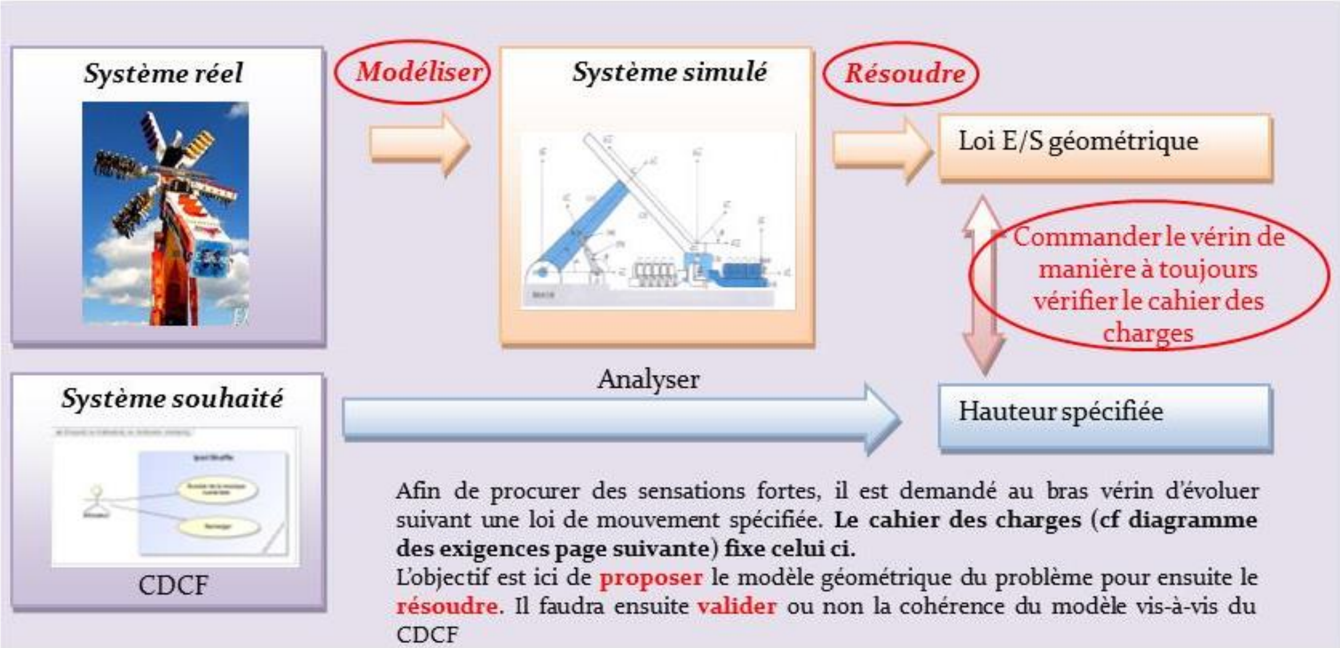
DM2 : MODELISATION GEOMETRIQUE ET CINEMATIQUE DES SYSTEMES DE SOLIDES

1 - Objectif

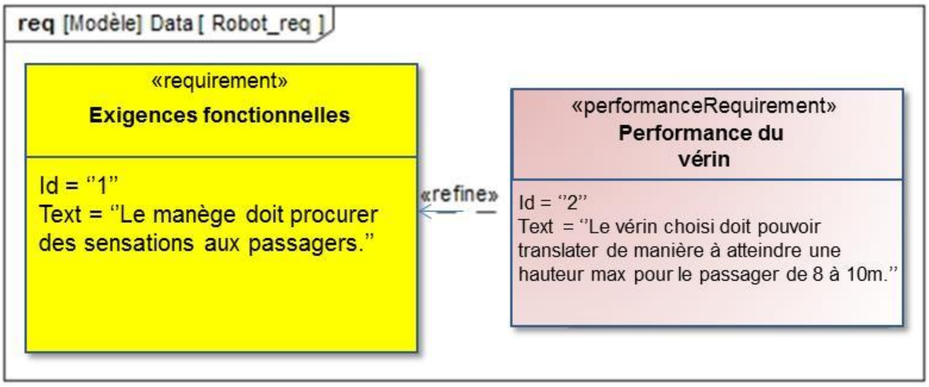
Les parcs d'attraction ou les fêtes foraines comportent de nombreux manèges qui doivent satisfaire un public très large. Le manège « Extrême », classé dans la catégorie des manèges à sensation, doit procurer aux usagers des sensations de vitesse, d'accélération et de désorientation qui doivent être suffisamment importantes pour répondre aux attentes des usagers. En revanche, ils doivent rester en deçà d'une certaine limite pour ne pas l'incommoder ou le mettre en danger. La combinaison de plusieurs mouvements judicieusement gérés permet d'atteindre le niveau de sensation souhaité.

