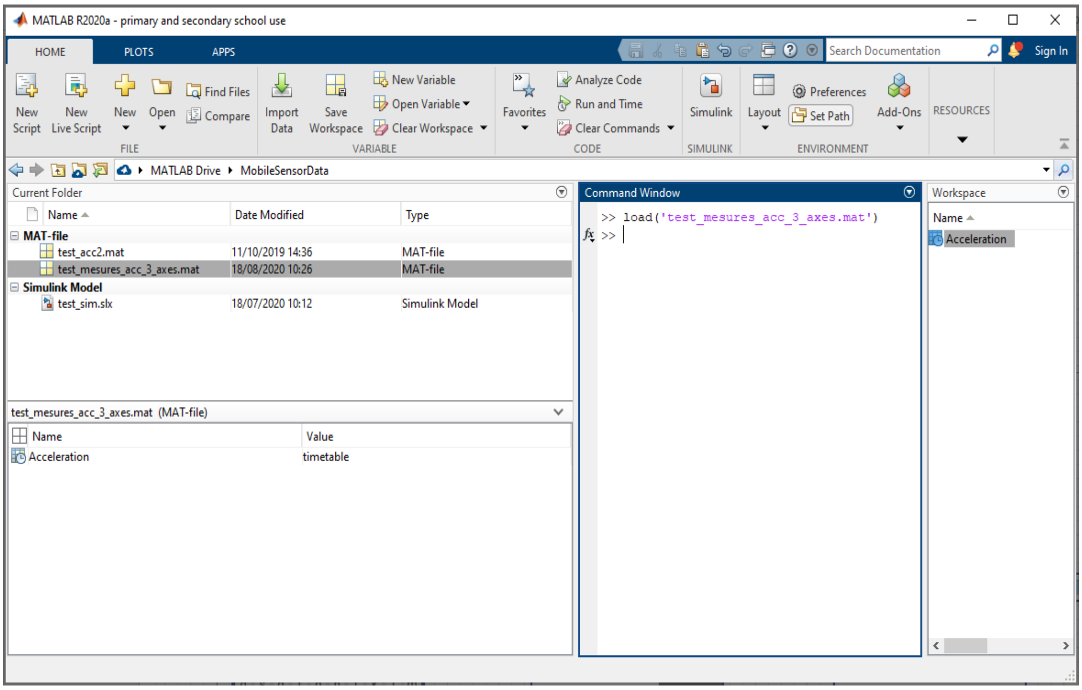


Figure 825 : visualistion du fichier de mesure dans le Workspace

La variable « **Acceleration** » porte par défaut le nom du capteur qui a permis de créer la variable. Si nous avions activé d'autres capteurs durant l'acquisition, chaque capteur activé aurait générer la création d'une variable associée. Dans la fenêtre de commande, taper « Acceleration » afin de visualiser la structure de la variable (Figure 826).

```
>> Acceleration
```

```
Acceleration =

  844×3 timetable

           Timestamp              X          Y          Z
    _______________________    ________    ______    ______

    18-Aug-2020 10:25:53.017   -0.17478    6.1509    8.2626
    18-Aug-2020 10:25:53.026    -0.3328    6.4861    8.3057
    18-Aug-2020 10:25:53.035    -0.4166    6.6297    7.9681
    18-Aug-2020 10:25:53.044   -0.64885    7.1278    7.5084
    18-Aug-2020 10:25:53.053    -1.4102    7.5563    6.9554
    18-Aug-2020 10:25:53.062    -1.3695    7.9131    6.3113
    18-Aug-2020 10:25:53.071    -1.4749    8.2555    5.8037
    18-Aug-2020 10:25:53.080    -1.0942    7.9634    5.7391
    18-Aug-2020 10:25:53.089   -0.38069    7.4606    5.8013
    18-Aug-2020 10:25:53.098     0.0838    7.2403    5.9426
    18-Aug-2020 10:25:53.107    0.22506    7.0368    6.1341
    18-Aug-2020 10:25:53.116    0.29689    6.9458    6.6106
    18-Aug-2020 10:25:53.125    0.38069    6.7782    7.0296
    18-Aug-2020 10:25:53.134    0.31126    6.7495     7.099
    18-Aug-2020 10:25:53.143    0.13887     6.692     6.941
    18-Aug-2020 10:25:53.152   0.079011    6.7878    6.8716
    18-Aug-2020 10:25:53.161   -0.10535    6.9266    6.8333
    18-Aug-2020 10:25:53.170   -0.61772    7.0272    6.6968
    18-Aug-2020 10:25:53.179   -0.99123     7.032    6.6896
    18-Aug-2020 10:25:53.188    -1.0702    7.0009    6.7854
```

Figure 826 : structure de la variable Acceleration

La variable **Acceleration** est de type **« timetable »** et contient les accélérations sur les 3 axes associées aux différents instants de l'acquisition.

Pour extraire la colonne des instants taper la commande suivante (Figure 827) :

```
>>t = Acceleration.Timestamp
```

```
t =

  844×1 datetime array

   18-Aug-2020 10:25:53.017
   18-Aug-2020 10:25:53.026
   18-Aug-2020 10:25:53.035
   18-Aug-2020 10:25:53.044
   18-Aug-2020 10:25:53.053
   18-Aug-2020 10:25:53.062
   18-Aug-2020 10:25:53.071
```

Figure 827 : extraction de la colonne des instants

La variable « **t** » de type **datatime** apparaît alors dans le Workspace.
Il est possible d'extraire la colonne correspondant uniquement aux secondes en tapant la commande suivante (Figure 828) :

```
>>t_sec = t.Second
```

```
t_sec =

   53.0170
   53.0260
   53.0350
   53.0440
   53.0530
   53.0620
   53.0710
   53.0800
   53.0890
   53.0980
```

Figure 828 : extraction de la colonne des instants correspondant aux secondes

La variable **t_sec** de type double apparaît alors dans le Workspace et pourra être utilisée pour tracer une courbe.

Pour extraire la colonne correspondant aux accélérations relevées selon l'axe X, taper la commande suivante (Figure 829):

```
>>AX = Acceleration.X
```

```
AX =

   -0.1748
   -0.3328
   -0.4166
   -0.6488
   -1.4102
   -1.3695
   -1.4749
   -1.0942
   -0.3807
    0.0838
    0.2251
    0.2969
```

Figure 829 : extraction de la colonne correspondant aux accélérations mesurées selon l'axe X

Saisir le script de la Figure 830 et lancer son exécution. Le script est également disponible dans le dossier « Chapitre_12_MATLAB_Mobile ».

```
%% Exploitation des données issues de l'accéléromètre d'un smartphone
% Ivan LIEBGOTT @ aout 2020
% Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques
% avec MATLAB - Simulink
%%
load test_mesures_acc_3_axes.mat
close all;

% création des variables permettant d'effectuer les tracés
t = Acceleration.Timestamp;
AX = Acceleration.X;
AY = Acceleration.Y;
AZ = Acceleration.Z;

% tracés des courbes d'accélération

subplot(3,1,1);
plot(t,AX);grid on;

subplot(3,1,2);
plot(t,AY);grid on;

subplot(3,1,3);
plot(t,AZ);grid on;
```

Figure 830 : script permettant de faire le tracer les accélérations en fonction du temps

Le résultat de l'exécution du script peut être visualisé sur la Figure 831.

