CPGE PCSI 1ère Année

SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGENIEUR

# Cours C05 :
# Evaluer les performances et Modéliser en SLCI un SA

Asservissements : Performance

C05

2019-2020

Lycée René Cassin

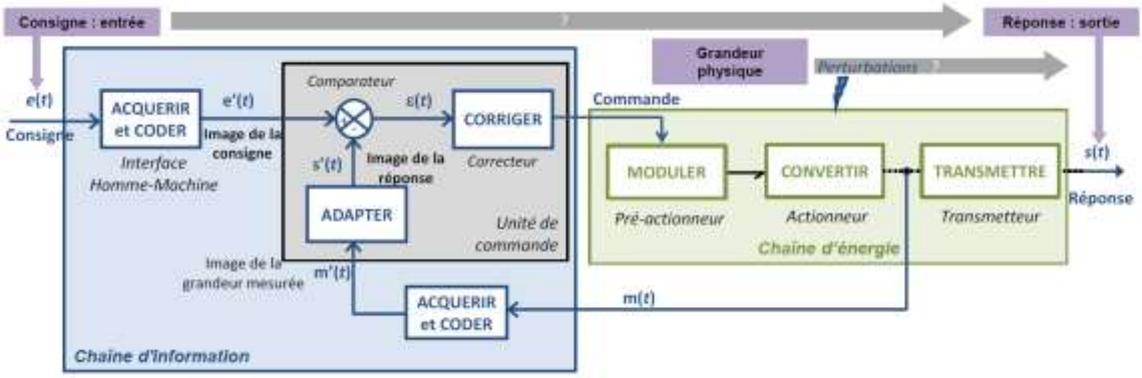
# Objectifs

Évaluer la précision d'un système asservi
Modéliser un système asservi par un schéma-bloc dans le domaine de Laplace
Déterminer la fonction de transfert globale afin de prévoir les performances du système
Déterminer la réponse d'un système soumis à une entrée et une perturbation

## Table des matières

# I Objectif

L'objectif est de modéliser en **SLCI** un système asservi afin d'en **prévoir les performances**. Il s'agit donc de trouver la fonction de transfert reliant la réponse à la consigne à partir des **modèles de connaissance** ou de **comportement** des **composants**.
Le modèle doit aussi permettre d'évaluer les **performances en régulation**, c'est-à-dire les performances du système vis-à-vis des **perturbations**.




# II Modéliser et prévoir les performances en suivi d'un système asservi

Les **performances en suivi** de l'asservissement sont les performances associées aux **variations de la consigne**.

Le modèle utilisé est celui des SLCI : modèle linéaire continu invariant. Il est représenté dans le domaine de Laplace par un schéma-bloc représentatif de la structure de l'asservissement et des équations régissant son comportement.
Nous ne considérons ici qu'une entrée : la consigne.

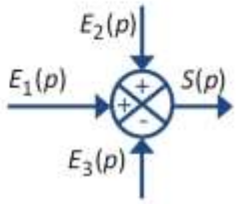
## II.1 Composants d'un schéma-bloc : bloc, sommateur et point de prélèvement

Les trois éléments de base d'un schéma-bloc sont :

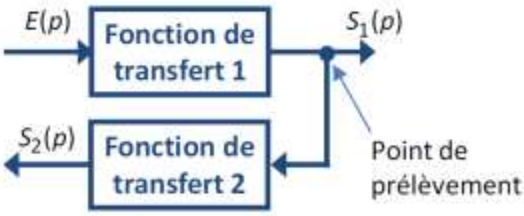
- le **bloc** qui représente, dans le **domaine de Laplace**, un **composant** du système ou une **équation mathématique** ;


Composant ou équation différentielle

- le **soustracteur** ou **sommateur** qui comporte plusieurs entrées mais une seule sortie ;




- le **point de prélèvement** qui prélève, sans la modifier, une grandeur en un point.

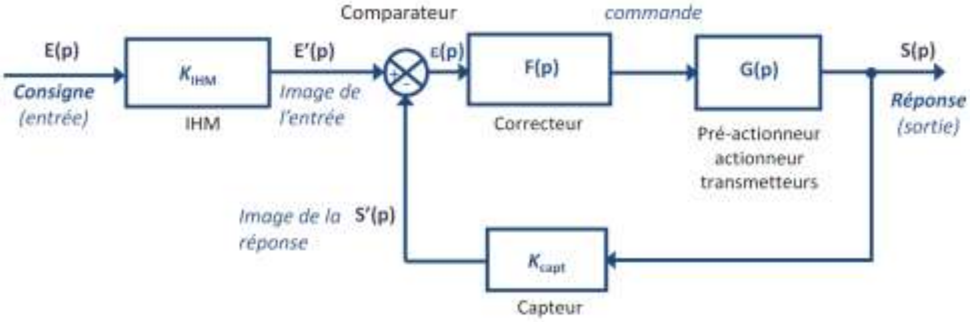


*(1) Un capteur peut aussi être modélisé par un filtre passe bas, c'est-à-dire un premier ordre. Cf. 2ème année.*

