

Cours CO3:

Modéliser le comportement cinématique d'un transmetteur linéaire.

Transmission de puissance – technologie des composants

Objectifs

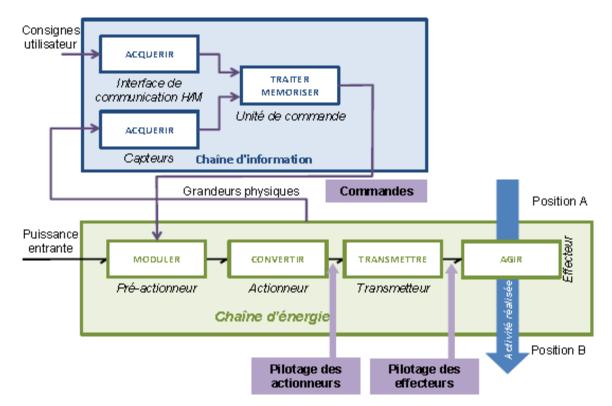
Caractériser le comportement cinématique des transmetteurs linéaires usuels sans transformation de mouvement ou avec transformation de mouvement. Déterminer le rapport de réduction d'un train d'engrenage simple ou épicycloïdal

Table des matières

l Lo	oi entrée-sortie cinématique d'un transmetteur	3
II T	ransmission sans transformation de mouvement : réducteurs et multiplicateurs	3
I	I.1 Rapport de transmission	3
I	I.2 Transmission par adhérence : roues à friction	4
I	I.3 Transmission par obstacle : engrenages	5
	Caractéristiques des dentures	5
	Caractéristiques de fonctionnement	6
	Rapport de transmission	6
	Engrenages usuels	6
I	I.4 Transmission par lien flexible : pignon-chaîne et poulie-courroie	7
III T	Fransmission avec transformation de mouvement	8
I	II.1 Système poulie-courroie	8
I	II.2 Système pignon crémaillère	8
I	II.3 Système vis-écrou	9
IV -	Trains d'engrenages	10
ı	V.1 Train d'engrenages simple	10
ı	V.2 Train d'engrenages épicycloïdal	11
	Structure d'un train épicycloïdal	11
	Relations fondamentales	12
	Déterminer la relation de comportement cinématique	12
	Conditions géométriques de fonctionnement	13

I Loi entrée-sortie cinématique d'un transmetteur

L'objectif du cours est de définir les lois de pilotage des actionneurs à partir des lois de pilotage des effecteurs. Pour cela, il est nécessaire de modéliser le comportement cinématique des transmetteurs.



La description de la chaîne d'énergie permet, pour chaque transmetteur, de définir une grandeur cinématique d'entrée (grandeur flux de la puissance d'entrée) et une grandeur cinématique de sortie (grandeur flux de la puissance de sortie).

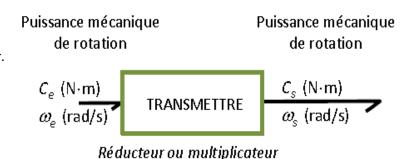
La relation mathématique entre les grandeurs cinématiques d'entrée et de sortie est appelée loi d'entrée-sortie cinématique. Elle caractérise le comportement cinématique du transmetteur.

Nous nous limiterons dans ce cours aux transmetteurs linéaires. La loi d'entrée-sortie est alors une simple relation de proportionnalité.

Il Transmission sans transformation de mouvement : réducteurs et multiplicateurs

II.1 Rapport de transmission

La puissance mécanique de rotation en sortie d'actionneur est rarement directement utilisable par l'effecteur.



Réducteur et multiplicateur adaptent la puissance mécanique de rotation.

Le rapport de transmission est défini comme étant un rapport entre les vitesses angulaires de sortie, $\omega_{\rm s}$, et d'entrée, $\omega_{\rm e}$:

$$i = \frac{\omega_s}{\omega_e}$$
 ou $i = \frac{\omega_e}{\omega_s}$

Pour un **réducteur** : $\omega_s < \omega_e$

Pour un **multiplicateur** : $\omega_s > \omega_e$

Technologiquement, ces transmetteurs sont classés en deux grandes familles :

• transmission par adhérence :

• transmission par obstacle :