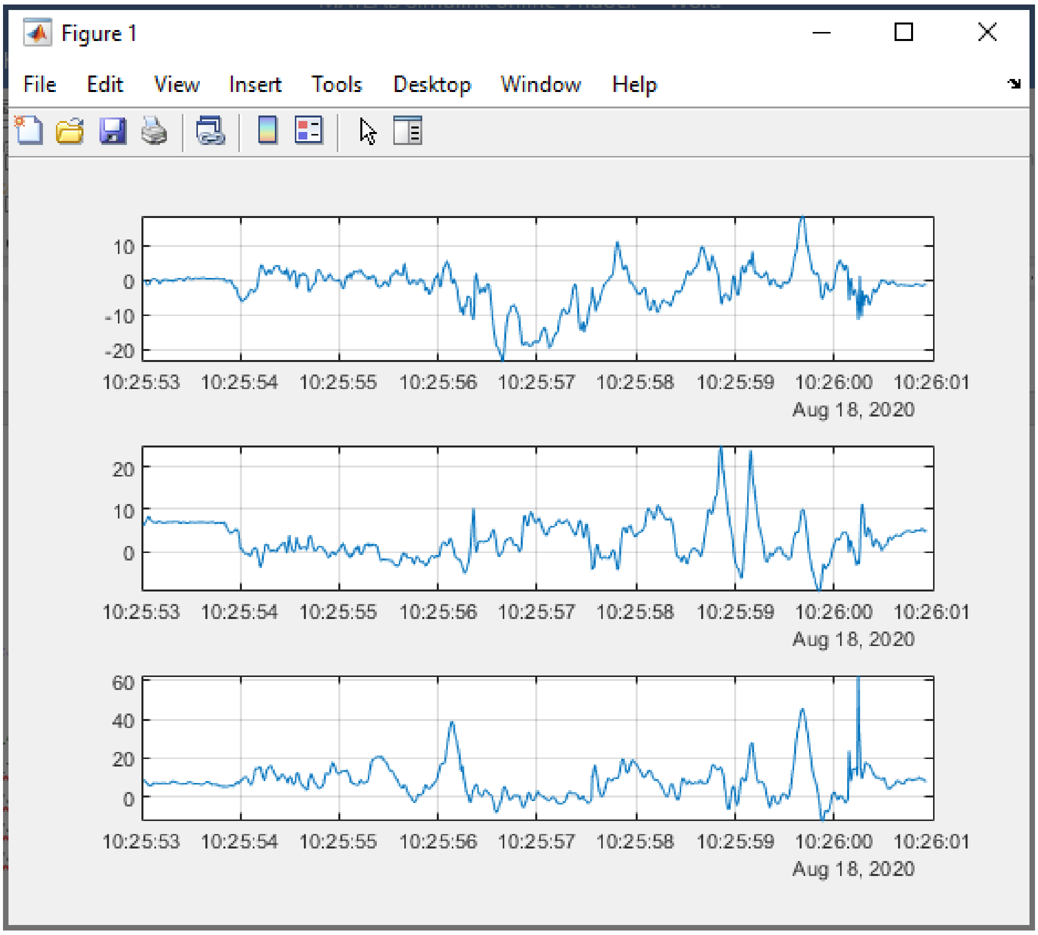


Figure 831 : accélérations selon les trois axes en fonction du temps

Il est maintenant possible d'utiliser cette série de données pour lui appliquer un ou plusieurs processus de traitement et d'analyse décrits dans le chapitre 10 « Ingénierie Numérique en langage MATLAB » (filtrage, intégration numérique…).

Annexe 1 : paramétrage des scopes

Ouvrir le fichier « **circuit_RL.slx** » et **lancer** la simulation.

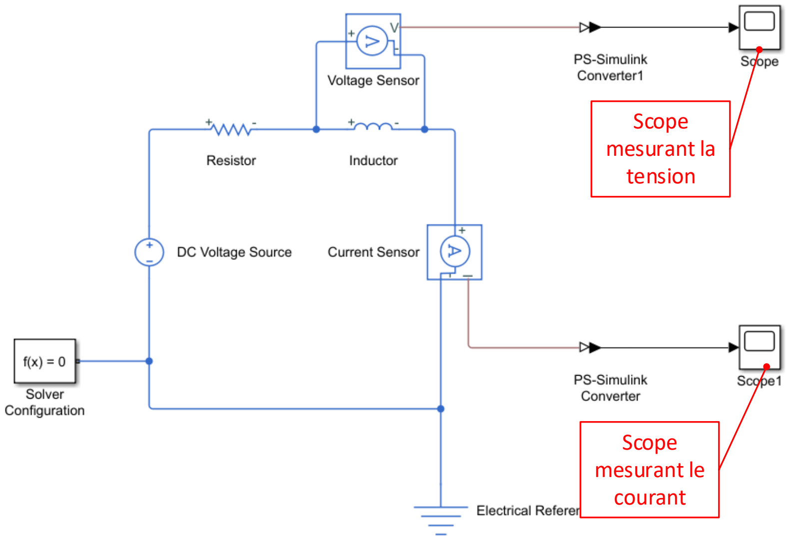


Figure 832 : scopes mesurant le courant dans le circuit et la tension aux bornes de la bobine

Ouvrir le scope mesurant la tension aux bornes de la bobine et visualiser l'allure et la mise en forme de la courbe.

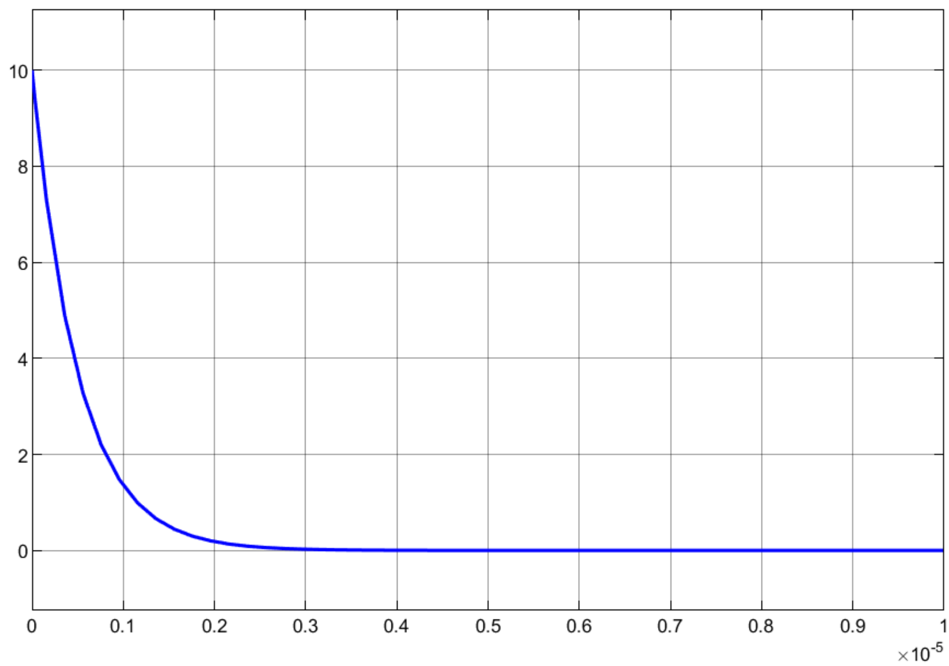


Figure 833 : mesure de la tension aux bornes de la bobine

Lors de l'ouverture du scope, la barre de commande est disponible sur la partie supérieure de la fenêtre (Figure 834).

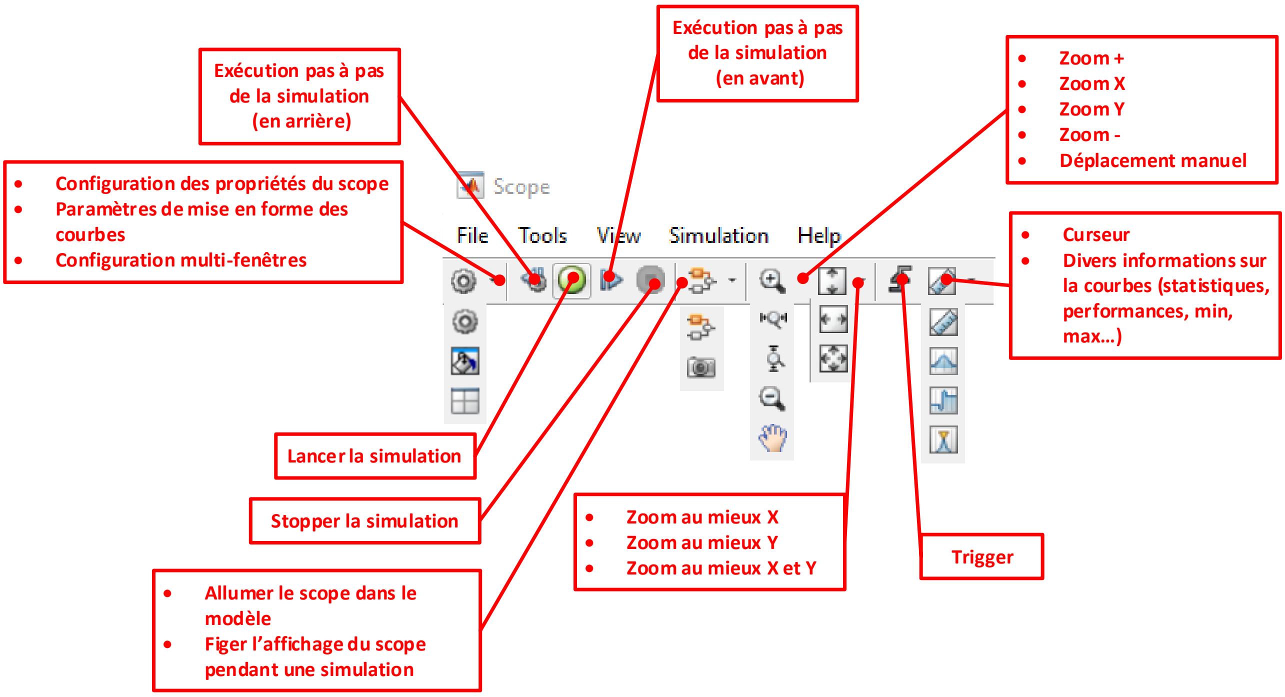


Figure 834 : barre de commande du scope

La commande la plus utile est la mise à l'échelle automatique des axes . A la fin d'une simulation, il faut penser à l'utiliser dès l'ouverture du scope pour visualiser la courbe. Il est possible que lors de l'ouverture du scope la courbe ne soit pas dans la zone affichée par les axes et que rien ne soit visible sur le scope.