## II.2 Schéma-bloc générique d'un l'asservissement et relation entre IHM et capteur

### Schéma-bloc générique

La structure typique d'un schéma-bloc sans perturbation associé à un asservissement est la suivante :

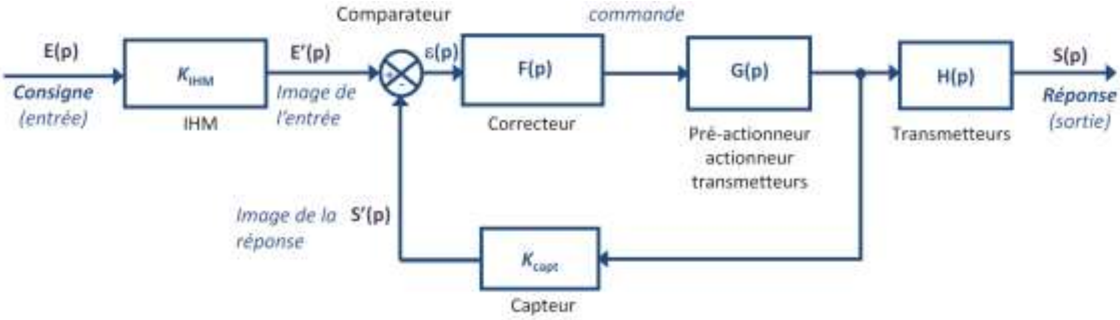



Les principaux composants de l'asservissement sont modélisés ainsi :
- **IHM** et **capteur**(1) par des **gains purs**, avec dans le cas ou le **capteur mesure directement la réponse** (cf. plus loin) afin que l'image de l'erreur soit nulle lorsque l'erreur est nulle : IHM capt KK () t
- le **comparateur** par un **soustracteur** ;
- le **correcteur** par une combinaison linéaire d'un **gain pur**, d'un **intégrateur** et d'un **dérivateur**
- le **pré-actionneur** par un gain-pur.

### Schéma-bloc avec mesure indirecte de la réponse et relation entre IHM et capteur

La fonction « ADAPTER » effectuée par l'unité de commande est **intégrée au gain du capteur ou de l'IHM** lorsque la mesure de la réponse est indirecte.

Le schéma, sans perturbation est typiquement le suivant :




*(2) En général il s'agit d'une tension (en V) proportionnelle à la grandeur imposée en consigne ou mesurée en sortie. Ce peut aussi être un nombre entier ou flottant, image de cette tension.*

L'image de l'erreur en sortie de comparateur est : $\varepsilon(p) = E'(p) - S'(p) = K_{IHM} \cdot E(p) - \dfrac{K_{capt}}{H(p)} \cdot S(p)$ .

Soit $\varepsilon(p) = \left( K_{IHM} - \dfrac{K_{capt}}{H(p)} \right) \cdot E(p)$ pour toutes valeur de $E(p)$ si $S(p) = E(p)$ . D'où : $K_{IHM} = \dfrac{K_{capt}}{H(p)}$ .

Pour que **l'image de l'erreur** $\varepsilon(p)$ **soit nulle lorsque l'erreur est nulle**, il est impératif que **les images**(2) **de la consigne et de la réponse soient proportionnelles**, respectivement, à la consigne et à la réponse, avec le **même coefficient de proportionnalité**.

On en déduit la relation : $K_{IHM} = \dfrac{K_{capt}}{H(p)}$

$H(p)$ est nécessairement un **gain pur** si l'IHM et le capteur sont aussi des **gains purs**.

## Exemples de composants usuels modélisés par un gain

| **Exemple de composant**<br>et exemple de caractéristiques | **Gain** $\xrightarrow{E(p)} \boxed{K} \xrightarrow{S(p)}$<br>exprimé en S.I. |
|---|---|
| **Capteur de position incrémental** :<br>2000 incréments par tours | $K=\dfrac{2000}{2\pi}=318{,}3$ inc/rad |
| **Capteur de vitesse** :<br>5 V pour 1000 tr/mn | $K=\dfrac{5}{1000\dfrac{2\pi}{60}}=47{,}75\cdot 10^{-3}$ V/(rad/s) |
| **Hacheur ou variateur :**<br>Entrée codée sur 10 bits entre -511 et 512 pour une tension de sortie $\pm 10$ V | $K=10/512=19{,}5\cdot 10^{-3}$ V/val<br>(val pour valeur) |
| **Amplificateur de courant :**<br>Entrée entre $\pm 10$ V et sortie entre $\pm 2$ A | $K=2/10=0{,}2$ A/V |
| **Réducteur :**<br>De rapport de transmission $i$ = 2 | $K=\dfrac{1}{i}$ (car i>1 ici) |
| **Système vis écrou de pas *p* :**<br>Entrés sur la vis, sortie sur l'écrou | $K=\dfrac{p}{2\pi}$ m/rad |

