CPGE PCSI 1ère Année

SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGENIEUR

Cours C04 : Modéliser en SLCI et identifier un modèle de comportement

Asservissements : Automatique linéaire

C04

2019-2020

Lycée René Cassin

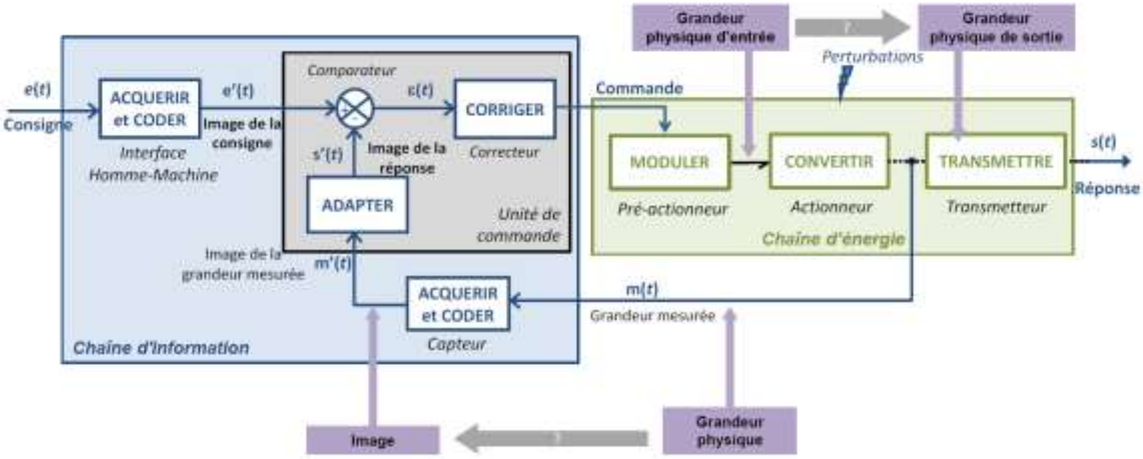
Objectifs

Modéliser un système par une fonction de transfert dans le domaine de Laplace
Prévoir les performances des SLCI usuels à partir de leur fonction de transfert
Identifier un modèle de comportement à partir de relevés expérimentaux ou de simulation

Table des matières

I Objectif

L'objectif est de **modéliser un composant ou un système**, caractérisé par un ensemble de grandeurs scalaires, à partir de **l'analyse de la réponse** à une entrée test. Cette réponse est obtenue **expérimentalement** ou par **simulation numérique**.
Le modèle ainsi obtenu est appelé **modèle de comportement**. Il est représenté par **une fonction de transfert**, caractéristique des équations différentielles régissant le comportement du composant ou du système. Cette fonction de transfert permet aussi de prévoir les performances.
Les outils mis en place sont adaptés à la modélisation des composants des chaînes d'énergie et d'information ainsi qu'aux différents domaines de la physique (mécanique avec prise en compte des inerties, thermique, hydraulique, électrique…).



II Modéliser en SLCI : Système Linéaire Continu Invariant

Pour prédire les performances d'un système par simulation, il faut pouvoir modéliser mathématiquement son comportement. Le modèle utilisé est dit SLCI[1].

(1) C'est une différence importante avec la modélisation par chaîne fonctionnelle et les liens de puissance formés par deux grandeurs (flux et effort).

II.1 Grandeurs temporelles, paramètres, entrées et sortie

Dans le système et les modèles étudiés, on distingue :

- des **grandeurs temporelles, scalaires, qui dépendent du temps** : température, position, vitesse, tension, intensité…. Elles correspondent à des grandeurs échangées dans un IBD ou une chaîne fonctionnelle ;
- des **paramètres**, physiques ou non, scalaires : dimensions, résistance et inductance électrique, masse… Ces paramètres sont **caractéristiques du système** étudié.

On distingue aussi, parmi les grandeurs temporelles, une ou plusieurs **entrées** et une **sortie**.

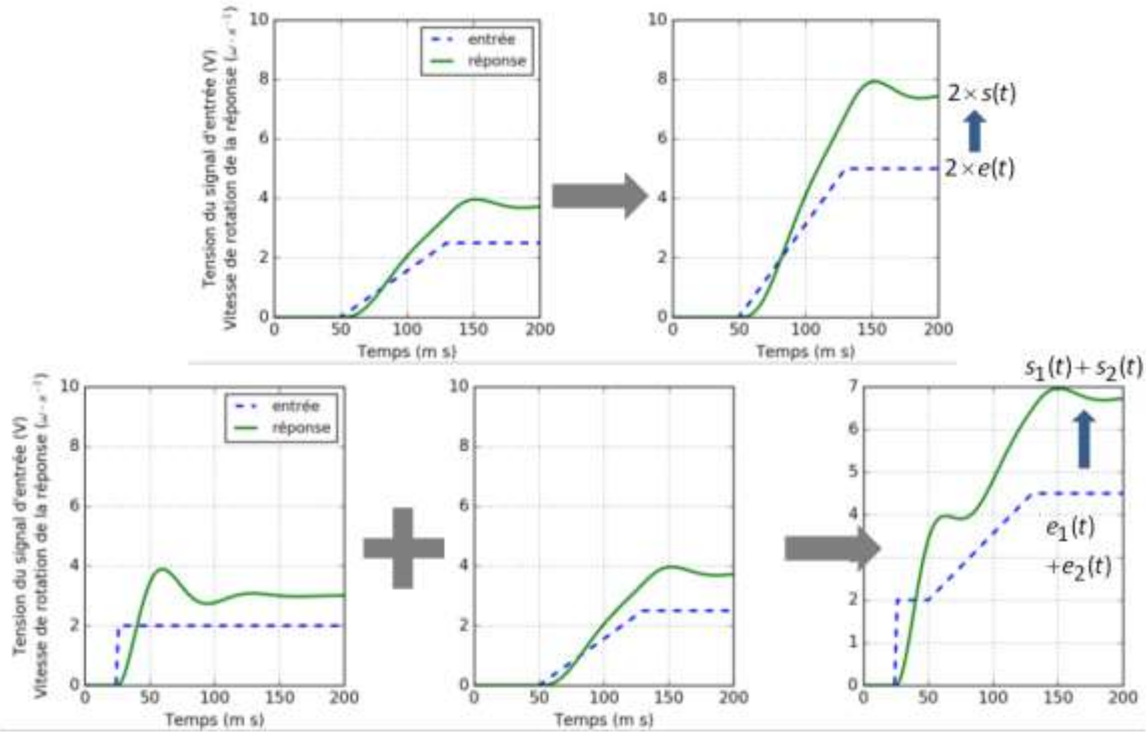
Exemple : pour un moteur électrique, les paramètres sont généralement la résistance électrique et l'inductance du bobinage, l'inertie des pièces en mouvement…
Les grandeurs temporelles sont la tension d'alimentation aux bornes du moteur, l'intensité du courant, le couple (effort tournant) fournit par le moteur, le couple résistant s'opposant au mouvement…
Les entrées sont généralement la tension d'alimentation et le couple résistant ; la sortie la vitesse angulaire.

II.2 Comportement linéaire

On appelle **réponse**, l'évolution temporelle de la grandeur de sortie pour des fonctions d'entrée (signaux) données.

Lorsque le **comportement est linéaire**, la **réponse dépend linéairement** des signaux d'entrée.
Conséquence pour la réponse à 1 entrée :
- si $s_1(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_1(t)$
- si $s_2(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_2(t)$

alors, pour un signal d'entrée $e(t)=e_1(t)+k\ e_2(t)$, la réponse est $s(t)=s_1(t)+k\ s_2(t)$



Conséquence pour la réponse à 2 entrées :
- si $s_1(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_1(t)$ sur l'entrée e_1
- si $s_2(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_2(t)$ sur l'entrée e_2

alors, si les signaux sont appliqués simultanément aux deux entrées, la réponse est la réponse est $s(t)= s_1(t)+k\ s_2(t)$

II.3 Modèle utilisé : Système Linéaire, Continu et Invariant – SLCI

Un système de type **SLCI**, vérifie les hypothèses suivantes :
- les grandeurs temporelles sont des **fonctions continues du temps** ;
- le modèle est **invariant** ; les paramètres physiques sont supposés constants durant la période d'étude ;
- le modèle est **linéaire** (1).