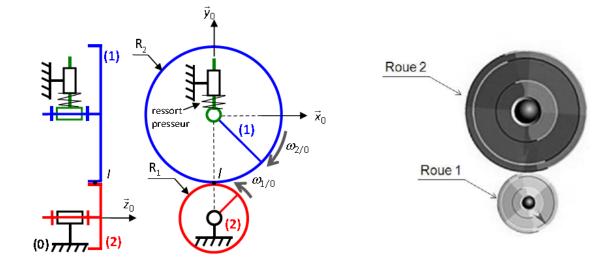
Roue à friction (ex : dynamo de vélo)

Pignon-chaîne (ex : vélo)

Poulie-courroie lisse (ex : alternateur de voiture)

Engrenage (ex : boîte de vitesses)

II.2 Transmission par adhérence : roues à friction



(2) Vitesse de glissement nulle :

(1) On montrera que si ω_s

(1) Pour assurer un

glissement il faut utiliser : - un couple de matériaux avec un fort coefficient d'adhérence :

- un effort presseur entre

roulement sans

les deux roues.

= $i \omega_e$ alors $C_s = C_e / i$

 $\overrightarrow{V_{I\in 2/1}} = \overrightarrow{0}$

Principe

Deux roues cylindriques sont en contact. L'adhérence₍₁₎ permet d'assurer le **roulement** sans glissement entre les roues et donc de transmettre le mouvement de la roue « menante » 1 à la roue « menée » 2.

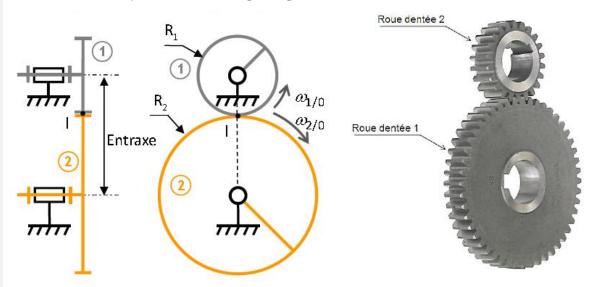
Utilisation Transmissions de faible puissance.

Rapport de transmission

La condition de roulement sans glissement au point l's'écrit⁽²⁾ $\overline{V_{l \in 2/0}} = \overline{V_{l \in 1/0}}$

$$\overrightarrow{V_{l \in 2/0}} = \overrightarrow{V_{O_2 \in 2/0}} + \overrightarrow{IO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \qquad \overrightarrow{V_{l \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} + \overrightarrow{IO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \qquad \text{donc:} \\
= -R_2 \overrightarrow{y_0} \wedge \omega_{2/0} \overrightarrow{z_0} = -R_2 \omega_{2/0} \overrightarrow{x_0} \qquad = R_1 \overrightarrow{y_0} \wedge \omega_{1/0} \overrightarrow{z_0} = R_1 \omega_{1/0} \overrightarrow{x_0} \qquad \Rightarrow \boxed{R_2 \omega_{2/0} = -R_1 \omega_{1/0}}$$

II.3 Transmission par obstacle: engrenages

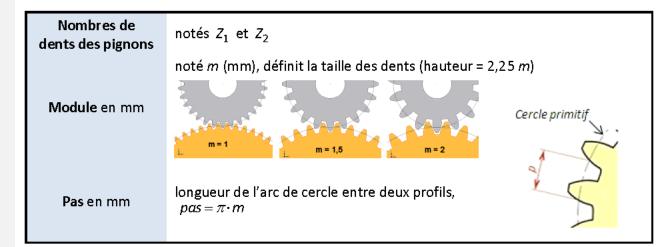


(1) La plus petite des roues dentées est appelée parfois « pignon » et la plus grande est appelée « roue » ou « couronne » dans le cas d'un engrenage intérieur.

Principes

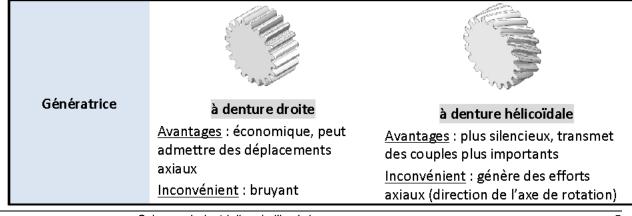
Un engrenage est constitué de **deux roues dentées**(1) qui engrènent l'une avec l'autre. La géométrie de la denture impose, par **obstacle**, la **cinématique des roues à friction** correspondant aux cercles primitifs, cercles **représentés sur les schémas cinématiques**.

