CPGE PCSI 1ère Année

SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGENIEUR

Cours C07_ MODÉLISER LE COMPORTEMENT STATIQUE DES TRANSMETTEURS

Transmission de Puissance

C07

2019-2020

Lycée René Cassin

Objectifs

Déterminer les lois entrée-sortie en effort des transmetteurs, dans le domaine de validité de la statique, pour caractériser le comportement des composantes des chaines d'énergie d'un système

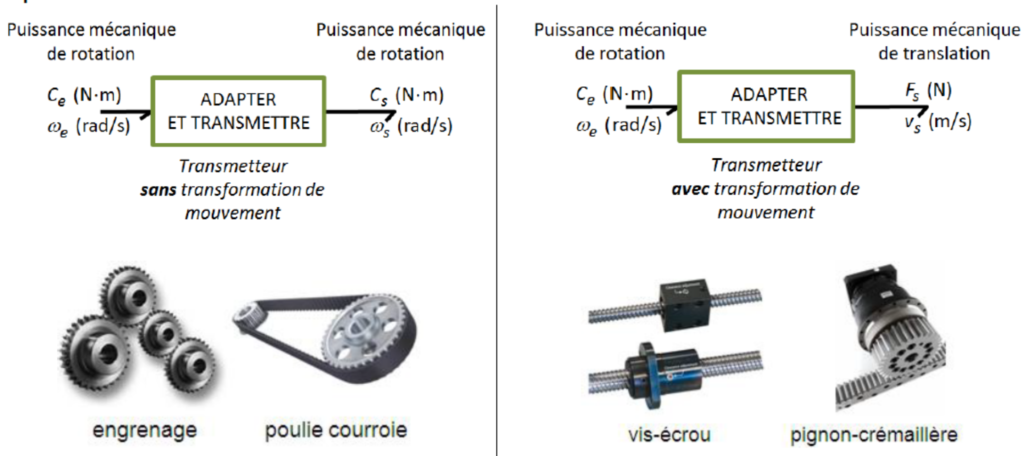
Table des matières

Objectif

Caractériser en effort, lorsque les hypothèses de la statique sont valables (équilibre, régime permanent, quasi-statique), les transmetteurs à partir de la loi entrée-sortie cinématique.

Une **loi entrée-sortie en effort caractérise le comportement en effort** du **composant de la chaîne d'énergie**. Elle en est le **modèle en effort.**
Lorsque les **variations d'énergie mécanique sont négligeables**, la loi entrée-sortie en effort caractérise le **comportement statique** du composant.

Exemple :

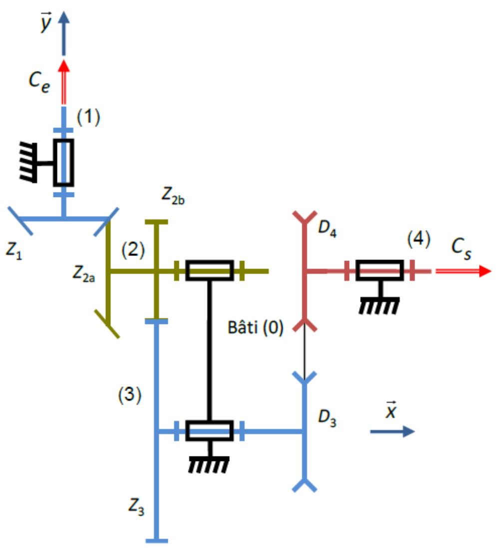


Et aussi : pignon-chaîne, roue et vis sans fin…

Relation recherchée : $C_s = f(C_e)$ ou $F_s = f(C_e)$

Pour chaque transmetteur, on distingue, un **ensemble d'entrée (e)** et un **ensemble de sortie (s)**.
L'action d'entrée est une composante de l'action mécanique du **système précédent sur (e)**.
L'action de sortie est une composante de l'action mécanique de **(s) sur le système suivant**.
Les grandeurs cinématiques sont les vitesses des ensembles **d'entrée** et de **sortie** par rapport au **bâti du transmetteur**.