Un **SLCI** est caractérisé par un **système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants** de la forme :

$$a_n\frac{d^ns}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{ds}{dt}+a_0s(t)=b_m\frac{d^me}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{de}{dt}+b_0e(t)$$

$s(t)$: réponse *et* $e(t)$: signal d'entrée

n est **l'ordre** de l'équation(2).
Le modèle est **causal** : les signaux d'entrée imposent la réponse.

(1) La limite de vitesse d'un moteur est une non-linéarité, par exemple.

(2) le comportement d'un système dépend du passé, pas du futur. Les systèmes réels étudiés imposent m≤n. Cette propriété permet de définir, à priori, l'entrée et la sortie.

Le modèle peut être obtenu par application des lois de la physique ou expérimentalement.

Un **modèle de connaissance** est un modèle déterminé par application de lois et principes de la **physique**.
Un **modèle de comportement** est déterminé à partir de réponses à **des signaux tests** obtenus **expérimentalement** ou par **simulation**.

II.4 Limites de la représentation par équations différentielles

Exemple : Considérons un **moteur à courant continu**.
La grandeur d'entrée est une tension d'alimentation du moteur. La grandeur de sortie est la vitesse angulaire de l'axe du moteur par rapport au stator.

Les équations du modèle de connaissance usuel, sans perturbations, sont données ci-dessous.

Les équations proviennent des lois physiques suivantes :
(1) loi des mailles
(2) et (3) électro-magnétisme
(4) loi de Newton pour un solide en rotation

Équations fondamentales d'un Moteur à Courant Continu (MCC)	
$u(t) = e(t) + R \cdot i(t) + L\dfrac{di(t)}{dt}$ (1)	$u(t)$: tension aux bornes du moteur
$e(t) = k_e \cdot \omega(t)$ (2)	$i(t)$: intensité du courant du moteur
$c(t) = k_C \cdot i(t)$ (3)	$\omega(t)$: vitesse angulaire du moteur
$J\dfrac{d\omega(t)}{dt} = c(t)$ (4)	$c(t)$: couple du moteur
	$e(t)$: f.e.m
	J, k_e, k_c, R et L : caractéristiques du moteur

Les équations (3) et (4) permettent d'obtenir l'intensité en fonction de la vitesse angulaire du moteur : $i(t) = \dfrac{J}{k_c}\dfrac{d\omega(t)}{dt}$
Le modèle étant invariant, J et k_c sont des constantes, et en dérivant : $\dfrac{di(t)}{dt} = \dfrac{J}{k_c}\dfrac{d^2\omega(t)}{dt^2}$

En remplaçant l'intensité et e(t) dans l'équation (1), on obtient une équation différentielle (du second ordre), caractéristique du moteur : $k_e\,\omega(t) + \dfrac{JR}{k_c}\dfrac{d\omega(t)}{dt} + \dfrac{JL}{k_c}\dfrac{d^2\omega(t)}{dt^2} = u(t)$.

Cette équation caractérise le comportement du composant. Cependant, on recherche une représentation indépendante de u (t) et de ω(t).
Les équations différentielles d'un modèle de connaissance ou de comportement permettent de caractériser le comportement d'un SLCI. Mais elles ne permettent pas de relier de façon « simple » la sortie en fonction de l'entrée, ni de caractériser le comportement du système uniquement par ses paramètres indépendamment des grandeurs d'entrée et de sortie. La transformée de Laplace donne une réponse pratique à ce problème et la possibilité de prédire les performances du composant.

III Transformée de Laplace et fonction de transfert

III.1 La transformée de Laplace

Définition

> La **transformée de Laplace** permet de transformer les équations différentielles linéaires à coefficients constants en **polynômes**.

Soit f(t) une fonction réelle d'une variable réelle telle que f(t)=0 pour t<0 (3). On définit sa transformée de Laplace L[f(t)] comme l'unique **fonction** F(p) **de la variable complexe** p telle que :

$$f(t) \xrightarrow{L[f(t)]} F(p) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}dt$$

Domaine temporel Domaine symbolique (ou de Laplace)

(3) L'ingénieur a pour pratique d'étudier l'effet d'une cause qu'il situe à la date t=0. La cause précédant toujours l'effet, la transformée de Laplace n'est définie que pour des fonctions dites « causales ». Le système est stabilisé avant et au début de l'étude.

La transformée de Laplace inverse existe. Elle est bi-univoque. Ces propriétés permettent de résoudre les équations différentielles linéaires invariantes de façon simple. Nous ne l'utiliserons pas dans ce contexte.

Propriétés de la transformée de Laplace

	LINEARITE		DERIVATION	INTEGRATION	PRODUIT DE 2 FONCTIONS
$f(t)$	$K\,f(t)$	$K_1\,g(t)+K_2\,h(t)$	$\dfrac{d^n f(t)}{dt^n}$	$\int f(t)dt$	$f(t)\cdot g(t)$
$F(p)$	$K\,F(p)$	$K_1\,G(p)+K_2\,H(p)$	$p^n\,F(p)$ avec **conditions initiales nulles**	$\dfrac{F(p)}{p}$	$\cancel{F(p)\cdot G(p)}$

Les **conditions initiales sont supposées nulles** lorsque le système est supposé au repos pour t<0. C'est-à-dire, si la fonction et ses dérivées sont nulles pour t=0 :
f (0) = f '(0) = f ''(0) =... =0
C'est la **condition de Heaviside**.

Application : Déterminer une transformée de Laplace

A1 - Déterminer, dans les conditions de Heaviside, la transformée de Laplace de l'équation

$$5\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)=v(t)$$

Si $x(t)\xrightarrow{L}X(p)$, alors, avec les conditions initiales nulles : $\dfrac{dx(t)}{dt}\xrightarrow{L}p\,X(p)$ et $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}\xrightarrow{L}p^2\,X(p)$

d'où la transformée de l'équation différentielle : $5p^2\,X(p)+3p\,X(p)+2X(p)=V(p)$

soit encore : $X(p)\left[5p^2+3p+2\right]=V(p)$

III.2 Fonction de transfert entre la sortie et une entrée

(1) démonstration détaillée à ne pas utiliser :

$$\begin{aligned}&L[u(t)]\\&=L\left[k_e\,\omega(t)+\frac{JR}{k_c}\frac{d\omega(t)}{dt}+\frac{JL}{k_c}\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}\right]\\&=k_e\,L[\omega(t)]+\frac{JR}{k_c}L\left[\frac{d\omega(t)}{dt}\right]+\frac{JL}{k_c}L\left[\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}\right]\\&=k_e\,\Omega(p)+\frac{JR}{k_c}p\,\Omega(p)+\frac{JL}{k_c}p^2\,\Omega(p)\end{aligned}$$

Exemple du moteur à courant continu

L'équation différentielle obtenue sans couple résistant est : $u(t)=k_e\,\omega(t)+\dfrac{JR}{k_c}\dfrac{d\omega(t)}{dt}+\dfrac{JL}{k_c}\dfrac{d^2\omega(t)}{dt^2}$

Notons U(p) la transformée de Laplace de u(t) et Ω(p) celle de ω(t).
Si les conditions initiales sont nulles, l'équation différentielle, dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$U(p)=k_e\,\Omega(p)+\frac{JR}{k_c}p\,\Omega(p)+\frac{JL}{k_c}p^2\,\Omega(p)\ \text{ ; soit : }\ U(p)=\left[k_e+\frac{JR}{k_c}p+\frac{JL}{k_c}p^2\right]\Omega(p)$$

On peut alors écrire la relation, dans le domaine de Laplace, entre la sortie et l'entrée sous la forme :

$$\Omega(p)=\frac{1}{k_e+\dfrac{JR}{k_c}p+\dfrac{JL}{k_c}p^2}U(p)$$

Le terme reliant la sortie à l'entrée est caractéristique du comportement du système et s'exprime uniquement en fonction de la **variable symbolique *p*** et des paramètres du système. Ce terme est la **fonction de transfert du moteur à courant continu**.
Si est la fonction de transfert du moteur à courant continue : $H(p)=\dfrac{1}{k_e+\dfrac{JR}{k_c}p+\dfrac{JL}{k_c}p^2}$

Le système se représente sous une des formes suivantes dans le domaine symbolique :

avec $\Omega(p)$ = $H(p)$ · $U(p)$
sortie fonction de transfert entrée

Fonction de transfert à conditions initiales nulles

Soit le modèle traduisant la relation entre une entrée e(t) et la sortie s(t) d'un SLCI sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$e(t) \Rightarrow \boxed{a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)} \Rightarrow s(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de cette équation et en **considérant les conditions initiales nulles**, on a :

$$a_n p^n S(p) + \ldots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \ldots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

soit : $$\left[a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0 \right] S(p) = \left[b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0 \right] E(p)$$

d'où : $$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

On appelle fonction de transfert cette fraction de 2 polynômes de la variable *p*.