### Limites du modèle

**Pas de saturation** : si un amplificateur de courant est prévu pour fournir 2 A sous 10 V, le modèle permet aussi d'obtenir 20 A sous 100 V ou 200 A sous 1000 V. Il n'y a pas de saturation des valeurs d'entrée ou de sortie car il n'y a pas de limites aux valeurs des grandeurs temporelles.
**Modèle linaire** : en plus de la saturation, de nombreux composants ont un comportement intrinsèquement non linéaire, en particulier les transmetteurs. Dans ce cas, le modèle est linéarisé autour d'un point de fonctionnement et son domaine de validité est réduit.

### Relation accélération / vitesse / déplacement

Si x(t), v (t) et a(t) représentent respectivement la position, la vitesse et l'accélération d'un solide en translation, les grandeurs sont reliées par les relations $a(t)=\dfrac{dv(t)}{dt}$ et $v(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$.

D'où, dans le domaine de Laplace avec les conditions de Heaviside : A(p) = pV(p) et V (p) = p X(p).

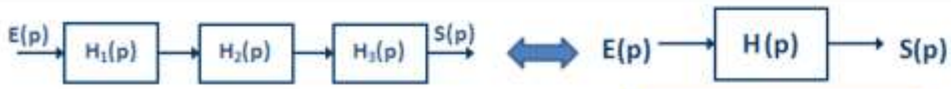
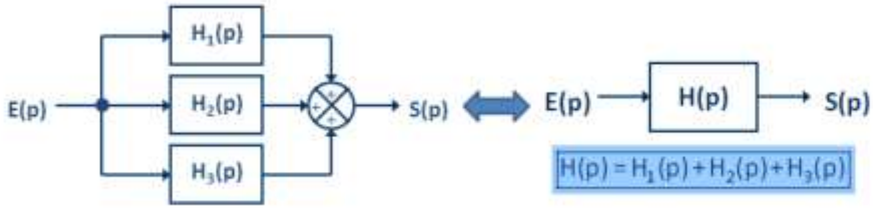
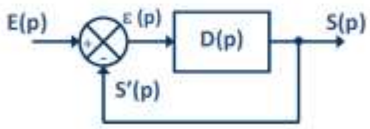
On passe de **l'accélération** $a(t)$ à la **position** $x(t)$ par intégration :

$$\underset{\text{Accélération}}{\xrightarrow{A(p)}} \boxed{1/p} \underset{\text{Vitesse}}{\xrightarrow{V(p)}} \boxed{1/p} \underset{\text{Position}}{\xrightarrow{X(p)}}$$

### Synthétiser le comportement

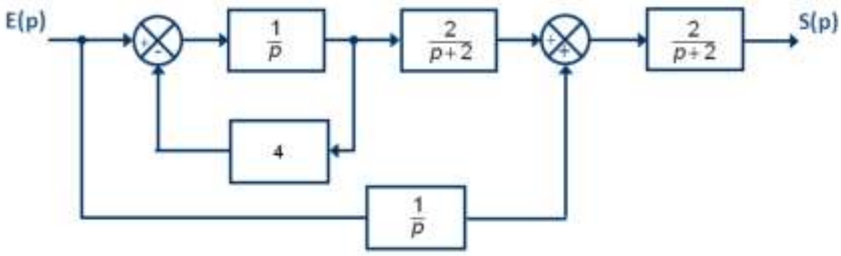
Le schéma bloc des systèmes asservis est une représentation qui se généralise à l'ensemble des SLCI.

> **Synthétiser le comportement d'un SLCI** consiste à déterminer, dans le **domaine de Laplace**, la fonction de transfert équivalente au schéma-bloc entre **la réponse** et **l'entrée** (ou les différentes entrées, consigne et perturbations pour un asservissement).

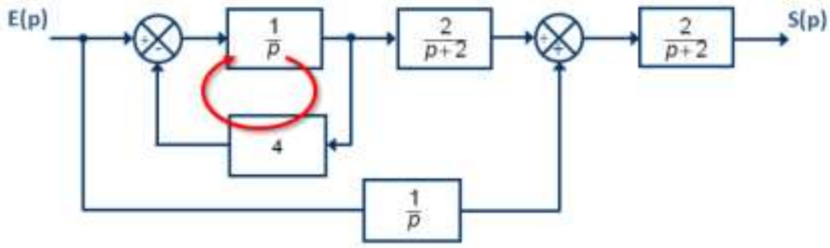
| | |
|---|---|
| **Blocs en série** | <br>$H(p) = H_1(p) \times H_2(p) \times H_3(p)$<br>La fonction de transfert équivalente de blocs en **série** est égale au **produit** des fonctions de transfert de chacun des blocs. |
| **Blocs en parallèle** | <br>$H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$<br>La fonction de transfert équivalente de blocs en **parallèle** est égale à la **somme** des fonctions de transfert de chacun des blocs. |
| **Boucle fermée** | <br>$D(p)$ : *FT de la chaine directe*<br>$R(p)$ : *FT de la chaine de retour*<br>$H(p) = \dfrac{D(p)}{1 + D(p)R(p)}$ |
| **Boucle fermée avec retour unitaire** | <br>Retour unitaire : $R(p) = 1$ |