Caractéristiques des dentures



(1) En premier, il faut un pas identique pour « passer » d'une dent à l'autre, ce qui implique l'égalité des modules.

Deux pignons engrènent s'ils ont même module⁽¹⁾.



Caractéristiques de fonctionnement

Diamètres primitifs	Soient D_1 et D_2 les diamètres des cercles primitifs (des roues de friction équivalentes) tangents en un point I		
	$D_i = m Z_i$		
Lieu d'engrènement	En <i>I</i> , point de tangence des cercles primitifs, $\overrightarrow{V_{i \in 1/2}} = \vec{0}$		
Entraxe	Distance entre les centres des pignons ${\it O}_{1}{\it O}_{2}$		

(1) même calcul qu'auII.2.(2) Noter le croisement des indices. Utilisation

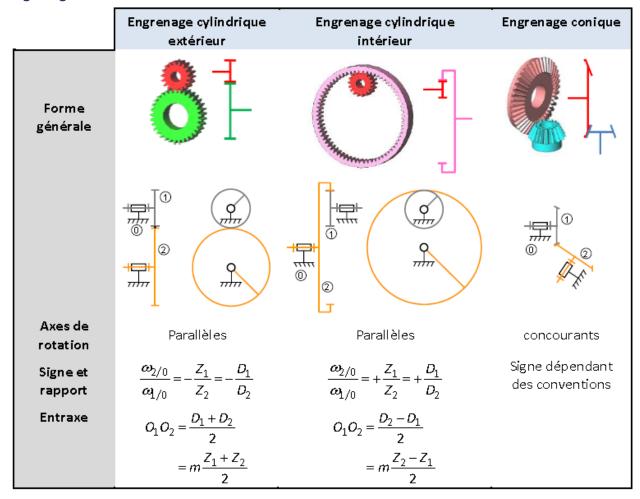
Transmission de faibles et fortes puissances. Applications : de la montre à la boîte de vitesses automobile et aux éoliennes.

Rapport de transmission

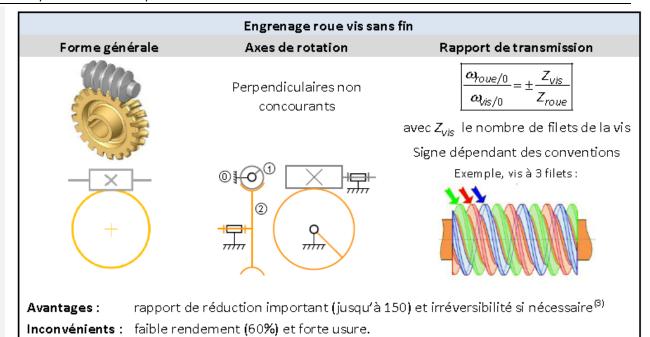
Le rapport est calculé à partir de la condition de roulement sans glissement₍₁₎ au lieu d'engrènement *l*.

Pour tous les engrenages : $\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \pm \frac{Z_1}{Z_2}$ (2) - si cylindrique, contact extérieur + si cylindrique, contact intérieur à identifier sinon

Engrenages usuels

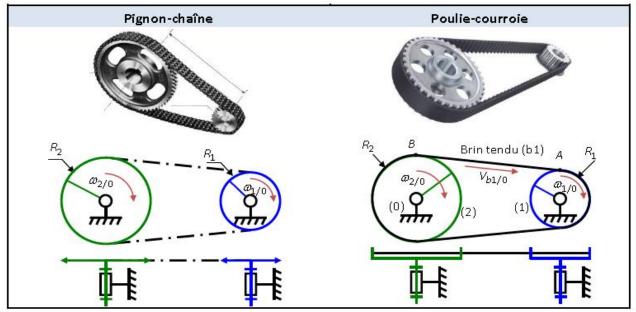


(3) Ce qui peut être utile pour des raisons de sécurité. Sur un treuil de levage par exemple, pour éviter que la charge ne devienne entrainante en cas de coupure d'énergie.



II.4 Transmission par lien flexible : pignon-chaîne et poulie-courroie

Les liens flexibles sont particulièrement avantageux lorsqu'il s'agit de transmettre un mouvement de rotation entre deux axes parallèles distants. Pour une courroie lisse, la transmission est réalisée par adhérence.