(1) on l'appelle aussi « transmittance » du système.

La fonction de transfert est **une fraction de deux polynômes** de la variable *p*.
La **fonction de transfert**(1) caractérise un **SLCI** de façon indépendante de l'entrée qui lui est appliquée. Elle ne dépend que de la **variable symbolique *p*** et des **paramètres** physiques du système.
Si H(p) est une fonction de transfert, S(p) = H(p) x E(p)

$$E(p) \Rightarrow \boxed{H(p)} \Rightarrow S(p)$$

Forme canonique d'une fonction de transfert : gain statique, ordre et classe

En **factorisant** chaque polynôme par le **terme de plus petit degré** on obtient la forme **canonique** :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + \ldots p + \ldots p^2 + \cdots + \ldots p^m}{1 + \ldots p + \ldots p^2 + \cdots + \ldots p^{n-\alpha}}$$

K : gain statique
$\alpha \geq 0$: classe du système
n : ordre du système (degré dénominateur)

Pour $\alpha = 1$, la fonction de transfert s'écrit sous la forme $H(p) = \frac{K}{p} \frac{A(p)}{B(p)}$, « le système possède un intégrateur ».

Exemple : Moteur à courant continu $H(p) = \frac{1}{k_e + \frac{RJ}{k_C} p + \frac{LJ}{k_C} p^2} = \frac{1}{k_e} \frac{1}{\left(1 + \frac{RJ}{k_e k_C} p + \frac{LJ}{k_e k_C} p^2\right)}$

ordre : 2
classe : 0
gain statique : $1 / k_e$

Application : $H(p) = \dfrac{2 + 3p + 5p^2}{3p^2 + 4p^3 + 7p^5}$

$H(p) = \dfrac{2 + 3p + 5p^2}{3p^2 + 4p^3 + 7p^5}$ factoriser par les termes de plus petit ordre

$$\xrightarrow{\text{forme canonique}} H(p) = \frac{2}{3p^2} \frac{1 + \frac{3}{2} p + \frac{5}{2} p^2}{1 + \frac{4}{3} p + \frac{7}{3} p^3}$$

ordre : 5
classe : 2
gain statique : $\frac{2}{3}$

Fonctions de transfert en série

Des composants sont en **série** lorsque la **sortie** d'un composant est **l'entrée** du suivant.

$$\xrightarrow{E_1(p)} \boxed{H_1(p)} \xrightarrow{S_1(p) = E_2(p)} \boxed{H_2(p)} \xrightarrow{S_2(p)} \quad \Rightarrow \quad \xrightarrow{E_1(p)} \boxed{H_1(p) \times H_2(p)} \xrightarrow{S_2(p)}$$

La fonction de transfert équivalente de **composants en série** est égale au **produit des fonctions de transfert** de chacun des composants.

III.3 Prévoir la stabilité à partir de la fonction de transfert

L'étude des solutions des équations différentielles à coefficients constants permet de montrer que la stabilité est assurée si les racines du dénominateur D(p) de la fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative. Les coefficients du dénominateur sont alors tous de même signe.

(1) pas de termes nuls.

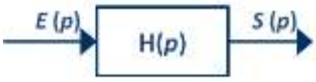
Un modèle **stable** est nécessairement de classe 0 avec des **coefficients** au dénominateur **strictement**(1) **de même signe.**

Ces conditions sont suffisantes pour des modèles d'ordre 1 et 2. Pour un modèle d'ordre 3, il existe une condition supplémentaire sur les coefficients.

Ordre	Condition de stabilité :
Ordre 1 $D(p)=a_0+a_1 p$	Classe 0 et coefficients du dénominateur de même signe
Ordre 2 $D(p)=a_0+a_1 p+a_2 p^2$	Classe 0 et coefficients du dénominateur de même signe
Ordre 3 $D(p)=a_0+a_1 p+a_2 p^2+a_3 p^3$	Classe 0, coefficients du dénominateur de même signe $a_1 a_2 > a_0 a_3$

III.4 Prévoir la variation finale pour une entrée en échelon à partir de réponse

Dans les conditions de Heaviside et le domaine de Laplace, la réponse s'écrit : S(p)=H(p) x E(p). Il est donc nécessaire de connaître la transformée de l'entrée pour déterminer celle de la réponse.



Transformée de Laplace d'un échelon

La transformée de Laplace d'un **échelon d'amplitude** E_0 dans les conditions de Heaviside est $\frac{E_0}{p}$.

Théorème de la valeur finale

(1) Il conviendrait de déterminer l'existence de cette limite en étudiant la stabilité du système. Ce sera fait en 2ème année.

Si la valeur finale d'une fonction **existe** (1), le **théorème de la valeur finale** permet de la calculer à partir de sa transformée de Laplace :

$$s(+\infty)=\lim_{t\to+\infty} s(t)=\lim_{p\to 0^+} p\,S(p) \quad \text{avec} \quad S(p)=H(p)\,E(p)$$

Exemple : moteur électrique soumis à un échelon de tension d'amplitude $U_0=12$ V avec $H(p)=\dfrac{1}{k_e+\dfrac{RJ}{k_C}p+\dfrac{LJ}{k_C}p^2}$

Modèle stable, la valeur finale existe pour une entrée en échelon.

Dans le domaine de Laplace, l'entrée est $U(p)=\dfrac{U_0}{p}$. La réponse s'écrit $\Omega(p)=\dfrac{1}{k_e+\dfrac{RJ}{k_c}p+\dfrac{LJ}{k_c}p^2}\dfrac{U_0}{p}$.

Le théorème de la valeur finale donne : $\omega(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}\omega(t)=\lim_{p\to 0^+} p\,\Omega(p)=\lim_{p\to 0^+}\cancel{p}\dfrac{1}{k_e+\dfrac{RJ}{k_c}p+\dfrac{LJ}{k_c}p^2}\dfrac{U_0}{\cancel{p}}=\dfrac{U_0}{k_e}$.

Cela correspond à la variation finale de vitesse angulaire induite par la variation de tension U_0 .

Variation finale d'un système de classe 0 soumis à un échelon

Soit un système stable modélisé par la fonction de transfert H(p) soumis à un échelon d'amplitude E_0. Le théorème de la valeur finale donne :

$s(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}s(t)=\lim_{p\to 0^+}p\,S(p)=\lim_{p\to 0^+}\cancel{p}\,H(p)\dfrac{E_0}{\cancel{p}}=\lim_{p\to 0^+}H(p)E_0$, avec pour un système de classe 0,

$H(p)=K\dfrac{1+b_1 p+\cdots}{1+a_1 p+\cdots}$.

D'où $s(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}s(t)=\lim_{p\to 0^+}H(p)E_0=K E_0$.

Pour un **système stable**, de gain statique *K*, la **variation finale** pour une **entrée en échelon** d'amplitude $\mathbf{E_0}$ est $\mathbf{K\,E_0}$.