Exemple d'un réducteur :



Entrée (e)=(1)
Sortie (s) =(4)

$C_e = \vec{C}_{ext\rightarrow 1} \cdot \vec{y}$ et $\omega_e = \vec{\Omega}_{1/0} \cdot \vec{y}$

$C_s = \vec{C}_{4\rightarrow ext} \cdot \vec{x}$ et $\omega_s = \vec{\Omega}_{4/0} \cdot \vec{x}$

Quelle est la relation entre C_e et C_s ?

(1) Ce théorème et l'expression des différents termes seront détaillés en deuxième année.

II Théorème de l'Énergie Cinétique (TEC) et hypothèses

II.1 TEC et hypothèses pour un modèle sans pertes

Le théorème de l'énergie cinétique(1) peut s'énoncer ainsi :
il existe un référentiel Galiléen (R_0,t) tel que, pour tout système matériel (Σ), à tout instant *t* :

$$\frac{dE_{c,\Sigma}}{dt} = \sum P_{ext \to i/0} + \sum P_{int}$$

avec $E_{c,\Sigma}$ l'énergie cinétique du système,

$P_{ext \to i/0}$ puissance associée à une action extérieure,

P_{int} puissance associée à une action intérieure.

Ce théorème est appliqué à l'ensemble des éléments mobiles du transmetteur par rapport à son bâti, avec les hypothèses suivantes :

Hypothèses :

- le bâti du transmetteur peut être associé à un référentiel Galiléen
- le système fonctionne **en régime permanent** ou en **quasi-statique** :

$$\frac{dE_{c,\Sigma}}{dt} = 0$$

- s'il n'y a **pas de pertes**, il n'y a **pas de puissance dissipée** au sein du composant (liaisons parfaites, pas de frottement, ni d'amortisseur…) : $\sum P_{int} = 0$
- les seules actions extérieures sont les actions d'entrée et de sortie :

$$\sum P_{ext \to i/0} = \underbrace{P_{ext \to e/0}}_{P_e} + \underbrace{P_{ext \to s/0}}_{-P_s} = P_e - P_s$$

Sous ces hypothèses, si les pertes sont négligées, le théorème de l'énergie cinétique donne : $P_s = P_e$

II.2 Calcul des puissances extérieures

Puissance mécanique de rotation

Si $\{T_{ext \to e}\} = {}_{*}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_e\,\vec{u} \end{Bmatrix}$ et $\{V_{e/0}\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \omega_e\,\vec{u} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ alors $P_e = C_e\,\omega_e$

Si $\{T_{s \to ext}\} = {}_{*}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_s\,\vec{v} \end{Bmatrix}$ et $\{V_{s/0}\} = {}_{B}\begin{Bmatrix} \omega_s\,\vec{v} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ alors $P_s = C_s\,\omega_s$

En supposant que le **moment** est **colinéaire** au **vecteur rotation** :

Puissance mécanique de translation

En supposant que la **résultante** est **colinéaire** au **vecteur vitesse** :

Si $\{T_{ext \to e}\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} F_e\,\vec{u} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ et $\{V_{e/0}\} = {}_{*}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v_e\,\vec{u} \end{Bmatrix}$ alors $P_e = F_e\,v_e$

Si $\{T_{s \to ext}\} = {}_{B}\begin{Bmatrix} F_s\,\vec{v} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ et $\{V_{s/0}\} = {}_{*}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v_s\,\vec{v} \end{Bmatrix}$ alors $P_s = F_s\,v_s$

III Exemples de résultats pour un modèle sans pertes

III.1 Pour un réducteur

En régime permanent ou en quasi-statique, en ne considérant que les actions d'entrée et de sortie d'un réducteur, le TEC donne :

$$C_e\omega_e = C_s\,\omega_s$$

Si la loi entrée-sortie cinématique s'écrit, $\omega_s = i\omega_e$ (i <1, l'égalité des puissances donne :)

$$C_e\omega_e = C_s\,\omega_s \Rightarrow C_e\omega_e = C_s\,i\omega_e \Rightarrow C_e = i\,C_s$$

Avec les hypothèses précédentes, si $\omega_s/\omega_e = i$ alors $C_s/C_e = 1/i$

Cette relation est aussi supposée valable à l'équilibre(1).