Il est possible de modifier la mise ne forme des courbes en cliquant sur l'icône accessible depuis le menu déroulant **Configuration Properties**

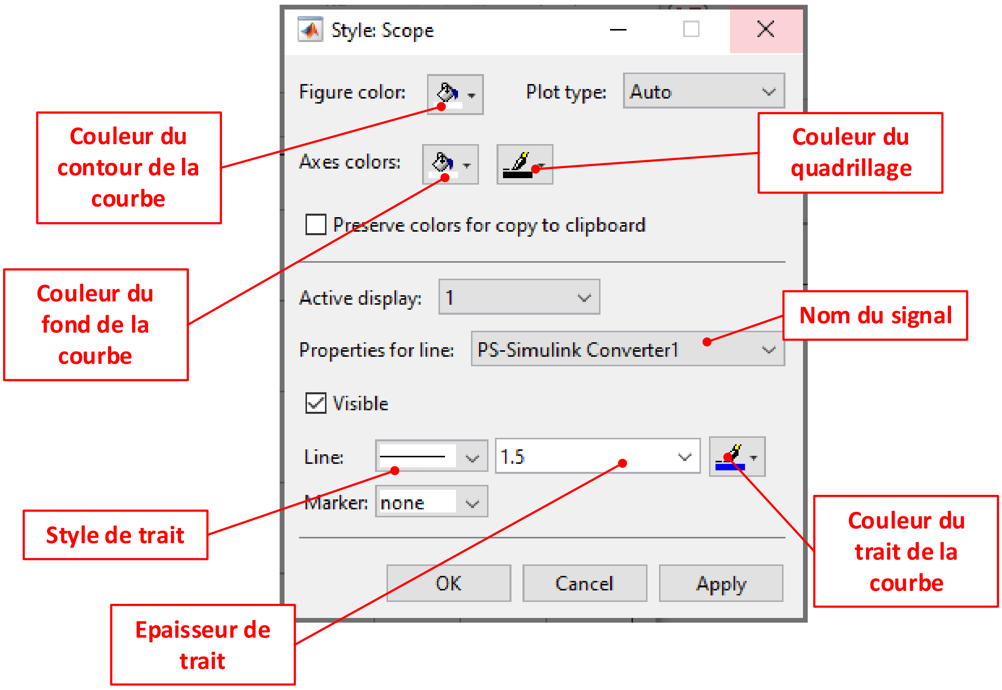


Figure 835 : mise en forme des courbes dans un scope

Modifier les paramètres de mise en forme comme indiqué sur la Figure 835 et observer le résultats obtenus (Figure 836).

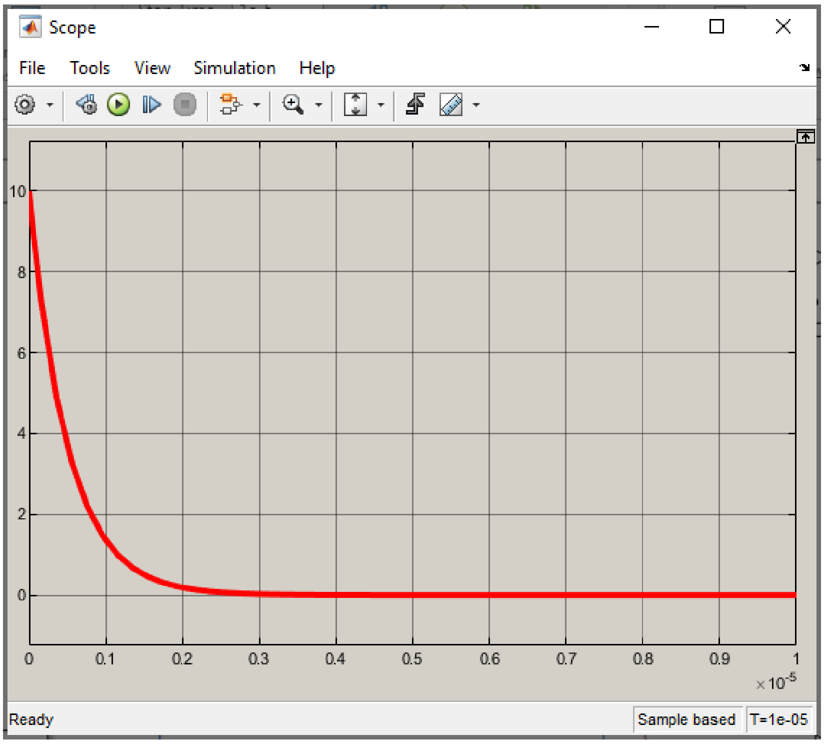


Figure 836 : modification de la mise en forme d'une courbe dans un scope

Pour afficher plusieurs courbes dans le même scope cliquer sur **Configuration Properties** et modifier le champ **Number of input ports** à **2** afin de définir deux entrées pour le scope (Figure 837).

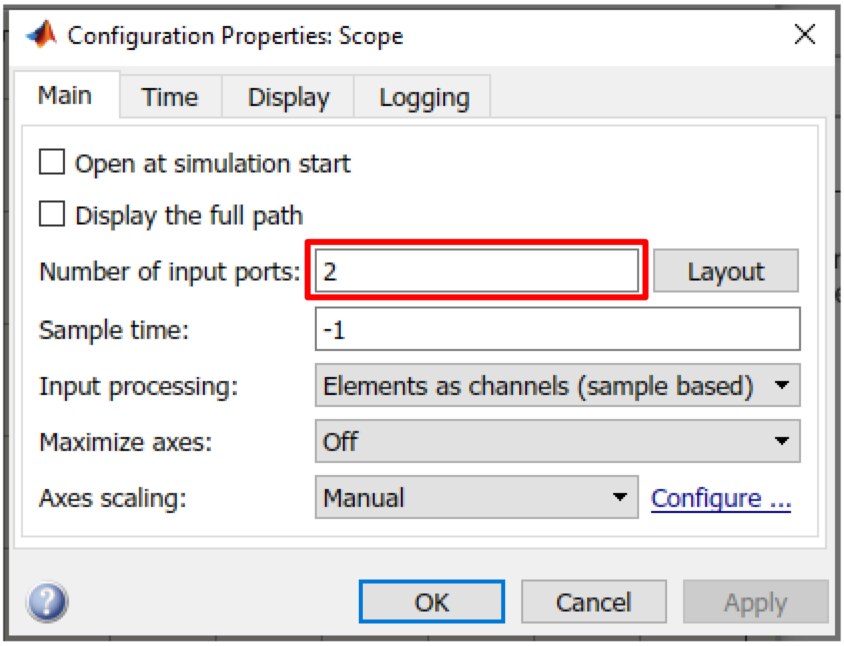


Figure 837 : modification du nombre d'entrées d'un scope

Le scope a maintenant 2 entrées. **Raccorder** la seconde entrée au signal mesurant le courant dans le circuit comme indiqué sur la Figure 838.