La réponse en régime permanent pour une entrée en échelon, correspond à la solution particulière de l'équation différentielle pour une entrée constante. Les termes de dérivée non nulle s'annulent. Il reste $a_0 s(t)=b_0 E_0$, soit $s(t)=(b_0/a_0)E_0$ et $K=b_0/a_0$.

IV Identifier un modèle de comportement du premier ordre

IV.1 Principe de définition d'un modèle de comportement

Définir un **modèle de comportement** consiste à **identifier** un modèle à partir de la **réponse** du système à un **signal d'entrée test**, un **échelon** dans notre cas. La démarche est la suivante :

- le système est considéré comme une « **boite noire** » et est soumis à un **échelon d'amplitude connue** ;
- la **réponse** obtenue expérimentalement est **comparée** à un **catalogue de réponses types** de façon à **choisir un modèle** de comportement (gain, intégrateur, premier ordre, 2ème ordre…)
- les **paramètres du modèle sont identifiés** à partir des relevés expérimentaux.

Le **modèle de comportement** est toujours à **conditions initiales nulles**. **Seules les variations par rapport aux conditions expérimentales initiales** sont prises en compte.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à des réponses assimilables celles d'un 1er ordre.

IV.2 Comportement temporel d'un modèle du 1er ordre : *K*/(1+τ.*p*)

Fonction de transfert et équation temporelle

La fonction de transfert d'un **système du premier ordre**, sous l'hypothèse **des conditions initiales nulles** est :

$H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$, $\tau > 0$ **(1)**

avec : τ **constante de temps** en secondes

***K* gain statique** unité = $\frac{unité\ de\ la\ sortie}{unité\ de\ l'entrée}$

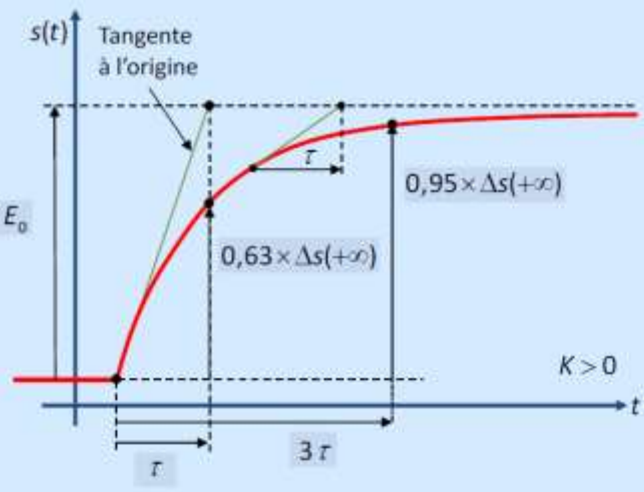
La fonction de transfert correspond à une équation différentielle du premier ordre écrite sous la forme :

$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \quad \text{pour } t \geq 0$

Réponse temporelle à un échelon d'amplitude E_0

(1) Modèle instable sinon.

Pour des conditions initiales non nulles, la réponse d'un premier ordre à un échelon d'amplitude a les propriétés suivantes : E_0



Variation finale : $K E_0$.

Durée pour atteindre **63%** de la variation totale : constante de temps τ

Temps de réponse à 5% : **$tr_{5\%} \approx 3\tau$**

La droite tangente à l'origine coupe la valeur finale après une durée τ

On observe que :

- la **constante de temps** τ caractérise le comportement du système en **régime transitoire** (temps pour atteindre 63% puis 95% de la variation finale) ;
- le **gain statique *K*** caractérise le comportement du système en **régime permanent** : variation finale atteinte =KE_0.

(1) La solution de l'équation différentielle du premier degré est un résultat classique démontré en physique et mathématiques.

La solution[1] de l'équation différentielle pour des conditions initiales nulles et une entrée en échelon d'amplitude E_0 est $s(t)=K\cdot E_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)$ pour t≥0. Éléments de démonstration à partir cette solution :

- pour t=0, on retrouve bien la condition initiale $s(t)=0$;
- pour $t\to+\infty$, on obtient la valeur finale et la variation totale, $s(+\infty)=KE_0=\Delta s(+\infty)$;
- pour $t=\tau$, $s(\tau)=KE_0(1-1/e)\approx 0{,}63\,KE_0\approx 0{,}63\ \Delta s(+\infty)$;
- la pente à l'origine est $\left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=0^+}=KE_0\frac{1}{\tau}e^{(-0/\tau)}=\frac{KE_0}{\tau}$. La droite tangente à l'origine a donc pour équation : $y(t)=(K\,E_0/\tau)\,t$, d'où $y(t)=K\cdot E_0$ pour $t=\tau$;
  Cette propriété est vérifiée en tout point de la courbe : si $y(t)=s'(t_1)(t-t_1)+s(t_1)$, droite tangente à la courbe en t_1, alors $y(t_1+\tau)=K\cdot E_0$;
- soit t_r tel que $s(t_r)=0{,}95\cdot s(+\infty)$. t_r vérifie $KE_0\,(1-e^{-t_r/\tau})=0{,}95\cdot KE_0$, d'où $e^{-t_r/\tau}=0{,}05\Rightarrow t_r=-\tau\cdot\ln(0{,}05)\approx 3\cdot\tau$.

IV.3 Identifier les paramètres d'un modèle du premier ordre

Conditions pour que la réponse à un échelon s'apparente à celle d'un premier ordre :
- existence **valeur finale** ;
- **pas de dépassement** ;
- **pente à l'origine** pouvant être non nulle ;
- **pas de point d'inflexion**.

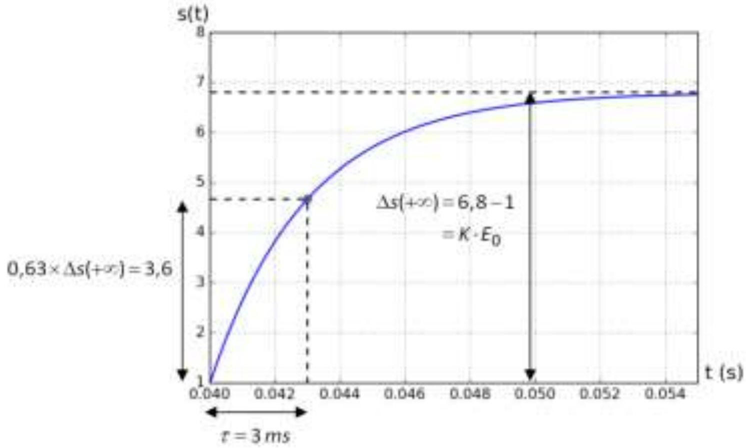
Les paramètres du **modèle du premier ordre** sont identifiés ainsi :
- K à partir de la **variation finale** et de la relation $\Delta s(+\infty)=KE_0$.
- τ à partir de la durée de réponse pour une variation de **63%**.

Exemple : à partir de la réponse expérimentale à un échelon d'amplitude 2, identifier les paramètres du système modélisé par un premier ordre.

Q1 - Identifier la valeur de K : la variation totale vérifie $\Delta s(+\infty)=KE_0$, d'ou K=5,8/2=2,9

Q2 - Identifier la valeur de τ

$0{,}63\times\Delta s(+\infty)=3{,}6$, correspondant à une durée depuis l'origine de 3 ms.