Démonstration pour la boucle fermée :

**Exemple** : déterminer la fonction de transfert du système représenté par le schéma-bloc ci-dessous :



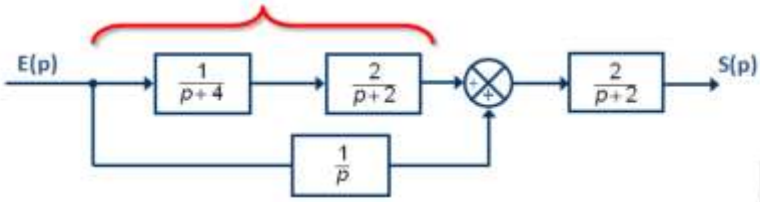
Q1 - Simplification 1 : boucle fermée



$$H_1(p) = \frac{1/p}{1 + 4/p} = \frac{1}{p+4}$$

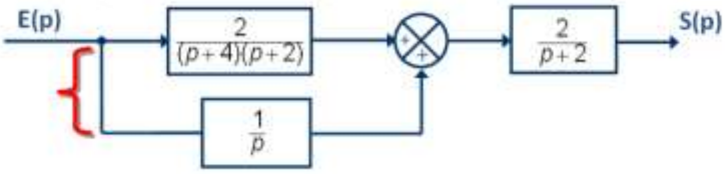
Simplification de la boucle interne et multiplication des numérateur et dénominateur par le **dénominateur du dénominateur**.

Q2 - Simplification 2 : blocs en série



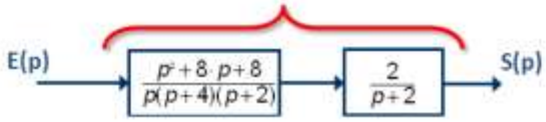

$$H_2(p)=\frac{1}{p+4}\times\frac{2}{p+2}=\frac{2}{(p+4)(p+2)}$$

Q3 - Simplification 3 : Blocs en parallèle




$$H_3(p)=\frac{2}{(p+4)(p+2)}+\frac{1}{p}=\frac{p^2+8\cdot p+8}{p(p+4)(p+2)}$$

Q4 - Simplification 4 : Blocs en série




$$H(p)=\frac{p^2+8\cdot p+8}{p(p+4)(p+2)}\times\frac{2}{(p+2)}=\boxed{\frac{2(p^2+8\cdot p+8)}{p(p+4)(p+2)^2}}$$

Q5 - Mettre sous forme canonique

Par développement et factorisation des termes de plus petits degrés : $H(p)=\frac{1}{p}\frac{1+p+\frac{p^2}{8}}{1+\frac{5}{4}p+\frac{1}{2}p^2+\frac{p^3}{16}}$

Classe 1, gain statique unitaire, 4ème ordre.

## Démarche de synthèse

**Démarche de synthèse** (si les boucles ne sont pas couplées).
Partir des boucles internes (et ne pas confondre les sommateurs utilisés dans une boucle fermée et ceux utilisés avec des blocs en parallèle) :

– **identifier** la **chaîne directe** et la **chaîne de retour** de la boucle interne et vérifier les signes du soustracteur (+ l'entrée – le retour) ;
– utiliser la formule sur les **boucles fermées** pour **poser** la fonction de transfert de la boucle ;
– **simplifier** sans développer ;
– **multiplier** dénominateur et numérateur **par le dénominateur du dénominateur**, sans développer ;
– **simplifier** sans développer ;

– recommencer afin d'obtenir la fonction de transfert du système complet ;

– **simplifier**, **développer** ;

– mettre sous **forme canonique**.

## II.4 Performance de précision en suivi d'un système asservi et stable

À partir de la fonction de transfert reliant la réponse à la consigne, on obtient les résultats suivants.

### Erreur de suivi d'un modèle stable pour une entrée en échelon (erreur de position)

On suppose le modèle stable, donc de classe 0.

Dans les **conditions de Heaviside** et pour un système **stable**, l'erreur en régime permanent et l'erreur statique sont équivalentes.

Pour une consigne en échelon d'amplitude $E_0$, le théorème de la valeur finale donne comme variation finale $\Delta s(+\infty) = K E_0$.