La conception d'un tel manège répond à un cahier des charges très précis.On se focalisera ici sur une seule exigence de hauteur maximale.



2 - Analyse partielle du système complexe

Les exigences fonctionnelles font apparaître la nécessité de faire évoluer le vérin suivant une loi de mouvement imposée. On focalise ici sur cette exigence rappelée ci-dessous.

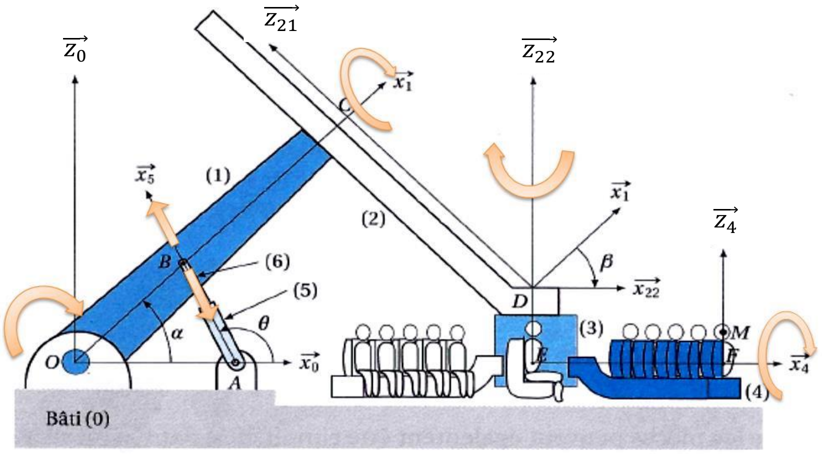


Á noter que d'autres exigences sont liées à la cinématique du système :

- Vitesse maximale d'un passager : entre 30 $km.h^{-1}$ et 50 $km.h^{-1}$
- Accélération maximale ressentie par un passager : entre $1{,}2g$ et $1{,}8g$, soit environ entre $12 m.s^{-2}$ et $18 m.s^{-2}$

Pour répondre aux attentes du cahier des charges en termes de déplacement, vitesse et accélération, il est nécessaire d'élaborer un modèle géométrique et cinématique du système étudié, ce qui permettra de calculer les positions, vitesses et accélérations du passager par rapport au sol en fonction de sa position sur le manège et des vitesses d'évolution des différents actionneurs. On propose alors la démarche suivante.