Q3 - En déduire la fonction de transfert du premier ordre : $H(p)=\dfrac{2{,}9}{1+3.10^{-3}p}$

V Identifier un modèle de comportement du deuxième ordre

V.1 Comportement temporel d'un modèle du 2ème ordre : $K/[1+2z/\omega_0.p+(p/\omega_0)^2]$

Fonction de transfert et équation temporelle

La fonction de transfert d'un **système du deuxième ordre**, sous l'hypothèse des **conditions initiales nulles** est :

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \qquad \omega_0>0, z>0^{(1)}$$

avec ω_0, **pulsation propre** (rad/s)

z (noté parfois m ou ξ), **facteur d'amortissement** (sans unité)

K, **gain statique** , unité = $\frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$

La fonction de transfert correspond à une équation différentielle de degré 2 écrite sous la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2z}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K\,e(t) \text{ pour } t>0.$$

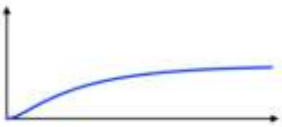
Réponse temporelle à un échelon d'amplitude E_0

Comme pour l'équation du premier degré, la solution de l'équation différentielle du second degré est un résultat classique démontré en physique et mathématiques.
La recherche de la solution conduit à déterminer les racines d'une équation du second degré de déterminant conduisant à des **réponses différentes** suivant la valeur du **facteur d'amortissement** *z*. Les équations temporelles sont données pour information. $\Delta = 4\omega_0^2\,(z^2-1)$

Réponses non oscillatoires (apériodiques)

Si $z>1$: $s(t)=KE_0\left[1+\frac{1}{\tau_2-\tau_1}\left(\tau_1 e^{-t/\tau_1}-\tau_2 e^{-t/\tau_2}\right)\right]$ pour $t\geq0$

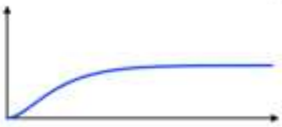
avec $\tau_1=\frac{1}{\omega_0}\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)$ et $\tau_2=\frac{1}{\omega_0}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$



(1) Modèle instable sinon.

Si $z=1$: $s(t)=KE_0\left(1-e^{-t/\tau}-\frac{t}{\tau}e^{-t/\tau}\right)=KE_0\left(1-\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\right)$ pour $t\geq0$

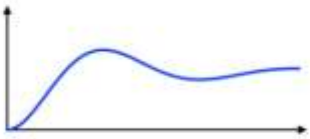
avec $\tau=1/\omega_0$



Réponse oscillatoire amortie

Si $0<z<1$: $s(t)=KE_0\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-\omega_0 zt}\sin(\omega_a t+\varphi)\right)$ pour $t\geq0$

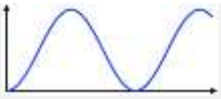
avec $\varphi=\arctan\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$ et $\omega_a=\omega_0\sqrt{1-z^2}$



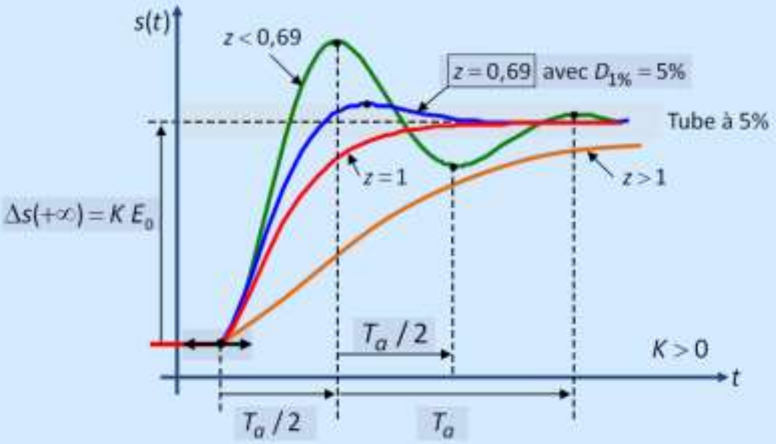
Caractéristiques de la réponse temporelle

Pour des conditions initiales non nulles, la réponse d'un deuxième ordre à un échelon d'amplitude E_0 a les propriétés suivantes :

Le cas z=0, régime oscillatoire non amorti, correspond aux systèmes harmoniques. La valeur finale n'existe pas, le temps de réponse à 5% et le nombre de dépassements ne sont pas définis. Il ne sera pas étudié ici.



$s(t) = KE_0\,(1 - \cos(\omega_0\, t))$



Variation totale : $\Delta s(+\infty) = K\,E_0$

Pente à l'origine nulle

Pas de dépassement pour **z ≥ 1**. **Dépassements** en nombre infini pour **z<1**

Lorsqu'il y dépassement (**z<1**), on définit :

- la **pulsation amortie**(1) $\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$ en rd/s ;
- la **pseudo-période**(2) $T_a = \dfrac{2\pi}{\omega_a}$

La relation entre fréquence et période est donnée par $f = 1/T = \omega/2\pi$.

Attention : la durée entre un dépassement (ou l'instant initial) et un passage à la valeur finale n'est pas connue.

Le **nombre de dépassements significatifs et les valeurs** $D_{k\%}$ dépendent de z :

- lorsque **z=0,69**, il existe **un seul** dépassement >1% qui vaut **5%** ;
- lorsque **0,82 < z < 1**, les dépassements relatifs sont <1% ;

La valeur du dépassement relatif d'ordre *k* est donnée par l'abaque en annexe **ou** une formule(3).

(1) C'est la pulsation des oscillations amorties de la réponse. Elle est toujours $<\omega_0$
(2) C'est l'intervalle de temps correspondant à une alternance complète des oscillations amorties de la réponse.
(3) valeur du dépassement relatif d'ordre k :

$$D_{k\%} = e^{\frac{-z.k.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Application : utilisation de l'abaque des dépassements relatifs $D_{k\%}$ pour une réponse à un échelon d'un système du 2ème ordre.

A2 - Pour *z*=0,3, que valent les dépassements relatifs supérieurs à 1%.

Pour *z*=0,3, on trouve 4 dépassements supérieurs à 1% : D1%=37%, D2%=14%, D3%=5% et D4%=2%.

A3 - Retrouver la valeur limite de *z* donnant des dépassements relatifs inférieurs à 1% ?

La valeur limite correspond à l'intersection de la courbe n=1 avec l'axe des abscisses. Pour 0,82<*z*<1, les dépassements ont une amplitude inférieure à 1% (non visible à l'œil).

A4 - Sur une réponse à un échelon obtenue expérimentalement, on relève un premier dépassement relatif de 25%. Quel est le facteur d'amortissement si le système est un 2ème ordre ?

On obtient un facteur d'amortissement de 0,4.

Le **temps de réponse à 5%** varie avec la valeur de z :

- lorsque z<<1, $tr_{5\%}$ est grand car le système est peu amorti ;
- lorsque **z=0,69, $tr_{5\%}$ est minimal** avec un seul dépassement >1%, $D_{1\%}$=5% ;
- lorsque **z=1**, il s'agit du système **sans dépassement le plus rapide** ;
- lorsque z>>1, $tr_{5\%}$ est grand car le système est très amorti.

Le **temps de réponse réduit**[1] $tr_{5\%} \cdot \omega_0$, sans unité, ne dépend que du facteur d'amortissement z :

- lorsque z=0,69, $tr_{5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$;
- lorsque z=1, $tr_{5\%} \cdot \omega_0 \approx 5$;

Pour les autre valeurs de z, on utilise un abaque donné en annexe.

L'abaque montre qu'à un facteur d'amortissement correspond un temps de réponse réduit.
Par conséquent, pour un même facteur z, plus ω_0 augmente, plus $tr_{5\%}$ diminue et donc plus le système est rapide.

(1) Il n'existe pas d'expression simple qui permet de calculer** $tr_{5\%}$**. On utilise un abaque qui nous donne la valeur du temps de réponse réduit (**=$tr_{5\%} \cdot \omega_0$**) en fonction du facteur d'amortissement.

V.2 Identifier les paramètres d'un modèle du deuxième ordre

Condition pour assimiler le modèle à un 2ème ordre

Conditions pour que la réponse à un échelon s'apparente à celle d'un deuxième ordre :

- existence **valeur finale** ;
- **pente à l'origine** pouvant être nulle ;
- **un point d'inflexion** sur la montée initiale ;

oscillatoire amorti (**$z < 1$**), s'il **existe des dépassements** d'amplitudes strictement décroissantes, d'extrémums uniformément répartis ;

non oscillatoire ($z \geq 1$), s'il n'existe pas de dépassements.