Comme $\Delta e(+\infty) = E_0$, l'erreur statique s'écrit : $e_r(+\infty) = \Delta s(+\infty) - \Delta e(+\infty) = E_0(1-K)$.

Un système **asservi stable** est parfaitement **précis en suivi** si et seulement si $\boldsymbol{K = 1}$ (sans unité).

sinon, l'**erreur statique** vaut : $e_r(+\infty) = E_0(1-K)$

et l'erreur statique relative : $e_{r\%}(+\infty) = 1-K$

### Erreur de suivi d'un modèle stable pour une entrée en rampe (erreur de poursuite)

***(1) On retrouve dans le domaine de Laplace la relation d'intégration entre l'échelon et la rampe.***

L'erreur de **poursuite** est déterminée pour une entrée en **rampe** (ici de pente $V_0$) par le **théorème de la valeur finale**, avec $E(p) = \dfrac{V_0}{p^2}$ :

$$\begin{aligned} e_r(+\infty) &= \lim_{t \to +\infty} \left(e(t) - s(t)\right) \\ &= \lim_{p \to 0^+} pE(p)\left(1 - H(p)\right) \end{aligned}$$

# III Modéliser et prévoir les performances en suivi et régulation d'un système asservi

## III.1 Performances en régulation

Dans un système asservi, on appelle perturbation une grandeur qui vient modifier le comportement du système.

Les **performances en régulation** d'un asservissement sont évaluées pour une **consigne constante**. Elles caractérisent l'évolution de la réponse liée aux variations des grandeurs physiques associées aux **perturbations**.

Les **perturbations** sont modélisées par des **entrées** distinctes de la consigne.

Considérons une perturbation en échelon d'amplitude $P_0$.

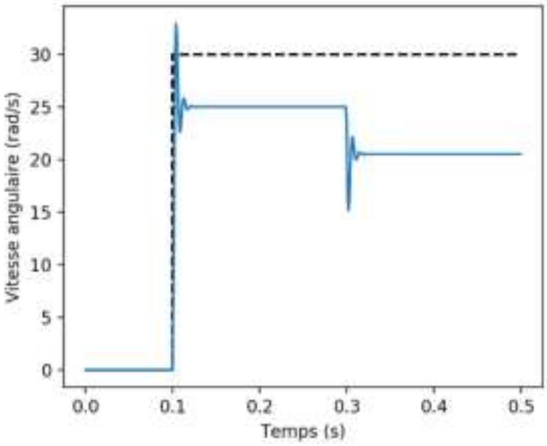
Notons $\Delta s(+\infty)$ la variation finale induite par la perturbation.

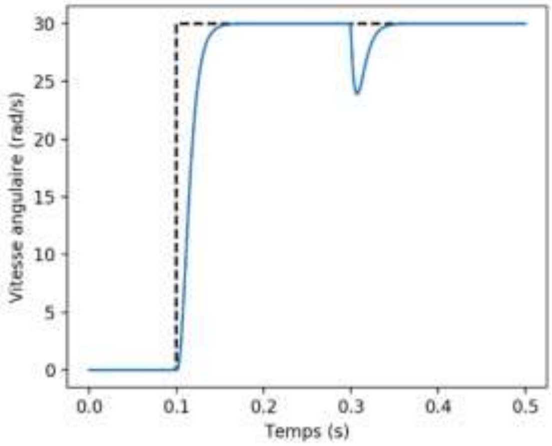
- si $\Delta s(+\infty) = 0$, le système est **insensible à la perturbation**,
- sinon, le système est **sensible à la perturbation** et $\dfrac{\Delta s(+\infty)}{P_0}$ caractérise la sensibilité à la perturbation.

**Exemple** : les résultats ci-dessous représentent l'évolution de la vitesse angulaire d'un moteur asservi en vitesse. L'échelon de consigne est de 30 rad/s et débute à 0,1 s. L'échelon de perturbation, un couple résistant, débute à 0,3 s.

Sur la courbe de gauche, la perturbation induit une modification de la valeur finale. Le système est sensible à la perturbation. Sur la courbe de droite, la perturbation n'induit pas de modification de la valeur finale. Le système est insensible à la perturbation.

Les différences de comportement en régulation (mais aussi en suivi) sont liées à l'utilisation de correcteurs différents (à action proportionnel à gauche, à action intégrale à droite).