Considérons le brin supérieur (b1) de la courroie, tendu entre les 2 poulies (1) et (2) et tangente en A et B aux poulies. En supposant que la courroie ne glisse pas sur les poulies, nous avons, en notant \vec{u} la direction unitaire \overrightarrow{BA} ($u = \overrightarrow{BA} f \| \overrightarrow{BA} \|$):

- non glissement en $A: \vec{V}_{A \in b1/1} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_{A \in b1/0} = \vec{V}_{A \in 1/0} \Rightarrow V_{b1/0} \ \vec{u} = \overrightarrow{O_1 A} \land \vec{\Omega}_{1/0}$, soit, en projection sur \vec{u} , $V_{b1/0} = R_1 \ \omega_{1/0}$
- non glissement en $B: \vec{V}_{B \in b1/2} = \vec{0}$ soit $V_{b1/0} = R_2 \omega_{2/0}$.

d'où la relation $R_1 \, \omega_{1/0} = R_2 \, \omega_{2/0}$.

Dans les **transmissions par liens flexibles**, les poulies ou les pignons tournent dans le **même sens**. Le rapport de transmission s'écrit :

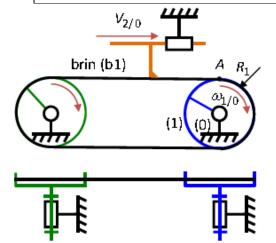
$$\frac{\omega_{1/0}}{\omega_{2/0}} = \frac{R_2}{R_1} \quad 0$$

(1) Noter le croisement des indices.

III Transmission avec transformation de mouvement

III.1 Système poulie-courroie

Si un mouvement est pris sur la **courroie** (la chaîne), l'autre sur une **poulie**, un système poulie-courroie (pignon-chaîne) réalise une **transmission réversible** d'un mouvement de **rotation** en mouvement de **translation**.



La loi entrée-sortie cinématique d'un système poulie-courroie avec transformation de

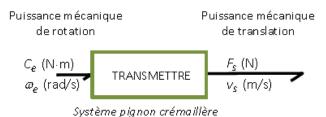
mouvement est : $\frac{v_2/0}{\omega_1/0} = \pm R$

Le signe dépend du paramétrage.

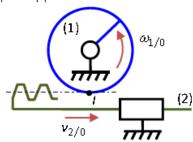
III.2 Système pignon crémaillère

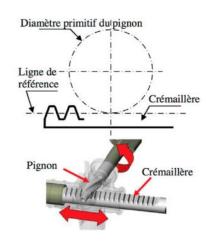
Un système **pignon crémaillère** réalise une transmission par **obstacle**, **réversible**, d'un mouvement de **rotation** en mouvement de **translation**.

L'entrée est soit la puissance mécanique de rotation soit celle de translation.



Dans un système pignon-crémaillère usuel, le pignon est guidé en rotation et la crémaillère est guidée en translation par rapport à un même bâti.





La cinématique d'un système pignon crémaillère est équivalente à celle d'un système « roue-sol » : elle assure le roulement sans glissement du cercle primitif du pignon sur la ligne de référence de la crémaillère.

Au lieu d'engrènement $I: \overline{V_{l \in pignon/cremaillère}} = \vec{0}$

(1) ou
$$\frac{\omega_{1/0}}{v_{2/0}} = \frac{1}{R}$$
.

Utiliser l'homogénéité des termes pour vérifier la relation.

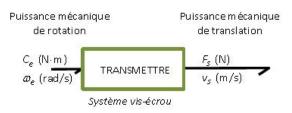
Loi entrée-sortie cinématique d'un système pignon crémaillère :

 $\left| \frac{\mathbf{v}_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \pm R \right|$

avec $R = \frac{mZ}{2}$, Z le nombre de dents du pignon et m son module.

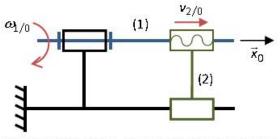
III.3 Système vis-écrou

Un système vis-écrou permet une bonne précision du mouvement et génère des efforts qui peuvent être très importants. L'entrée est généralement la vis, la sortie l'écrou.