Identification des paramètres pour une réponse oscillatoire amortie

Les paramètres d'un **modèle du deuxième ordre** ayant une réponse **oscillatoire amortie** à un échelon sont identifiés ainsi :

- ***K*** à partir de la **variation totale** et de la relation $\Delta s(+\infty) = KE_0$;
- ***z*** à partir du **premier dépassement $D_{1\%}$** en utilisant l'abaque ou avec la relation

$$D_{1\%} = e^{\frac{-z\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

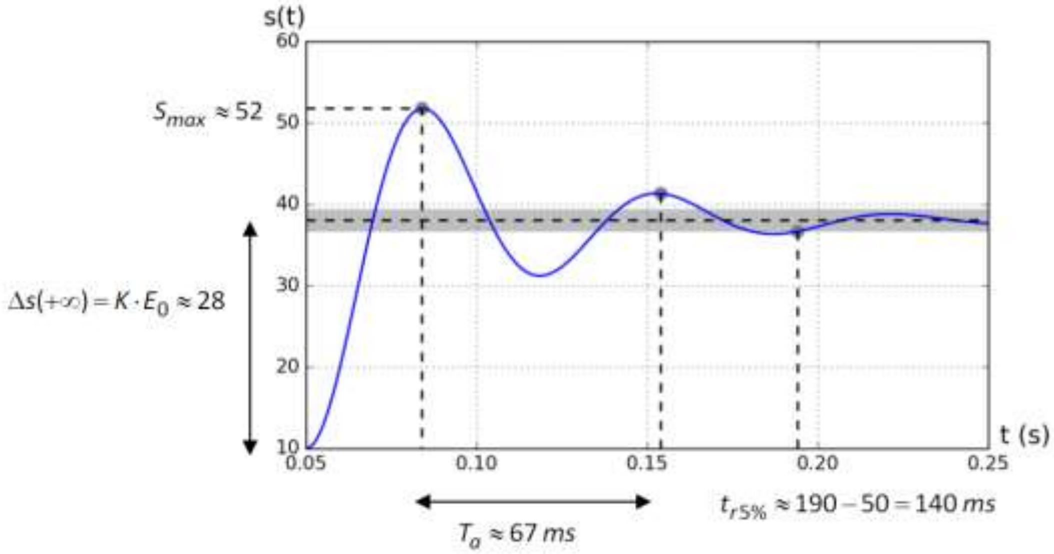
- **ω_0** à partir de la durée entre deux extrémums. On en déduit la **pseudo période T_a** puis ω_0 par la relation $\omega_a = \omega_0\sqrt{1-z^2}$.

La valeur de **$tr_{5\%}$** et **l'abaque** du temps de réponse réduit sont utilisés lorsque la valeur du premier dépassement n'est pas mesurable avec précision.

Exemple : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue. Sa réponse expérimentale à un échelon d'amplitude E_0=2 est donnée ci-dessous.
La réponse s'apparente à la réponse d'un système du 2ème ordre oscillatoire amortie : asymptote horizontale, dépassements d'amplitudes décroissantes, tangente à l'origine nulle et point d'inflexion.
Ces observations permettent de proposer comme fonction de transfert du modèle de comportement du système :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0}p + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{avec } z < 1$$

Les trois paramètres à identifier sont : le gain statique ***K***, le facteur d'amortissement **z** et la pulsation propre **ω_0**.



Q4 - Identifier la valeur de K

La variation totale vérifie : $\Delta s(+\infty) = KE_0$, d'ou K=28/2=14

Q5 - Identifier la valeur de z

On relève $D_{1\%} = \left|\dfrac{s_{max} - s_\infty}{\Delta s_\infty}\right| \approx \dfrac{52-38}{28} \approx 50\,\%$

Sur l'abaque qui lie le dépassement au facteur d'amortissement on trouve : $z \approx 0{,}21$.

On peut aussi utiliser la formule : $0{,}5 = D_{1\%} = e^{\frac{-z\cdot\pi}{\sqrt{1-z^2}}} \Rightarrow \ln 0{,}5 = \dfrac{-z.\pi}{\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow (\ln 0{,}5)^2.(1-z^2) = z^2.\pi^2$

$$\Rightarrow (\ln 0{,}5)^2 = z^2.\left(\pi^2 + (\ln 0{,}5)^2\right)$$

donc $$z \approx \sqrt{\frac{(\ln 0{,}5)^2}{\pi^2 + (\ln 0{,}5)^2}} \approx 0{,}21$$

Q6 - Déterminer la pulsation amortie puis ω_0

On relève $T_a \approx 67\,ms$ et $tr_{5\%} \approx 140\,ms$

Avec $\omega_a = 2\pi / T_a$ et $\omega_a = \omega_0\sqrt{1-z^2}$ on en déduit : $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{67.10^{-3}\sqrt{1-0{,}21^2}}$ donc ω_0≈95 rad/s

On peut aussi utiliser l'abaque qui lie le temps de réponse réduit $tr_{5\%}\cdot\omega_0$ et le facteur d'amortissement pour trouver ce résultat.

Pour $z = 0.21 \Rightarrow tr_{5\%}\cdot\omega_0 = 13 \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{13}{tr_{5\%}}$ donc $\omega_0 \approx \dfrac{13}{140.10^{-3}} \approx 93\,\text{rad/s}$

Q7 - En déduire une fonction de transfert représentative du comportement du système

$$H(p) = \frac{14}{1 + \frac{0{,}42}{95}p + \frac{p^2}{95^2}}$$

Identification des paramètres pour une réponse non oscillatoire

Les paramètres d'un **modèle du deuxième ordre** ayant une réponse **non oscillatoire** à un échelon, sont identifiés comme un **produit de deux premiers ordre**, en supposant que, pour t suffisamment grand, la courbe est assimilable à un **premier ordre de constante de temps τ_2 ayant un retard τ_1**., hypothèse valable si τ_1/τ_2**<0,25**.

Les caractéristiques sont alors déterminées ainsi :

- K à partir de la variation totale ;
- τ_2 à partir de l'intersection d'une droite **tangente à la courbe** avec l'asymptote horizontale ;
- τ_1 à partir de la **durée de réponse à 63%** correspondant à une durée $\tau_1 + \tau_2$.

L'hypothèse τ_1/τ_2<0,25 doit être vérifiée.

z et ω_0 sont déterminés par identification : $\frac{1}{\omega_0^2}=\tau_1\tau_2$ et $\frac{2z}{\omega_0}=\tau_1+\tau_2$.

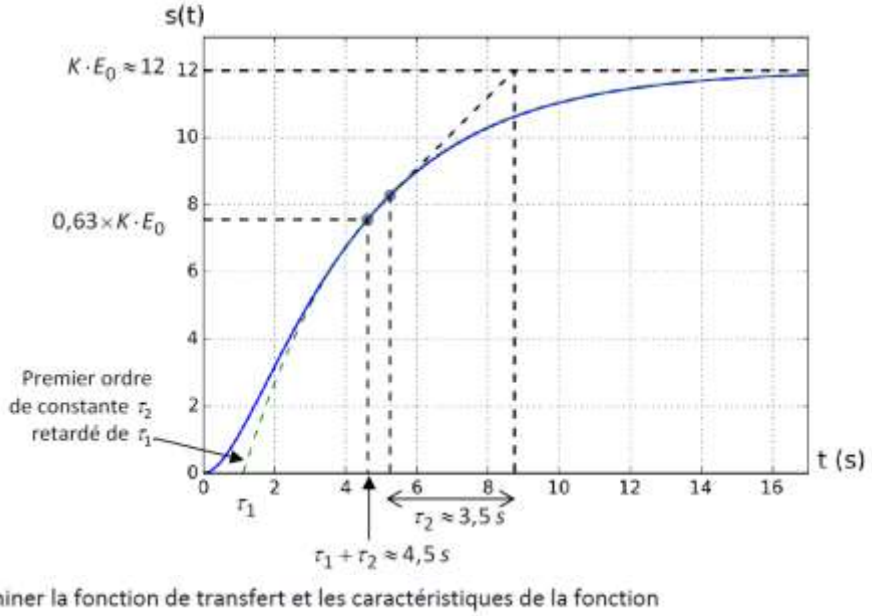
Exemple : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue. Sa réponse expérimentale à un échelon d'amplitude E_0=2 est donnée ci-dessous.
Elle s'apparente à la réponse d'un système du 2ème ordre non oscillatoire : asymptote horizontale mais pas de dépassement, pente à l'origine nulle et un seul point d'inflexion.
Le modèle de comportement proposé a pour fonction de transfert : $H(p)=\frac{K}{(1+\tau_1\cdot p)(1+\tau_2\cdot p)}$.