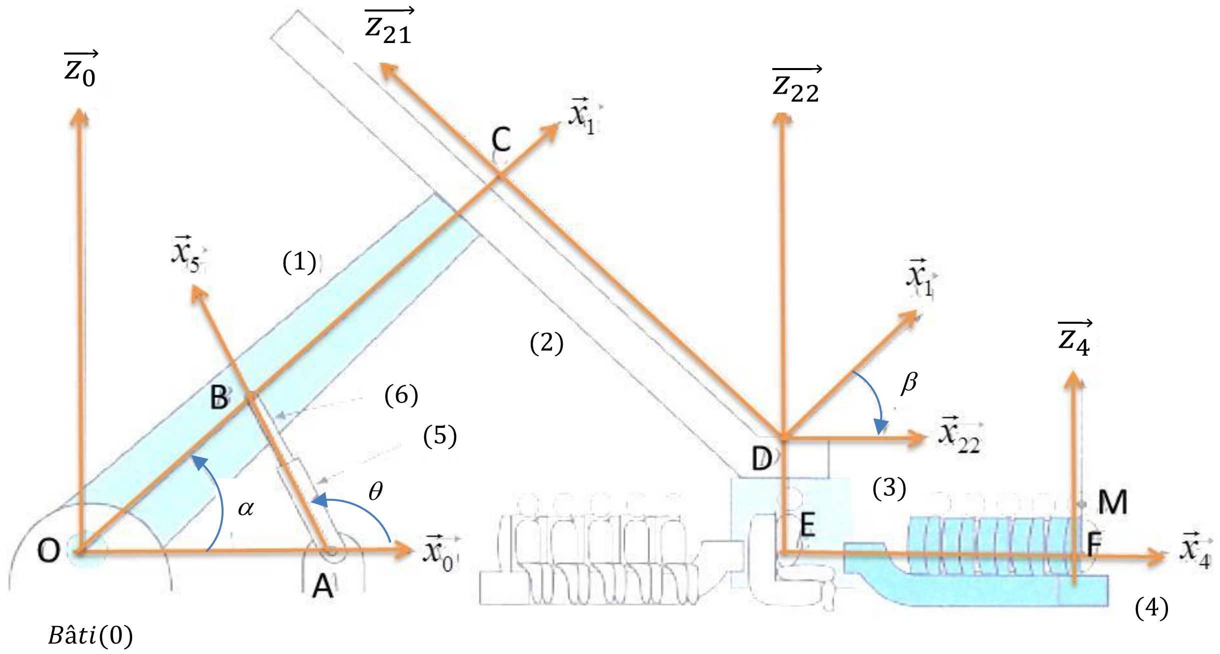
3 - Modélisation



Les mouvements possibles et les liaisons dans le cas du manège sont :

Entre (1) et (0) : pivot d'axe $(O, \vec{y_0})$.
Entre (3) et (2) : pivot d'axe $(D, \vec{z_{22}})$.
Entre (6) et (1) : pivot d'axe $(B, \vec{y_0})$.
Entre (6) et (5) : glissière de direction $\vec{x_5}$.
Entre (2) et (1) : pivot d'axe $(O, \vec{x_1})$.
Entre (4) et (3) : pivot d'axe $(E, \vec{x_4})$.
Entre (5) et (0) : pivot d'axe $(A, \vec{y_0})$.

<u>Question 1:</u> *A partir de la description précédente,* ***réaliser*** *le schéma cinématique du manège sur le dessin suivant :*



<u>Question 2:</u> ***Réaliser*** *le graphe des liaisons.*

<u>Paramétrage :</u>
Les caractéristiques géométriques des pièces sont définies par les vecteurs position $\overrightarrow{OA} = a.\vec{x_0}, \overrightarrow{OB} = b.\vec{x_1}, \overrightarrow{OC} = c.\vec{x_1}$, $\overrightarrow{CD} = -d.\vec{y_{21}}, \overrightarrow{DE} = -e.\vec{y_{22}}, \overrightarrow{EF} = f.\vec{x_3}, \overrightarrow{FM} = h.\vec{y_4}$.

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ associé au sol (0).
- $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ associé au bras (1), en liaison pivot d'axe $(O, \vec{y}_{0,1})$ et de paramètre $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ avec le sol (0)
- $R_5(O, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_{0,5})$ associé au bras (5), en liaison pivot d'axe $(A, \vec{y}_{0,5})$ et de paramètre $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_5) = (\vec{z}_0, \vec{z}_5)$ avec le sol (0)
- $R_{21}(C, \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_{21}, \vec{z}_{21})$ associé au bras (2), en liaison pivot d'axe $(C, \vec{x}_{1,2})$ et de paramètre $\gamma = (\vec{y}_1, \vec{y}_{21}) = (\vec{z}_1, \vec{z}_{21})$ avec le bras (1). Un second repère $R_{22}(D, \vec{x}_{22}, \vec{y}_{22}, \vec{z}_{21,22})$ associé à ce même bras (2), pivoté d'un angle $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_{22}) = (\vec{z}_1, \vec{z}_{22}) = -45°$ par rapport au repère R_{21}
- $R_3(E, \vec{x}_3, \vec{y}_{22,3}, \vec{z}_3)$ associé à la tourelle (3), en liaison pivot d'axe $(D, \vec{z}_{22,3})$ et de paramètre $\delta = (\vec{x}_{22}, \vec{x}_3) = (\vec{y}_{22}, \vec{y}_3)$ avec le bras (2)
- $R_4(E, \vec{x}_{3,4}, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ associé au bras (4) sur lequel sont fixés les sièges, en liaison pivot d'axe $(E, \vec{x}_{3,4})$ et de paramètre $\varphi = (\vec{y}_{22}, \vec{y}_4) = (\vec{z}_{22}, \vec{z}_4)$ avec la tourelle (3)

Le paramètre de translation de la tige est noté λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda.\overrightarrow{x_5}$.