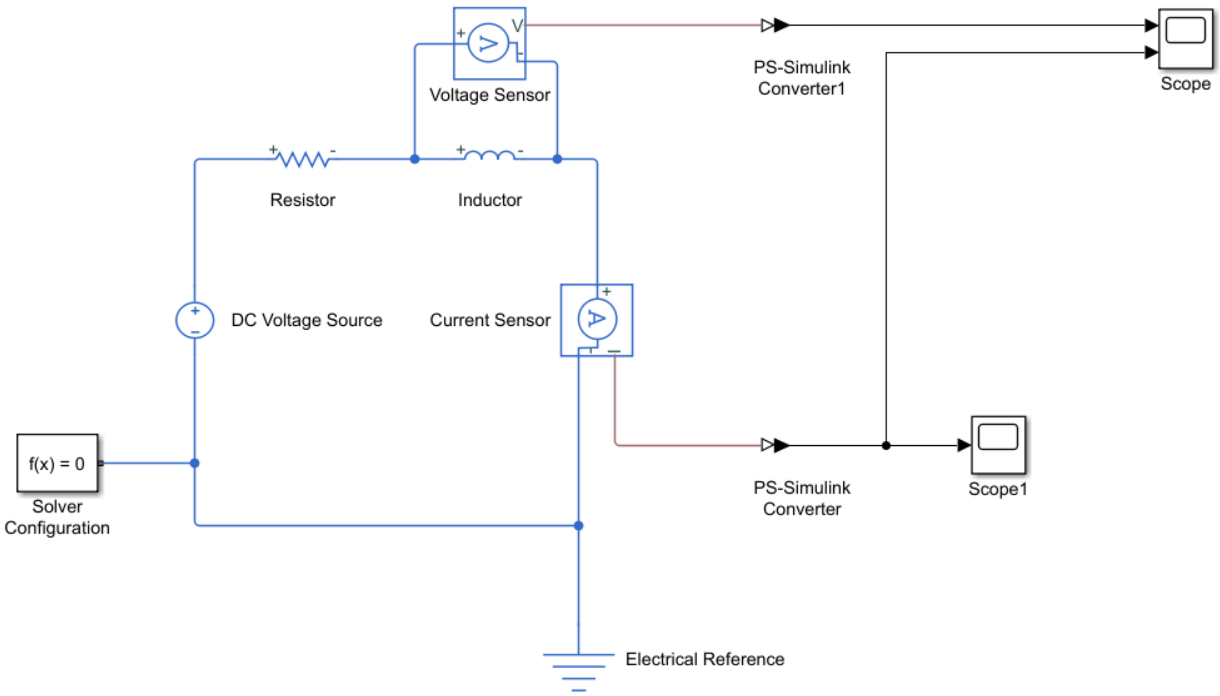


Figure 838 : raccordement d'un scope à deux entrées

Lancer la simulation et ouvrir le scope pour obtenir la courbe de la Figure 839.

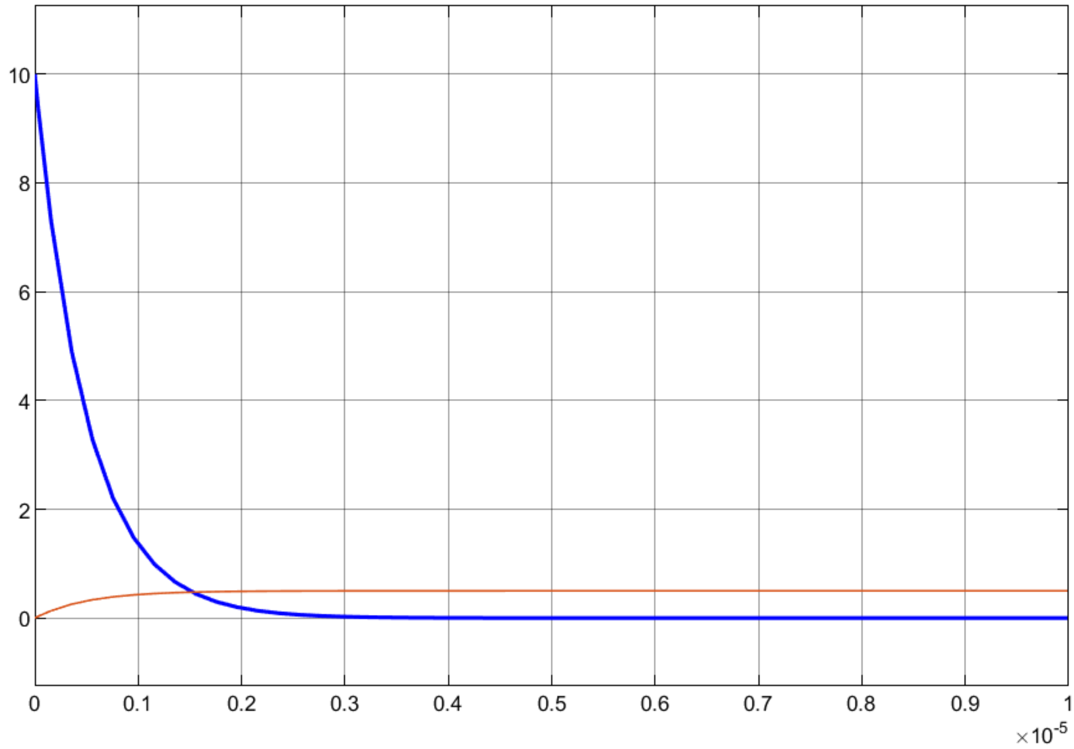


Figure 839 : visualisation des deux courbes dans le même scope

Modifier les caractéristiques de la seconde courbe en utilisant l'icône , comme indiqué sur la Figure 840.

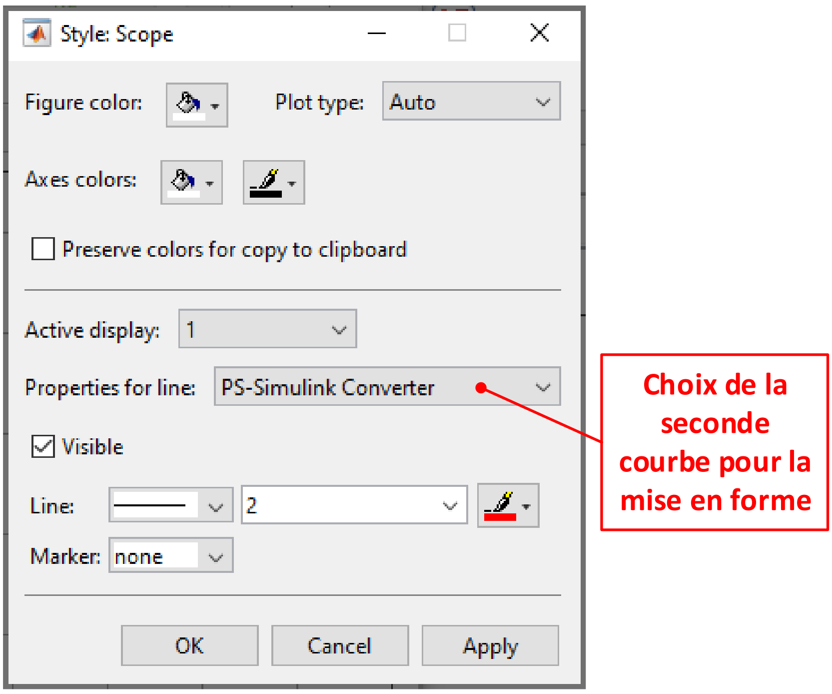


Figure 840 : modification des caractéristiques de la deuxième courbe

Vous devez obtenir la configuration de la Figure 841.

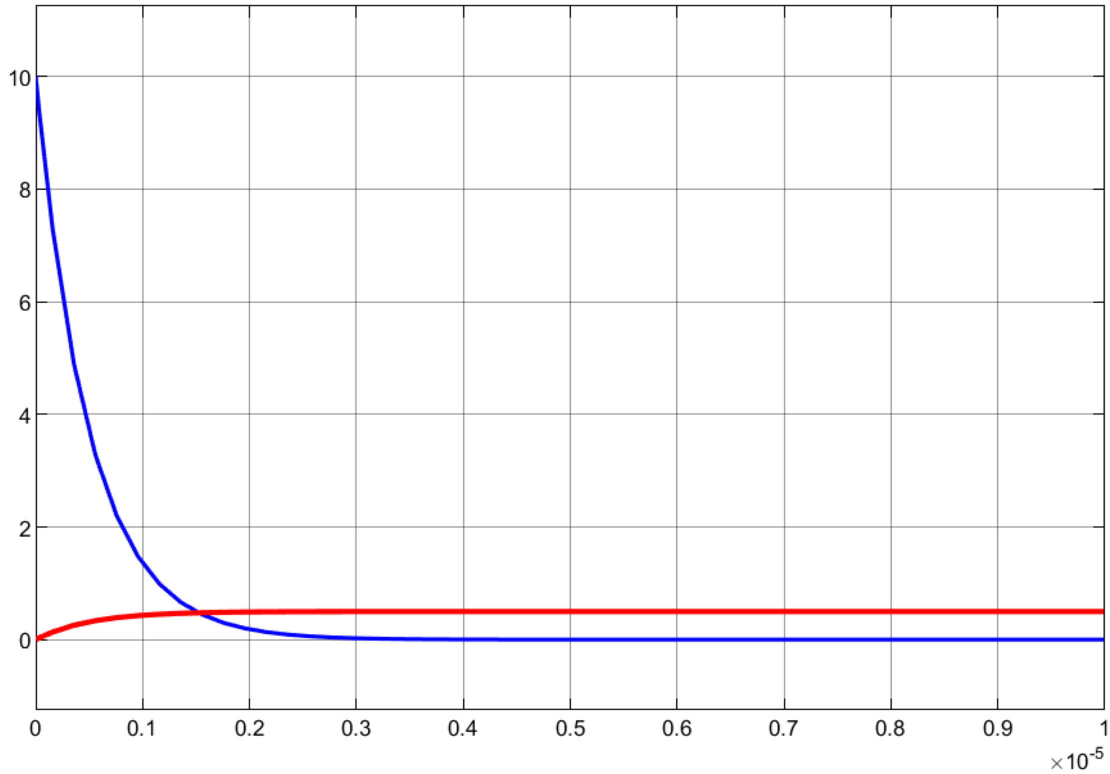


Figure 841 : modification des caractéristiques de la deuxième courbe

Si vous souhaitez afficher ces deux courbes dans des graphes différents, cliquer sur l'icône **layout**  et choisir la disposition des courbes que l'on souhaite (Figure 842).