Les trois paramètres à identifier sont : le gain statique $\boldsymbol{K}$ et les deux constantes de temps τ_1 et τ_2 (1) .

Q8 – Déterminer les constantes de temps.

À partir d'un point de la courbe suffisamment éloigné du point d'inflexion, après avoir tracé la tangente en ce point et son intersection avec l'asymptote horizontale, on relève sur la courbe :
s $(+\infty)\approx 12$, $\tau_2 \approx 3{,}5$ s

Le temps de réponse à 63% est de 4,5 s. D'où, $\tau_1 \approx 4{,}5 - \tau_2 \approx 1$ s



Q9 - Déterminer la fonction de transfert et les caractéristiques de la fonction

K=$\Delta s(+\infty)/E_0\approx 6$ d'ou : $H(p)=\frac{6}{(1+p)(1+3{,}5p)}=\frac{6}{1+4{,}5\,p+3{,}5\,p^2}$

D'où, $\frac{1}{\omega_0^2}=3{,}5$, soit $\omega_0=0{,}53$ rad/s, et $\frac{2z}{\omega_0}=4{,}5$, soit $z=1{,}2$.

Réponse non oscillatoire avec pôle dominant $\tau_1 << \tau_2$

Lorsqu'une constante de temps est négligeable devant l'autre, la réponse temporelle à un échelon d'un système du 2ème ordre amorti modélisé par $H(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ est proche de la réponse temporelle à un échelon d'un système du 1er ordre modélisé par $H(p) = \frac{K}{(1+\tau_2 p)}$.

Cela revient à négliger le retard induit par le premier ordre associé à la constante de temps τ_1.
On dit que le « pôle » associé est dominant car il impose le comportement global au système τ_2.

VI Comportement temporel et identification de modèles usuels autres

VI.1 Gain pur (système à action proportionnelle) : *K*

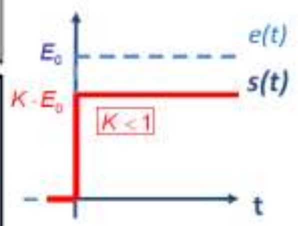
Équation temporelle et fonction de transfert d'un **gain pur**, système à **action proportionnelle**, sont :

$$s(t) = K\,e(t) \text{ pour } t \geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad H(p) = K$$

K : **gain statique** $\quad unité = \frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$

La réponse à un **échelon** d'amplitude E_0 d'un système à **gain pure** (à action **proportionnelle)** est un **échelon d'amplitude $K\,E_0$** :

$$s(t) = K\,E_0 \text{ pour } t \geq 0$$



L'identification est réalisée à partir de la **variation finale** avec $\Delta s(+\infty) = K\,E_0$.

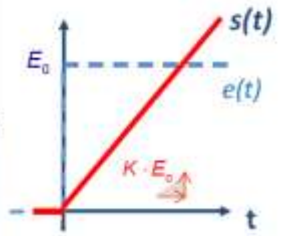
VI.2 Intégrateur : *K/p*

L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un **intégrateur** sont :

$$s(t) = K \int_0^t e(\tau)\,d\tau \text{ pour } t \geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad H(p) = \frac{K}{p}$$

K : **gain statique** $\quad unité = \frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}} \cdot s^{-1}$

La réponse à un **échelon** d'amplitude E_0 d'un système **intégrateur** est une **rampe de pente KE_0** : $\quad s(t) = K\,E_0 \cdot t$ pour $t \geq 0$



L'identification est réalisée à partir de la **pente *a* en régime permanent** avec $a = K\,E_0$.

VI.3 Dérivateur : *K.p*

L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un **dérivateur** sont :

La variable symbolique p est homogène à [T^{-1}], soit des s^{-1}.

$$s(t) = K\frac{d\,e(t)}{dt} \text{ pour } t \geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad H(p) = K\,p$$

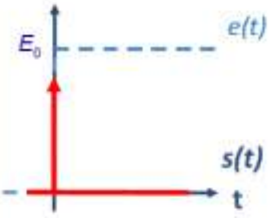
K : **gain statique** $\qquad unité = \dfrac{unité\ de\ la\ sortie}{unité\ de\ l'entrée} \cdot s$

(2) Fonction de transformée de Laplace unitaire : $L[\delta(t)] = 1$

La réponse à un **échelon** d'amplitude E_0 d'un système **dérivateur** est une **impulsion d'amplitude *K E₀*** (2) :

$$s(t) = K\,E_0\,\delta(t) \text{ avec } \delta(t) \text{ l'impulsion de Dirac}^{(2)}$$