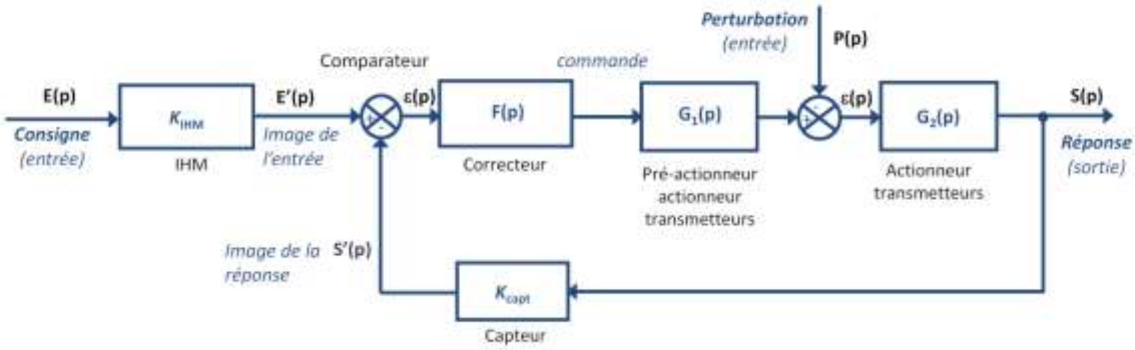




Comme toute réponse, il est aussi possible de définir des performances de **stabilité en régulation** (existence de la valeur finale, dépassements, dépassements relatifs) et de **rapidité en régulation** (temps de réponse à 5%).

## III.2 Schéma-bloc générique d'un système asservi avec perturbation

### Principe

Dans un modèle SLCI, la **perturbation** est une **entrée** qui vient modifier la chaîne directe au travers d'un **sommateur**.

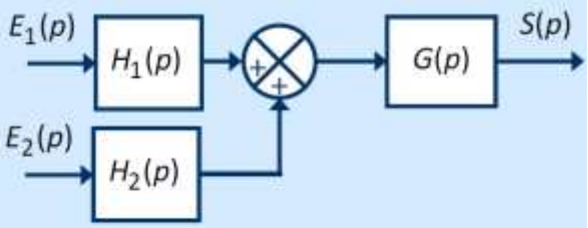


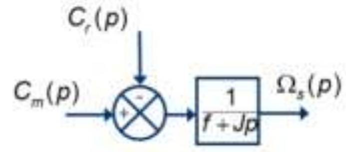
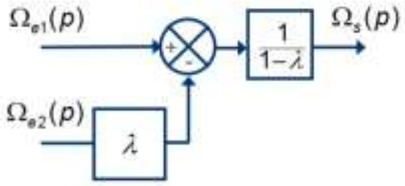

### Exemples d'équations à plusieurs entrées

Lorsque l'équation comprend **plusieurs entrées**, le **schéma-bloc** est construit à partir de l'équation, dans le domaine de Laplace, donnant **la sortie en fonction des entrées**, sans développer.

Si $E_2(p)$ et $E_1(p)$ sont les entrées, S(p) la sortie, on obtient généralement une équation, dans le domaine de Laplace, de la forme : $S(p) = G(p)[H_1(p)E_1(p) + H_2(p)E_2(p)]$. Noter la fonction de transfert G(p) en facteur. Le schéma-bloc est alors le suivant :

$$S(p)=G(p)\left[H_1(p)E_1(p)+H_2(p)E_2(p)\right] \Longleftrightarrow$$



| **Exemple d'équation à modéliser** | Dynamique de l'axe d'un moteur $c_r(t)$ est considéré comme une perturbation. $f$ est un coefficient de frottement visqueux. | Fonctionnement d'un réducteur à train d'engrenage épicycloïdal |
|---|---|---|
| **Équation temporelle** | $c_m(t) - c_r(t) - f\,\omega(t) = J\dfrac{d\omega(t)}{dt}$ | $\omega_{e1}(t) - \lambda\,\omega_{e2}(t) + (\lambda - 1)\,\omega_s(t) = 0$ |
| **Sortie** | $\omega(t)$ | $\omega_s(t)$ |
| **Transformée en Laplace** | $C_m(p) - C_r(p) - f\,\Omega(p) = Jp\,\Omega(p)$ soit $\Omega(p) = \dfrac{1}{f + Jp}\left[C_m(p) - C_r(p)\right]$ | $\Omega_{e1}(p) - \lambda\,\Omega_{e2}(p) + (\lambda - 1)\,\Omega_s(p) = 0$ soit $\Omega_s(p) = \dfrac{1}{1-\lambda}\left[\Omega_{e1}(p) - \lambda\,\Omega_{e2}(p)\right]$ |
| **Schéma-bloc** |   |   |

## III.3 Synthèse d'un système à plusieurs entrées : théorème de superposition

### Théorème de superposition

*Attention :*

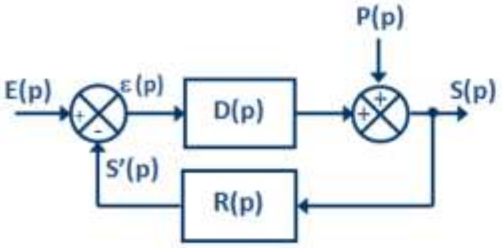
*-bien vérifier les signes dans le comparateur ;*

*- ne pas confondre avec le cas des blocs en parallèle !*

Considérons un système à 2 entrées, $E(p)$ et $P(p)$.