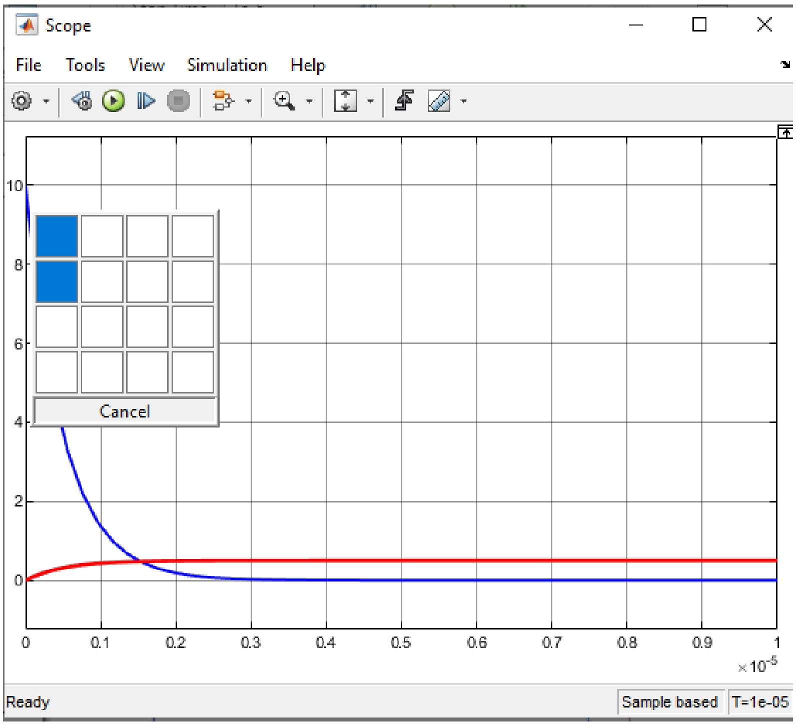


Figure 842 : modification du nombre de fenêtre dans le scope

Après mise à l'échelle des courbes à l'aide de la commande , on obtient l'affichage représenté sur la Figure 843.

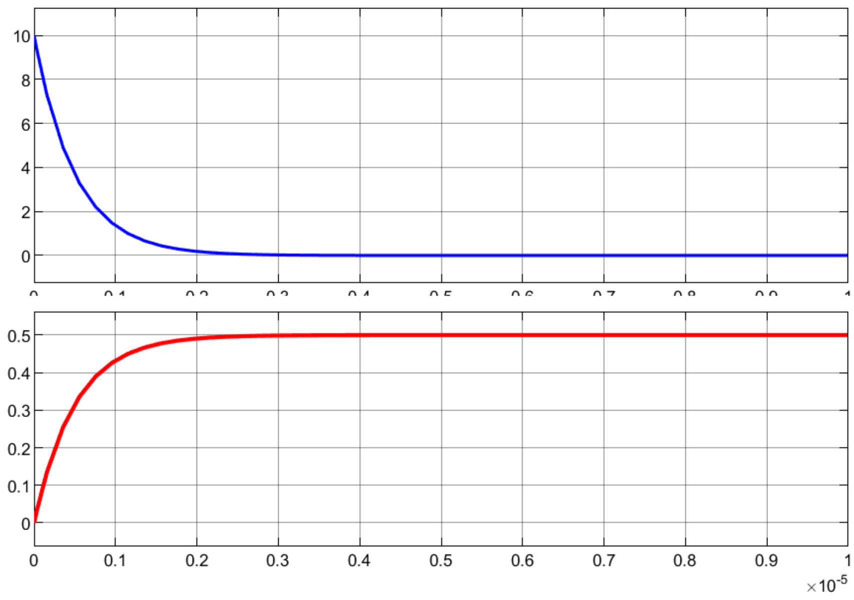


Figure 843 : affichage des courbes dans un scope sur plusieurs fenêtres

Un outil curseur est très pratique à utiliser dans les scopes, pour l'ouvrir cliquer sur l'icône **Cursor Measurement** afin de faire apparaître les curseurs. Il est alors possible d'avoir accès à tous les paramètres de mesure utiles ΔT, ΔY, coefficient directeur de la droite reliant les deux curseurs…(Figure 844).

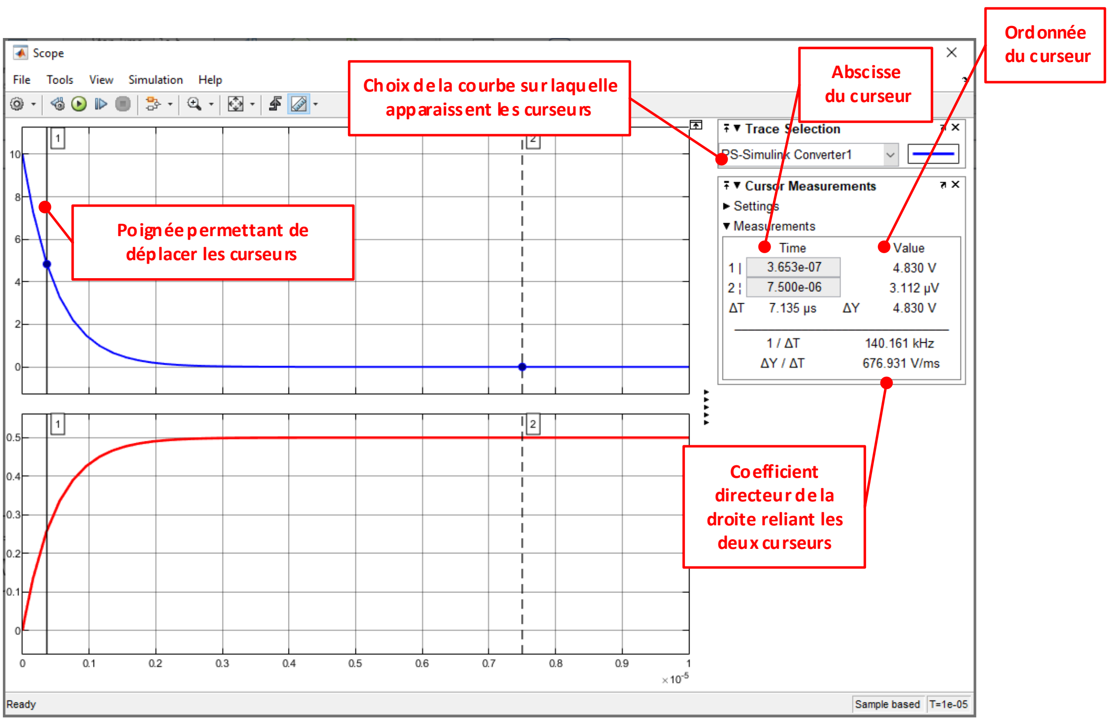
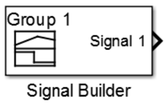


Figure 844 : utilisation des curseurs dans un scope

Pour plus d'informations sur l'utilisation des scopes vous pouvez utiliser l'aide de MATLAB.

Annexe 2 : utilisation du signal builder

Le « signal builder » est un générateur de signaux que l'on peut paramétrer manuellement. Ce bloc est très utile pour imposer des lois de commandes.

Fonction du composant	Représentation	Bibliothèque
Source de signal paramétrable		Simulink/Sources

Glisser-déposer un bloc « Signal Builder » depuis la bibliothèque **Simulink** et **ouvrir** ce bloc.