(1) sous l'hypothèse que le modèle utilisé reste pertinent à l'équilibre. Il faut, en particulier, que les frottements « secs » soient négligeables dans les phénomènes étudiés. Ces frottements seront modélisés en fin de 1ère année.

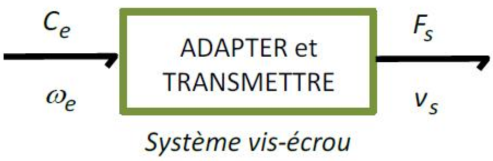
Application : soit un réducteur de rapport de transmission 0,25. Le couple de sortie est 10 Nm.
A1 - Que vaut le couple d'entrée à l'équilibre ?

En ne considérant que les actions d'entrée et de sortie, à l'équilibre, $C_e = 0{,}25 * C_s$
D'où : $C_e = 2{,}5$Nm.

Application : soit un multiplicateur de rapport de transmission 5. Le couple de sortie est 3 Nm.
A2 - Que vaut le couple d'entrée à l'équilibre ?

En ne considérant que les actions d'entrée et de sortie, à l'équilibre, $C_e = 5 * C_s$
D'où : $C_e = 15$Nm.

III.2 Pour un système vis-écrou

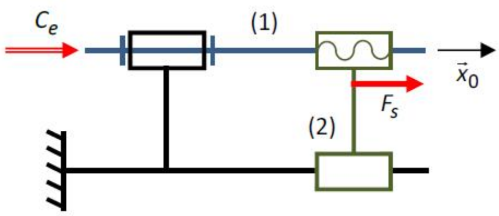


Avec :

- entrée (e)=(1)
- sortie (s) =(2)

$C_e = \vec{C}_{ext\to 1}\cdot\vec{x}_0$ et $\omega_e = \vec{\Omega}_{1/0}\cdot\vec{x}_0$

$F_s = \vec{F}_{2\to ext}\cdot\vec{x}_0$ et $v_s = \vec{V}_{2/0}\cdot\vec{x}_0$



En régime permanent ou en quasi-statique, en ne considérant que les actions d'entrée et de sortie, le TEC donne

$$F_s v_s = C_e\omega_e$$

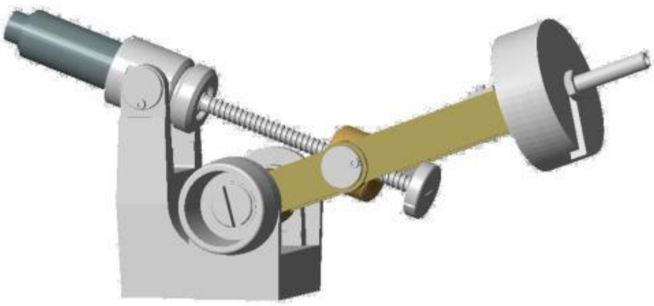
La loi entrée-sortie cinématique s'écrit : $v_s = \pm\frac{p}{2\pi}\omega_e$ (- pour un pas à droite).

$$\text{d'où } F_s v_s = F_s\,\frac{\pm p}{2\pi}\,\omega_e = C_e\omega_e \Rightarrow F_s = \pm\frac{2\pi}{p}C_e$$

Pour un système vis-écrou, si $v_s = \pm\frac{p}{2\pi}\omega_e$ alors $F_s = \pm\frac{2\pi}{p}C_e$.
Cette relation est aussi supposée valable à l'équilibre(2).

(2) sous l'hypothèse que le modèle utilisé reste pertinent à l'équilibre. Un système vis-écrou à billes est généralement étudié ainsi. Si le système vis-écrou est à contact direct, l'hypothèse est nettement mois pertinente.