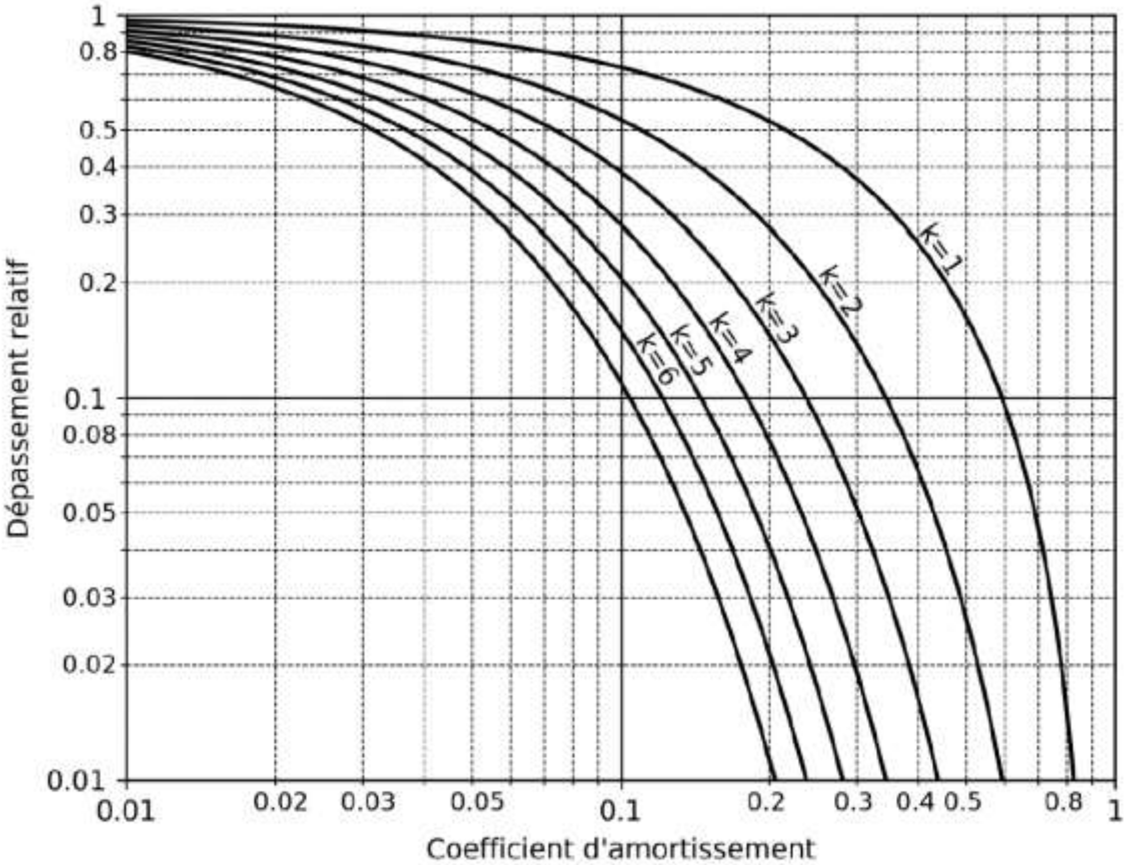
On retiendra : $s(t)=0$ pour $t>0$

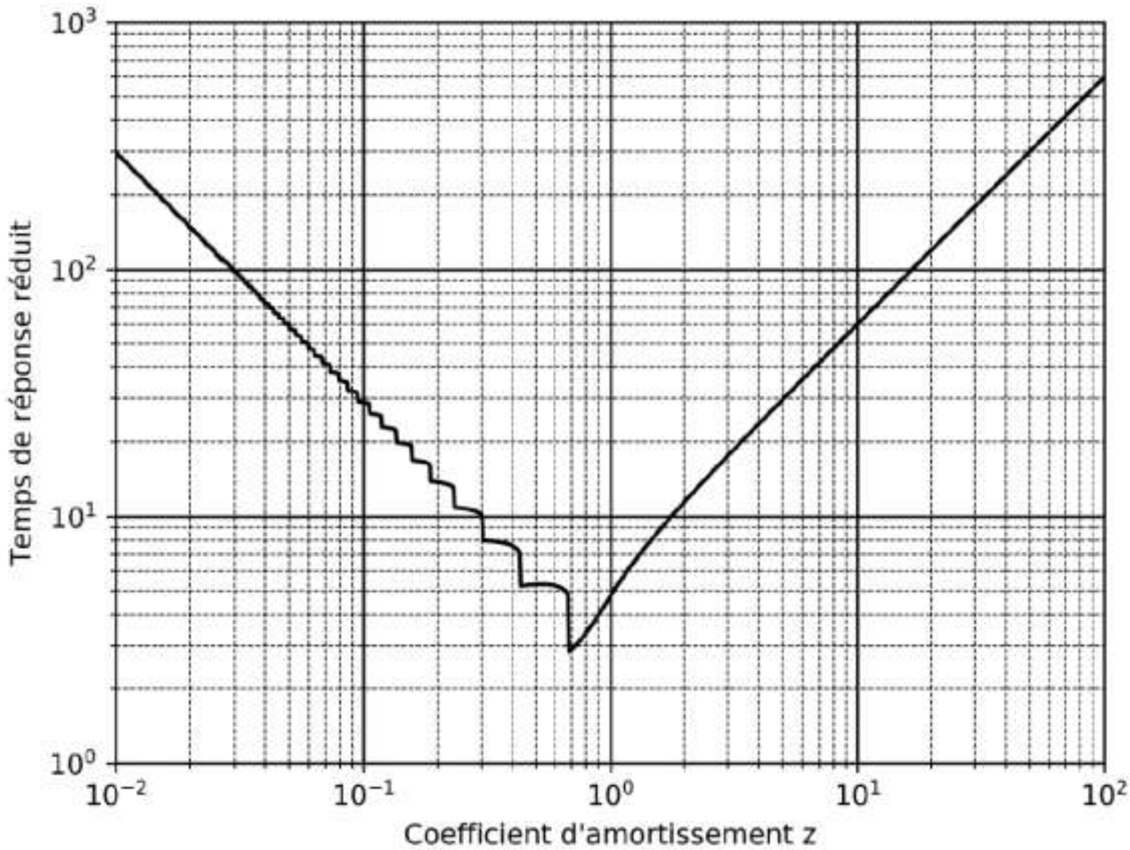


$$D_{k\%} = e^{\frac{-z.k.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

$$z = \sqrt{\frac{(\ln D_{1\%})^2}{(\ln D_{1\%})^2 + \pi^2}}$$

ABAQUES





Annexe : sur la transformée de Laplace

- Transformée de Laplace d'un échelon d'amplitude E_0

Soit $f(t)=\begin{cases}0 \text{ si } t<0\\ E_0 \text{ si } t>0\end{cases}$, $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt=E_0\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt=E_0\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty}=\frac{E_0}{p}$

- Transformée de Laplace d'une rampe de pente A

Soit $f(t)=\begin{cases}0 \text{ si } t<0\\ At \text{ si } t>0\end{cases}$, $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt=A\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt$.

L'intégration est faite par partie, $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$, avec $u=t$ et $v'=e^{-pt}$:

$$F(p)=A\left[t\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty}-A\int_0^{+\infty}\frac{e^{-pt}}{-p}dt=A[0-0]+\frac{A}{p}\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{\infty}=\frac{A}{p^2}$$

- Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit *f* continue sur $]0,+\infty[$, dérivable par morceau et à dérivée continue par morceau.

$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\frac{df(t)}{dt}dt$. En utilisant l'intégration par partie avec $u=e^{-pt}$ et $v=\frac{df(t)}{dt}$ on obtient :

$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=\left[e^{-pt}f(t)\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}-pe^{-pt}f(t)dt$.

La condition d'existence de la transformée de Laplace de $f(t)$ impose $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-pt}f(t)=0$ (nécessaire pour que l'intégrale converge). D'où : $L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=0-f(0)+p\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt=-f(0)+pL(f(t))$.

Dans les conditions de Heaviside $f(0)=0$. On obtient $L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=pF(p)$.

Par récurrence, on montre aussi que, sous les conditions de Heaviside, $L\left(\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right)=p^nF(p)$.

- Transformée de Laplace d'une intégrale

Posons $g(t)=\int_0^t f(x)dx$ et $g(0)=A_0$. On a aussi $\frac{dg(t)}{dt}=f(t)$.

$$L\left(\frac{dg(t)}{dt}\right)=-g(0)+p\int_0^{+\infty}e^{-pt}g(t)dt=-g(0)+p\int_0^{+\infty}e^{-pt}\left(\int_0^t f(x)dx\right)dt=-g(0)+pL\left(\int_0^t f(x)dx\right)$$

D'où : $L(f(t))=-A_0+pL\left(\int_0^t f(x)dx\right)\Leftrightarrow L\left(\int_0^t f(x)dx\right)=\frac{L(f(t))}{p}+\frac{A_0}{p}$

soit, dans les conditions de Heaviside, $L\left(\int_0^t f(x)dx\right)=\frac{F(p)}{p}$

- Théorème de la valeur finale

Considérons une fonction $f(t)$ convergente. À partir de la transformée de la dérivée d'une fonction et de la limite quand *p* (au sens de son module si *p* est complexe) temps vers 0 :

$$\lim_{p\to0} L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=\lim_{p\to0}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\frac{df(t)}{dt}dt=\lim_{p\to0}\int_0^{+\infty}\frac{df(t)}{dt}dt \text{ (théorème de convergence dominée).}$$
$$=f(+\infty)-f(0)$$

De plus $\lim\limits_{p\to0} L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=\lim\limits_{p\to0}(pF(p)-f(0))=\lim\limits_{p\to0}pF(p)-f(0)$

D'où : $\lim\limits_{p\to0}pF(p)-f(0)=f(+\infty)-f(0)\Leftrightarrow f(+\infty)=\lim\limits_{p\to0}pF(p)$

Savoirs

Je connais :

- ☐ les particularités et hypothèses d'un SLCI
- ☐ la transformation de Laplace et ses propriétés
- ☐ les conditions de stabilités pour des modèles jusqu'à l'ordre 3
- ☐ la forme des fonctions de transfert des systèmes proportionnels, intégrateurs et dérivateurs et les caractéristiques de leurs réponses à un échelon test
- ☐ la forme de la fonction de transfert d'un système du 1er ordre et les caractéristiques de ses réponses à un échelon test
- ☐ la forme de la fonction de transfert d'un système du 2ème ordre et les caractéristiques de ses réponses à un échelon test
- ☐ la démarche d'identification temporelle des systèmes

Savoir-faire

Je sais :

- ☐ observer les performances d'un SLCI
- ☐ déterminer la fonction de transfert d'un SLCI
- ☐ mettre sous forme canonique et identifier gain statique, ordre et classe
- ☐ tracer le signal de sortie d'un système du 1er ou 2ème ordre en réponse à une entrée en échelon
- ☐ identifier un modèle de comportement d'un système à partir de sa réponse à un échelon en modèle de type gain pur, intégrateur, 1er ordre et 2ème ordre