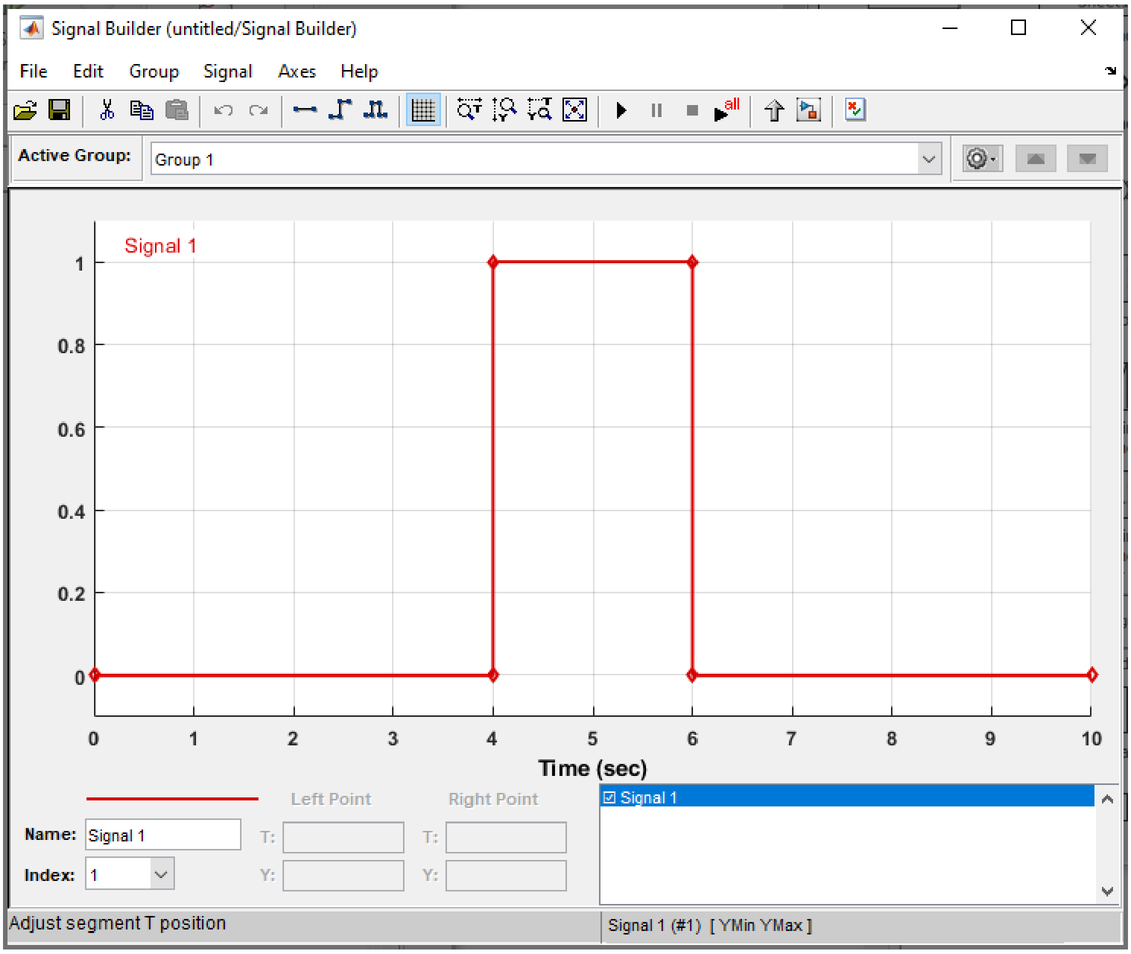


Figure 845 : fenêtre de paramétrage du Signal builder

La barre de commande du signal buider permet d'accéder à de nombreuses fonctions.

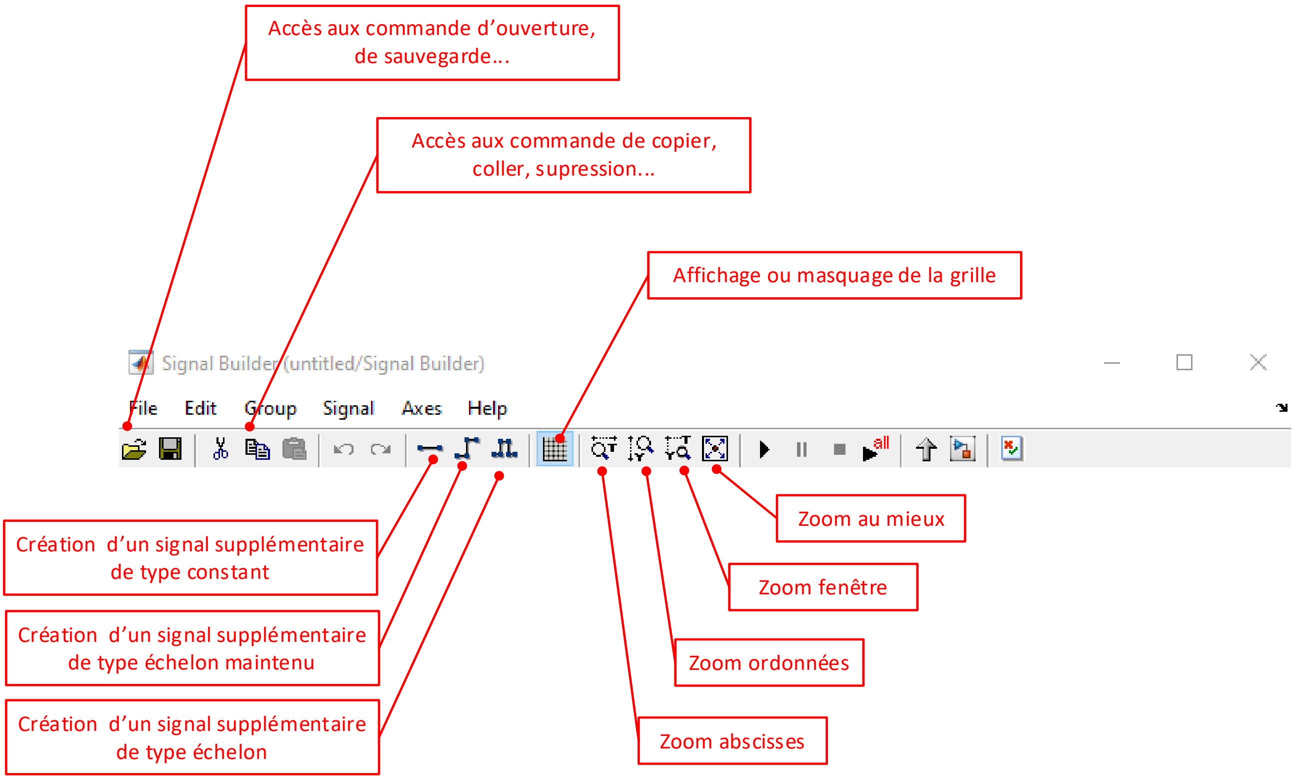


Figure 846 : barre de commande du signal builder

Dans un premier temps il faut indiquer la durée du signal. Pour cela sélectionner **Axes/Change Time Range** accessible depuis la barre de commande.

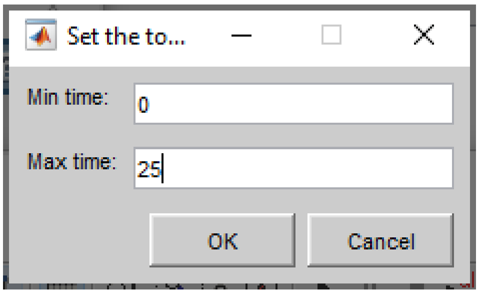


Figure 847 : choix de la durée du signal dans le « signal builder »

Choisir une durée de signal de 25 s (Figure 848).