Application : le Maxpid est une maquette comprenant un axe asservi en rotation. Il comprend un système vis-écrou de pas p=4 mm/tr. La vis est entraînée par un moteur de constante de couple k_c =52,5 mN.m/A.
L'intensité maximale permanente d'alimentation du moteur est I_m =2,15 A.



A3 - Déterminer l'effort de poussé maximale F_{max} de l'écrou sur le bras en régime quasi-statique.

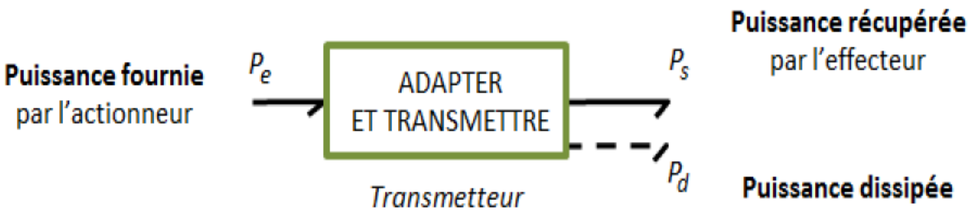
Le couple maximal en régime permanent fourni par le moteur est $C_{max} = k_c\, I_m$ = 0,11 N.m.
D'où, en ne considérant que les actions du couple moteur et de l'effort de poussée, en régime quasi-statique :
$F_{max} = 2\pi\, C_{max} / p = 2\pi / 0{,}004 * 0{,}11 \approx 172$ N

IV Prise en compte des pertes et rendement en quasi-statique ou régime permanent

En pratique, . $|Ps| \leq |Pe|$

En **régime permanent**, le **rendement** η (sans dimension avec $0< \eta \leq 1$), est tel que :
$\eta = Ps / Pe$.

Les **pertes**, puissances dissipées, sont $Pd = |Pe - Ps| = (1-\eta)\,|Pe|$ (en watt)



On admettra que le **rendement** caractérise aussi **les pertes** en **régime permanent** et en **quasi-statique**.
Remarque : les pertes correspondent à des puissances intérieures ou extérieures négatives.
Exemple pour un réducteur :
En **régime permanent**, en ne considérant que les actions d'entrée et de sortie **et le rendement**, le TEC donne :

$$C_e\omega_e = \eta\, C_s\, \omega_s$$

(1) Ce résultat prend en compte les pertes induites par les frottements (actions qui s'opposent au mouvement) lors du mouvement. Ces modèles ne sont généralement plus valables à l'équilibre.

La loi entrée-sortie cinématique s'écrit : $\omega_s = \iota\, \omega_e$

D'où $C_s(\iota\, \omega e) = \eta C_e\omega_e \Rightarrow C_s\, \iota = \eta C_e$.

Avec les hypothèses précédentes, pour un réducteur de rendement η, si $\omega_s / \omega_e = \iota$ alors $Cs = \frac{\eta}{i} Ce$
Ce résultat, obtenu en régime permanent, est aussi supposé valable en quasi-statique. Il ne sera pas utilisé lorsqu'il y a équilibre(1).

Application : le rendement du système vis-écrou est η = 0,9.
A4 - Déterminer le couple moteur permettant de maintenir un effort de 100 N en régime permanent.

En ne considérant que les actions du moteur et de poussée, en régime permanent : $Fs = \frac{2\pi}{p}\,\eta\, Ce$
Soit : $Ce = \frac{p}{2\pi\eta}\, Fs = \frac{0{,}004}{0{,}9*2\pi}\, 100 \simeq$ 0,071 Nm.

V Résultats fondamentaux

En plus de la démarche et des hypothèses, les résultats fondamentaux à retenir sont les suivants.