On donne également les seules distances utiles dans la suite de ce DM:

a=4m, b=3m

4 - *Résolution*

Pour étudier le système et répondre à l'exigence du système, il faut écrire une relation vectorielle (dite de « fermeture géométrique ») qui consiste simplement en l'écriture de :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MO} = \vec{0}$$

Ce qui donne

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FM} \quad (1)$$

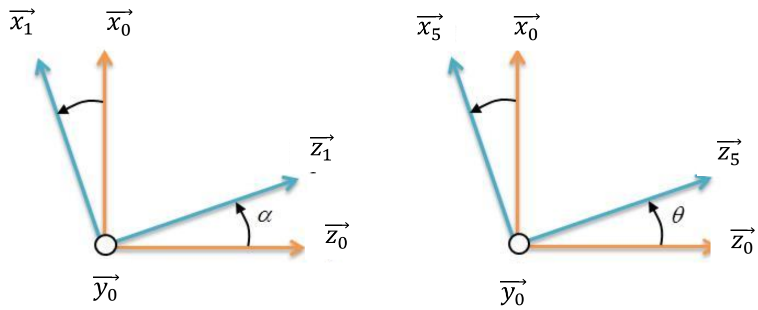
Question 3: *Ecrire cette équation (1) sous forme vectorielle (relation dite de Chasles) en fonction de a, b, c, d, e, f, h et λ.*

Il faudrait alors projeter cette expression sur les axes $\overrightarrow{x_0}$et $\overrightarrow{z_0}$ pour pouvoir définir la position du point M dans le référentiel lié au sol et voir dans quelles configurations géométriques des différents axes il faudrait se placer pour obtenir la hauteur maximale du passager (point M). Ce calcul nécessiterait alors la définition exacte des figures planes de calculs ainsi qu'une étude fine de la position accessible par le point B *via* le vérin (ensemble noté (5) + (6)).

Dans ce qui suit, on va limiter notre étude à l'obtention de la position maximale atteignable par le point B.
Pour cela, il sera nécessaire d'écrire une nouvelle fermeture géométrique :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}.$$

On donne également les figures de calcul justes utiles à cette étude.



Question 4: ***Écrire*** *cette deuxième équation sous forme vectorielle en fonction de a, b et λ.*

Question 5: ***Projeter*** *l'expression obtenue sur les axes $\overrightarrow{x_0}$et $\overrightarrow{z_0}$. Pour cela,* ***exprimer*** *d'abord $\overrightarrow{x_1}$et $\overrightarrow{x_5}$dans le repère Ro.*

Question 6: ***Vérifier*** *que l'on obtient alors le système des deux équations suivantes :*

$$\begin{cases} a + \lambda \cos\theta - b\cos\alpha = 0 \\ \lambda \sin\theta - b \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Question 7: *En* ***déduire*** *une relation entre α et λ, ne faisant pas intervenir θ. On se rappellera pour cela de la méthode classique faisant intervenir la relation de trigonométrie suivante : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.*

Question 8: ***Vérifier*** *que l'on obtient alors : $\lambda = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos\alpha}$*

Question 9: *Sachant que la course du vérin $\lambda \in [2.5,4]$* ***montrer*** *que les minima et maxima de α sont : 38.6° et 68°.*

Question 10: *En* ***déduire*** *la position maximale atteignable par le point B (projection de $\overrightarrow{OB}$sur $\overrightarrow{y_0}$).* ***Vérifier*** *que cette hauteur est de 2.78 m.*

Une étude complémentaire non demandée ici permettrait de montrer que dans ces conditions, avec la géométrie du reste du manège, l'exigence de hauteur maximum est validée.

<u>Question 11:</u> ***Réaliser*** *les deux figures géométrales de changements de base manquantes.*

<u>Question 12:</u> *A partir de la définition des paramètres de position,* ***Donner*** *les vecteurs vitesse de rotation* $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$, $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$, $\overrightarrow{\Omega_{4/2}}$

<u>Question 13:</u> *A partir du vecteur position de M par rapport à 0, déterminé à la question 3,* ***Déterminer*** *ses coordonnées dans R0, ensuite* ***Déterminer*** *le vecteur vitesse du point M par rapport à 0 :* $\overrightarrow{V_{M\in 4/0}}$

<u>Question 14:</u> ***Déterminer*** *le vecteur accélération du point M par rapport à 0 :* $\overrightarrow{\Gamma_{M\in 4/0}}$

<u>Question 15:</u> *Si on considère le mouvement du manège où α reste constant et égal à 68°, λ=4m, β reste constant et égal à -45°, c=7.5m, d=4.5m, e=1.5m, f=3m, h=1m et seul le moteur 2 tourne avec une vitesse angulaire ($\dot{\gamma}$) de 100tr/min,* ***Réaliser*** *les applications numériques des 2 questions précédentes et* ***Conclure.***