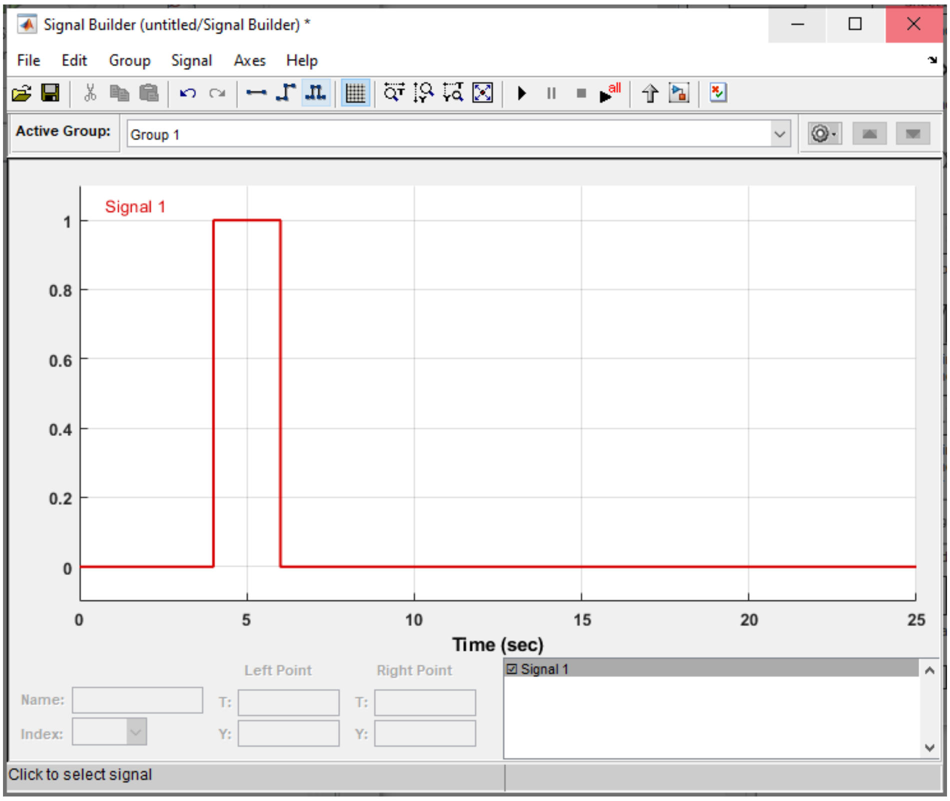


Figure 848 : modification de l'échelle de temps

Il est possible de déplacer manuellement les segments qui composent le signal.
Avec le curseur de la souris, en utilisant le **glisser déposer**, déplacer horizontalement les segments verticaux et verticalement les segments horizontaux (Figure 849).

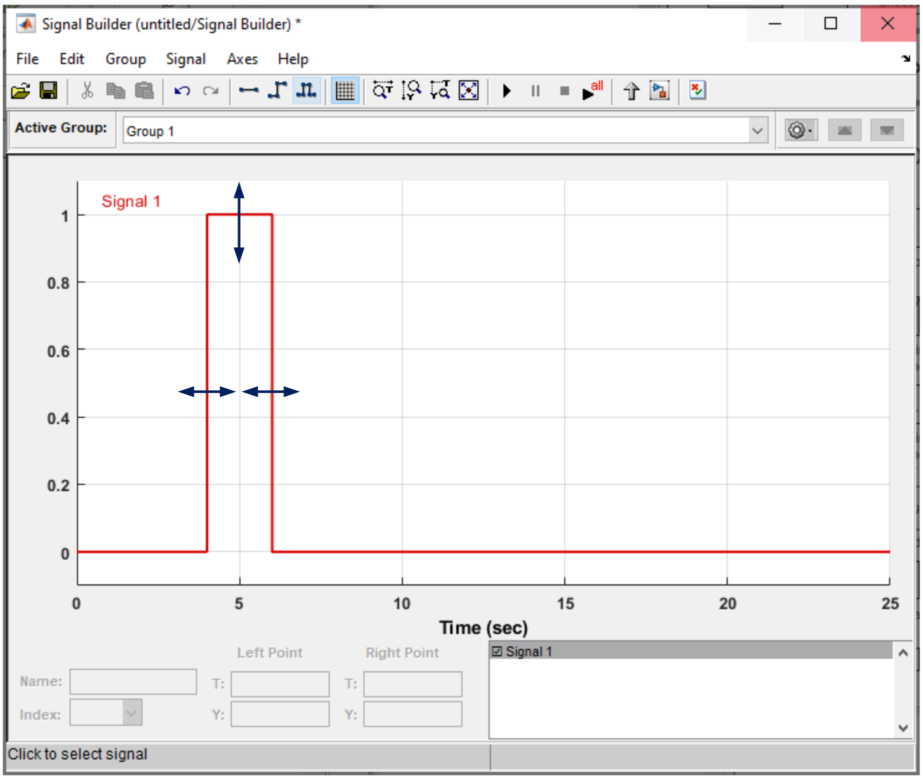


Figure 849 : déplacement manuel des segments dans le « signal builder »

Pendant le déplacement, il est possible de visualiser dans les cases « left point » et « right point » situées sous le signal la position du segment.
En sélectionnant un segment vertical (clique gauche avec la souris), il est possible de rentrer la valeur exacte de l'instant dans la case **T : « Left Point »**. Il est également possible de choisir exactement l'ordonnée du point d'origine et du point final dans les cases **Y : « Left Point » « Right Point »**. Les mêmes opérations peuvent être réalisées en sélectionnant un segment horizontal.
Il est également possible de déplacer uniquement un point pour obtenir des signaux de type rampe.

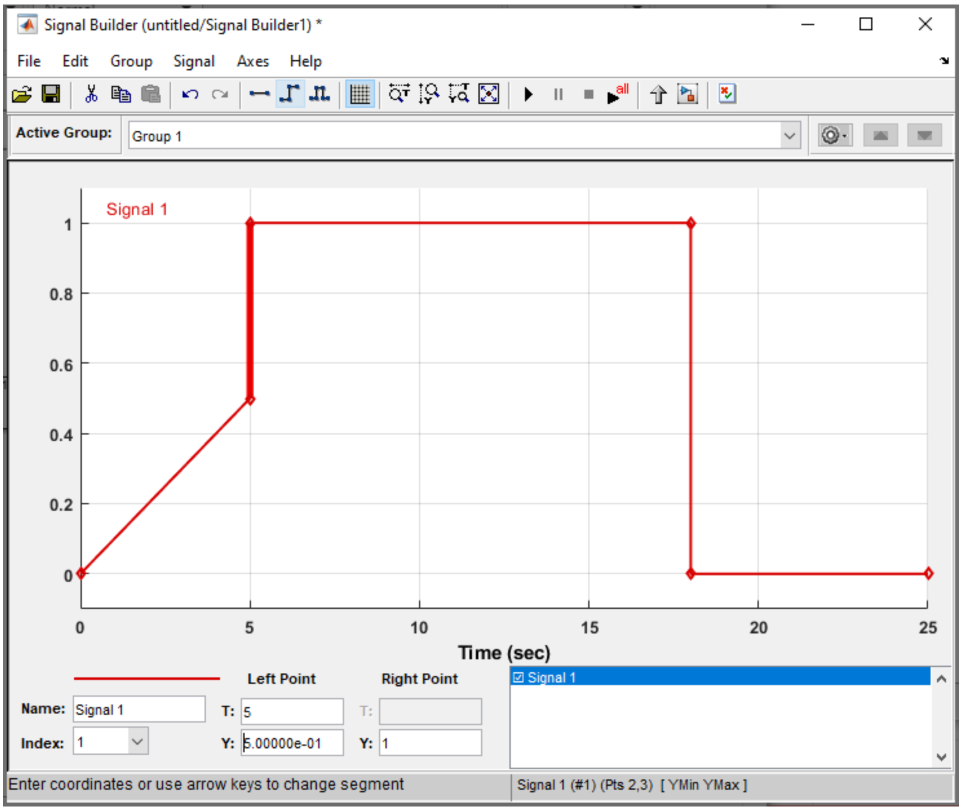


Figure 850 : déplacement d'un point dans le « signal builder »

Le principe de construction d'un signal quelconque est de créer des points qui seront reliés par des segments que l'on pourra ensuite déplacer librement en utilisant la méthode précédemment présentée.

Pour créer de nouveaux points, il faut utiliser la combinaison de touche **Maj+clique gauche** en plaçant les nouveaux points directement sur le signal.

Placer approximativement des nouveaux points conformément à la Figure 851.