$H_1(p) = \left.\dfrac{S(p)}{E(p)}\right|_{P(p)=0}$ (calculée avec $P(p) = 0$)

$H_2(p) = \left.\dfrac{S(p)}{P(p)}\right|_{E(p)=0}$ (calculée avec $E(p) = 0$)




$$\boxed{S(p) = H_1(p)\,E(p) + H_2(p)\,P(p)}$$

La sortie du système est obtenue en **additionnant** les **réponses à chaque entrée**.

Si $E(p)$ est une **consigne** et $P(p)$ une **perturbation**,

- $\left.\dfrac{S(p)}{E(p)}\right|_{P(p)=0}$ caractérise le **comportement en suivi** ;
- $\left.\dfrac{S(p)}{P(p)}\right|_{E(p)=0}$ caractérise le **comportement en régulation**.

Le « théorème » de superposition est une conséquence directe de la linéarité des équations : la réponse à plusieurs entrées est la somme des réponses à chaque entrée.

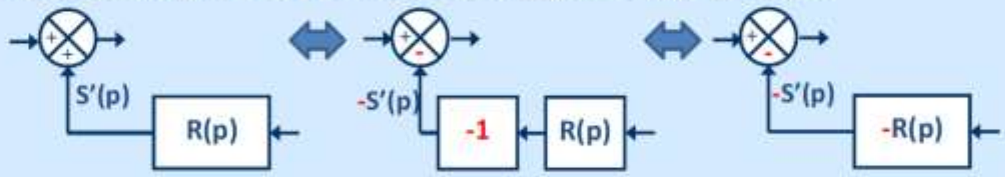
**Faire attention aux signes des comparateurs (sommateur ou soustracteur) et adapter les règles vues précédemment !**

### Modification des signes du sommateur

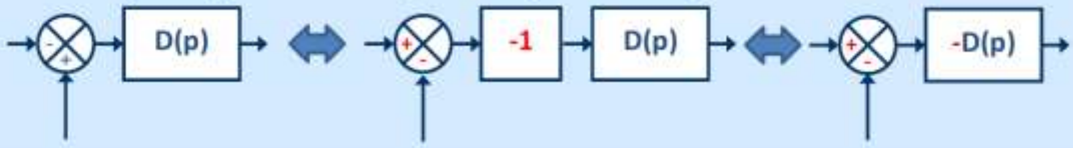
Afin d'appliquer directement la relation des boucles fermées, il peut être nécessaire de modifier les signes dans les sommateurs.

**Modification des signes d'un sommateur :**

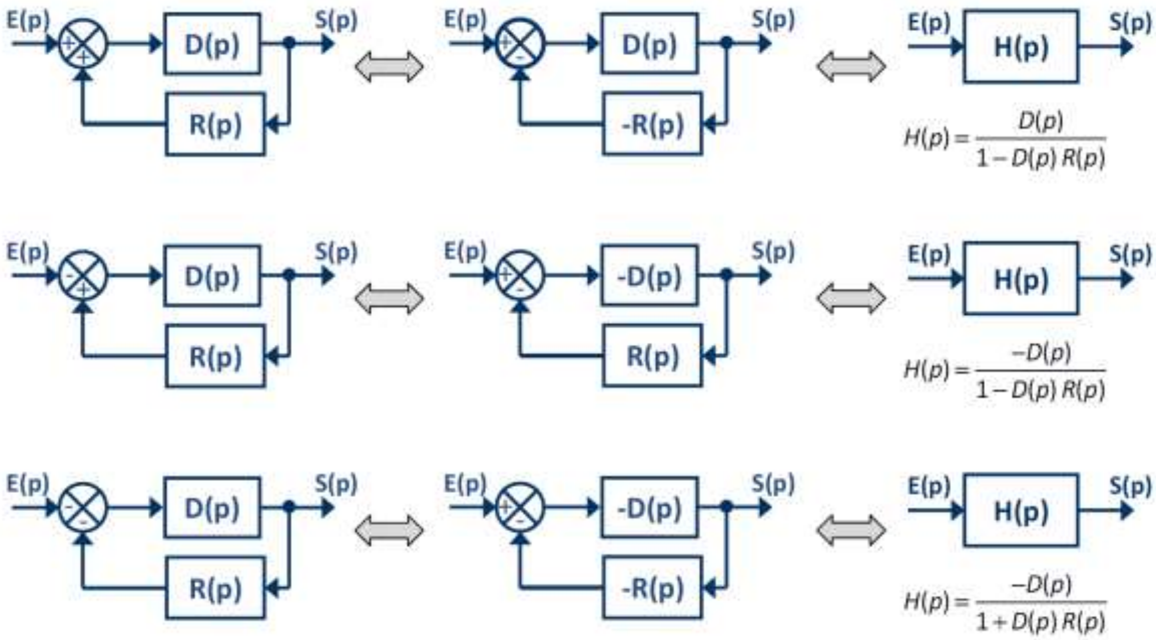
– en **multipliant par -1 une branche entrante**, on change **un signe** :