V.1 Transmetteurs élémentaires : expression directe

	Réducteur	**Multiplicateur**	**Système vis-écrou**	**Système pignon-crémaillère**
Caractéristiques	Rapport de transmission *i*	Rapport de transmission *i*	Pas *p* et sens (à droite, à gauche)	Rayon du pignon : $R=\frac{mZ}{2}$
Loi E/S en effort sans pertes à l'équilibre, en régime permanent en quasi-statique	$\boxed{C_s > C_e}$ $C_s = i\,C_e$ si $i>1$ $C_s=\frac{1}{i}C_e$ si $i<1$	$\boxed{C_s < C_e}$ $C_s=\frac{1}{i}C_e$ si $i>1$ $C_s = i\,C_e$ si $i<1$	$C_s=\mp\frac{p}{2\pi}F_e$ ou $F_s=\mp\frac{2\pi}{p}C_e$ **Utiliser l'homogénéité**	$C_s = R\,F_e$ ou $F_s=\frac{1}{R}C_e$ **Utiliser l'homogénéité**
Loi E/S en effort avec rendement en régime permanent en quasi-statique	Multiplier la grandeur **d'entrée par** le **rendement**. Ex : $C_e \rightarrow \eta\, C_e$			

V.2 Expression à partir de la relation cinématique

Pour un **transmetteur** de **rendement** η, en **régime permanent** ou **quasi-statique** :

Si $\frac{Grandeur\ cinématique\ sortie}{Grandeur\ cinématique\ entrée} = k$

alors(1) $\frac{Grandeur\ d'effort\ sortie}{Grandeur\ d'effort\ entrée} = \frac{\eta}{k}$

La **relation** d'E/S en effort est **signée** si la relation E/S **cinématique est signée**.

Vérifier que le **rendement réduit la grandeur d'effort de sortie**, à entrée donnée.

Si les pertes sont négligeables, η =1 et la relation d'E/S en effort est aussi supposée **valable à l'équilibre**.

(1) Ce résultat est valable pour des transmetteurs non linéaires. Dans ce cas k est une fonction des paramètres de position.

Exemple : le rendement de l'ensemble des transmetteurs est noté η. Déterminer la loi entrée-sortie en effort.

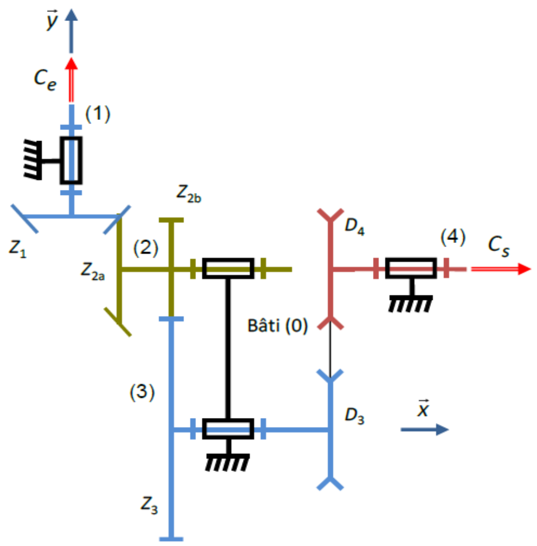
La loi entrée-sortie cinématique s'écrit :

$\frac{\omega_s}{\omega_e}=\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}=\frac{Z_1}{Z_{2a}}\frac{Z_{2b}}{Z_3}\frac{D_3}{D_4}=i$.

Relation signée avec la base définie sur le schéma.

D'où, en régime permanent ou en quasi-statique :

$\frac{C_s}{C_e}=\frac{\eta}{i}$.



Savoirs

Je connais :

- ☐ Les hypothèses permettant d'appliquer l'égalité des puissances d'entrée et de sortie
- ☐ La définition des puissances d'entrée et de sortie pour des puissances mécaniques de translation ou de rotation
- ☐ La définition du rendement et des pertes

Savoir-faire

Je sais :

- ☐ Déterminer directement la relation entrés-sortie en effort pour un réducteur de rapport donné et pour un système vis-écrou
- ☐ Déterminer une loi entrée-sortie en effort à partir de la loi entrée-sortie cinématique d'un ensemble de transmetteurs