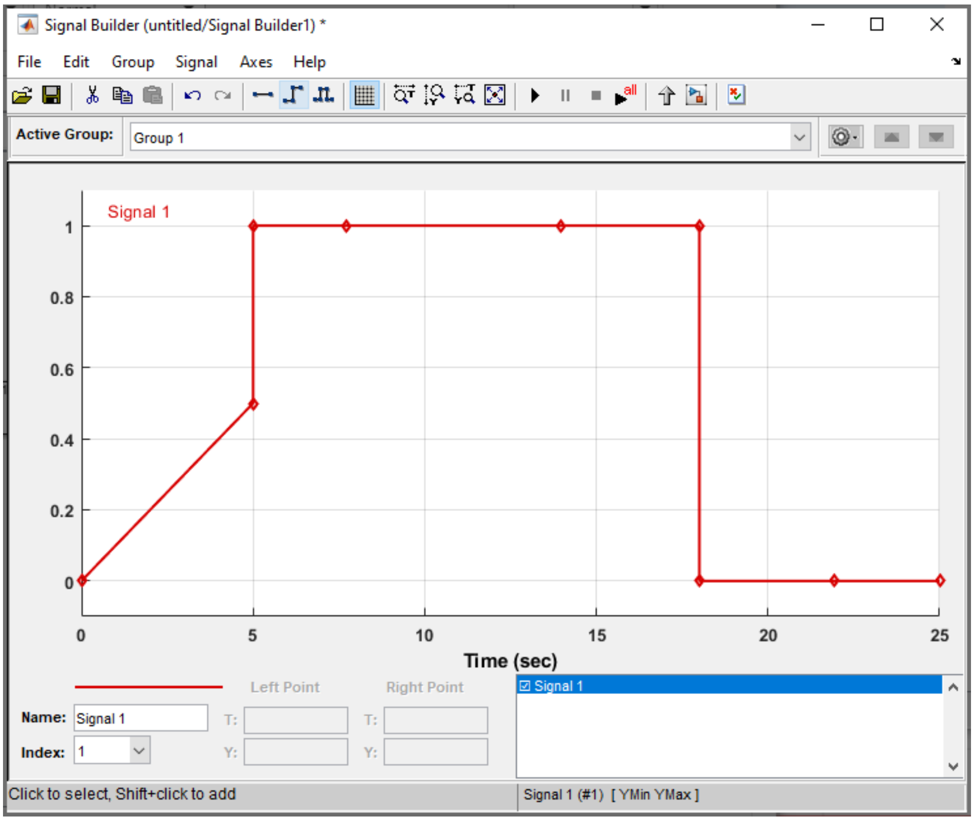


Figure 851 : placement de nouveaux points sur le signal

Déplacer les points et les segments pour obtenir approximativement le signal de la Figure 852.

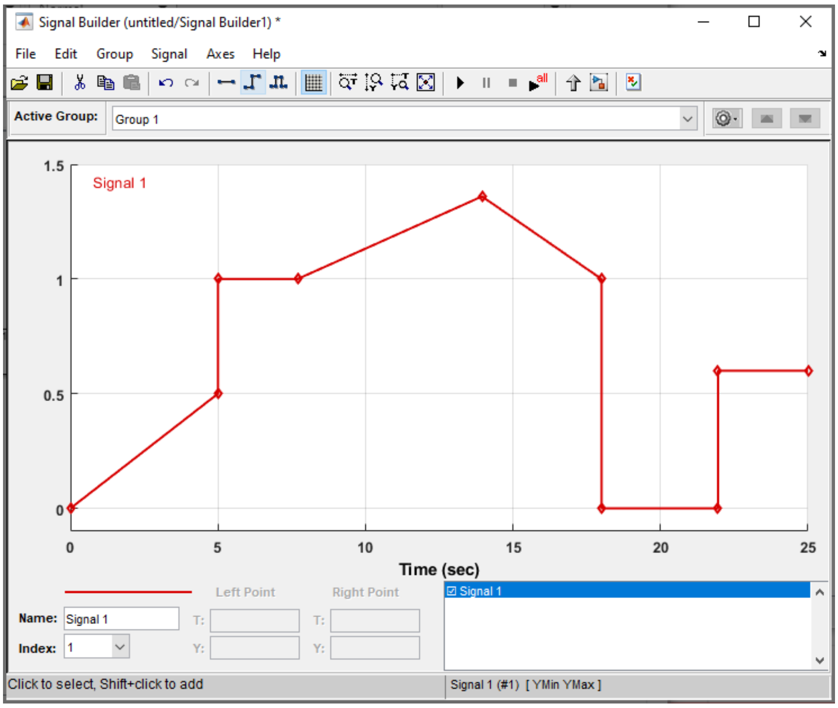
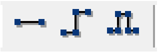


Figure 852 : mise en forme du signal par déplacement de segments et de points

Il est également possible de créer un bloc permettant de générer plusieurs signaux.

Cliquer sur les trois signaux  accessibles depuis la barre de commande et choisir d'introduire de nouveaux signaux.

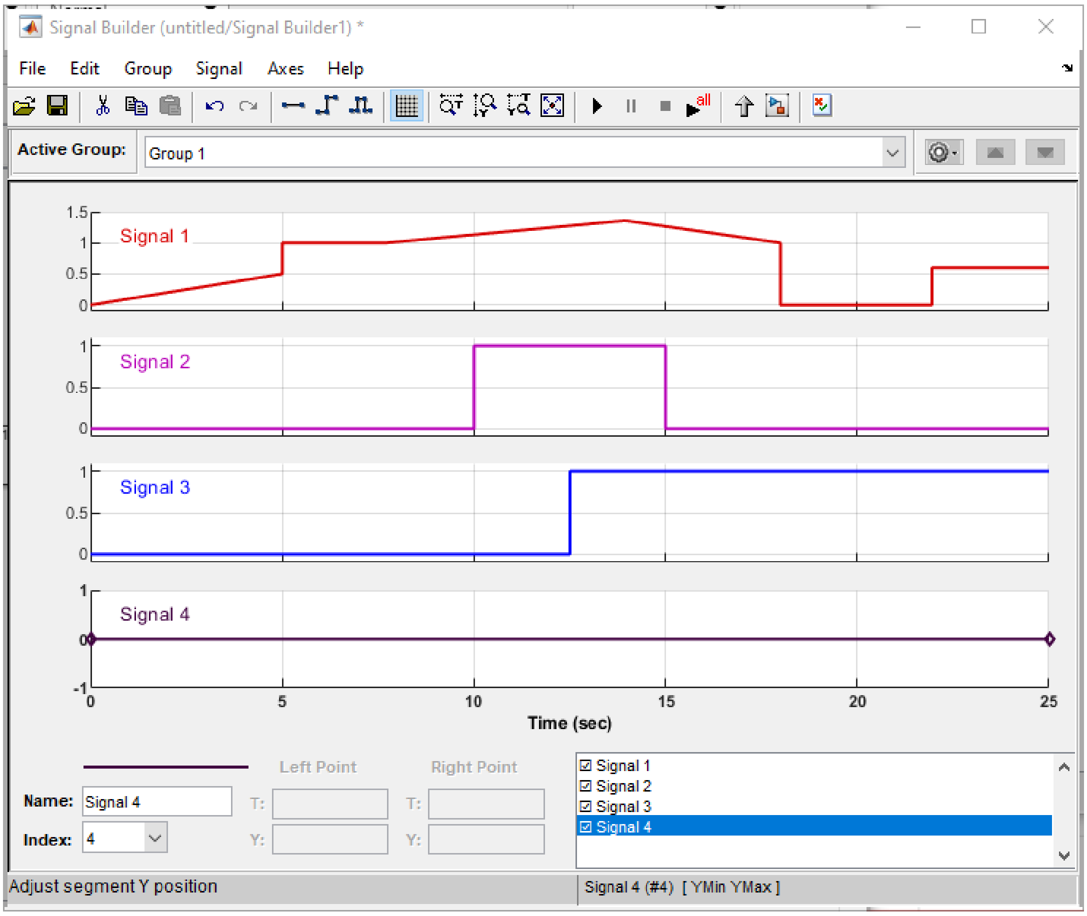


Figure 853 : génération de plusieurs signaux

Le bloc comporte maintenant 4 sorties.

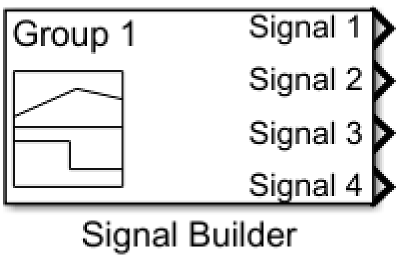
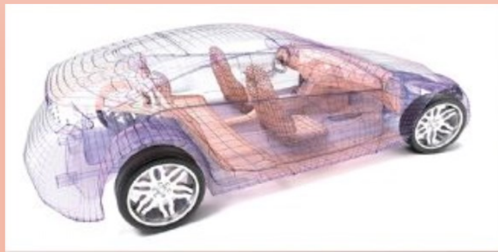


Figure 854 : visualisation des sorties multiples du « signal builder »

Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques avec MATLAB – Simulink (R2020a)

pour l'étudiant et l'ingénieur

Quatrième édition



The MathWorks

Ivan LIEBGOTT