– en **multipliant par -1 la sortie**, on change **tous les signes** :




**Exemples** pour la fonction de transfert en boucle fermée :




$$H(p)=\frac{D(p)}{1-D(p)\,R(p)}$$

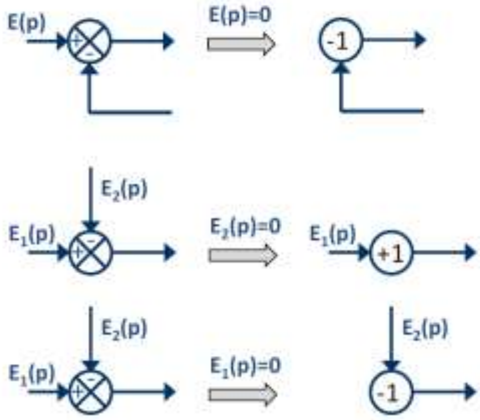
$$H(p)=\frac{-D(p)}{1-D(p)\,R(p)}$$

$$H(p)=\frac{-D(p)}{1+D(p)\,R(p)}$$

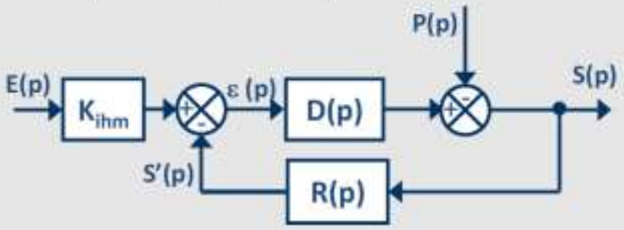
## Sommateur avec une entrée nulle

Si un sommateur à **2 entrées** possède **une entrée nulle**, il peut être remplacé par un **gain unitaire de signe** correspondant à **l'entrée restante**.

## Exemples :

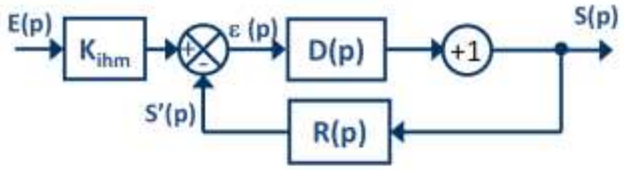


**Application 1** : déterminer la réponse du système représenté par le schéma-bloc ci-dessous.




1^er cas : P(p)=0

Le schéma-bloc devient :



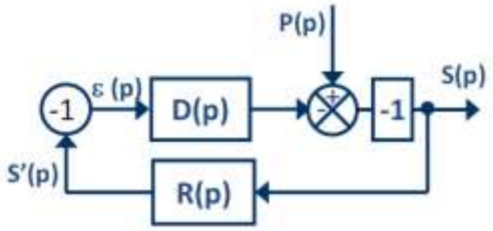

Donc $\left.\dfrac{S(p)}{E(p)}\right|_{P(p)=0} = K_{ihm}\dfrac{D(p)}{1+D(p)R(p)}$

2^ème cas : E(p)=0

Le schéma-bloc devient :

La chaîne directe est : -1

La chaîne de retour est : $-D(p)\,R(p)$




Donc $\left.\dfrac{S(p)}{P(p)}\right|_{E(p)=0} = \dfrac{-1}{1+R(p)\,D(p)}$

Le théorème de superposition donne : $S(p)=\dfrac{K_{ihm}\,D(p)}{1+D(p)\,R(p)}E(p)-\dfrac{1}{1+D(p)R(p)}P(p)$

Les résultats sur la stabilité et les valeurs finales (cas des classes 0 et théorème de la valeur finale) s'appliquent aux différentes fonctions de transferts et à la réponse $S(p)$ .

# ANNEXES

## Savoirs

**Je connais :**

- ☐ les règles d'association et de simplification des schémas-blocs
- ☐ la relation entre le gain de l'IHM, du capteur et des gains entre le point de prélèvement et la réponse
- ☐ les conditions pour qu'un système de classe 0 soit précis
- ☐ la transformée d'un échelon et d'une rampe
- ☐ le théorème de superposition

## Savoir-faire

**Je sais :**

- ☐ déterminer le gain d'une IHM en fonction de celui du capteur
- ☐ représenter la structure d'un SLCI asservi à l'aide d'un schéma-bloc
- ☐ déterminer les fonctions de transfert d'un SLCI pour les différentes entrées (consigne et perturbation)
- ☐ prévoir la valeur finale et l'erreur de position et l'erreur de poursuite à partir du théorème de la valeur finale