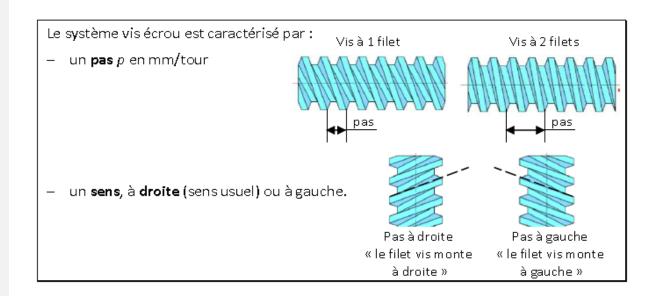
Système vis-écrou à billes



Modèle cinématique d'un axe linéaire basé sur un système vis-écrou



Axe linéaire comprenant un guidage en translation, un moteur électrique et un système vis-écrou



(1) ou
$$\frac{\omega_{1/0}}{v_{2/0}} = \mp \frac{2\pi}{p}$$
.

Utiliser l'homogénéité des termes pour vérifier la relation. Loi entré-sortie cinématique d'un système vis-écrou :

$$\frac{v_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \mp \frac{p}{2\pi}$$

- pour un pas à droite (cas usuel)

+ pour un pas à gauche

Si le système comprend des **billes** qui s'interposent entre la vis et l'écrou, le système est **réversible** : l'entrée peut être la vis ou l'écrou.

Si le système est à **contact direct** (pas d'interposition d'éléments roulants), le système est généralement **irréversible** : l'entrée est obligatoirement la vis.

Démonstration de la loi entrée-sortie : un système vis-écrou n'autorise qu'un seul mouvement, combinaison d'une rotation et d'une translation de même direction.

Ce mouvement est caractérisé par l'équation

$$v_{2/1} = \pm \frac{p}{2\pi} \omega_{2/1}$$
 (+ pour un pas à droite).

Par composition on obtient: $v_{2/0}-v_{1/0}=\pm\frac{p}{2\pi}(x_{2/0}-x_{1/0})$. Or, les liaisons pivot et glissière avec le bâti

imposent :
$$v_{1/0} = 0$$
 $\omega_{2/0} = 0$. D'où le résultat $v_{2/0} = \pm \frac{p}{2\pi} (-\omega_{1/0}) = \mp \frac{p}{2\pi} \omega_{1/0}$.

IV Trains d'engrenages

IV.1 Train d'engrenages simple

Dans un réducteur, pour augmenter le rapport de réduction, on peut associer plusieurs engrenages en série. On parle alors de train d'engrenages.

Lorsque toutes les roues dentées sont en liaison pivot par rapport au bâti, on parle de « train simple ».



(1) Cela n'a de sens que si l'on compare le sens des mouvements de rotation autour d'axes parallèles.

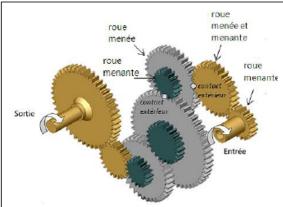
Rapport de transmission d'un train d'engrenages cylindriques :

On suppose que le pignon d'entrée est « menant » et le pignon de sortie est « mené ».

$$\frac{\omega_{s/0}}{\omega_{e/0}} = (-1)^n \cdot \frac{\Pi Z_{Roues\,menantes}}{\Pi Z_{Roues\,men\acute{e}es}}$$

avec n: nombre de contacts extérieurs (2) entre les pignons.

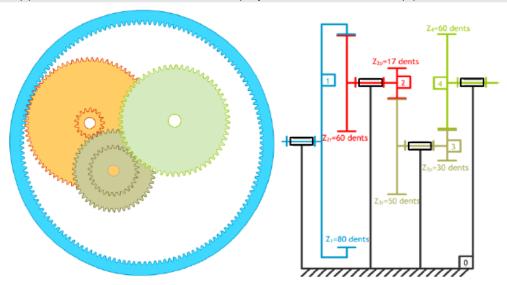
 $(-1)^n$ donne le sens de rotation de la sortie par rapport à l'entrée $^{(1)}$.



Dans un train d'engrenage, on qualifie de roue **menant e** toute roue **motrice** lorsque **l'entrée est motrice**, et de roue menée⁽¹⁾ toute roue réceptrice.

Si une roue est à la fois menante et menée, son nombre de dents n'intervient pas dans le rapport de transmission mais la roue a une incidence sur le signe.

Exemple: rapport de transmission d'un train simple, entrée sur l'ensemble (1)



A1 - Déterminer le rapport de transmission
$$i = \frac{\omega_4/0}{\omega_1/0}$$

Soit 1 la roue d'entrée de ce réducteur et 4 la roue de sortie. On suppose que 1 est menant. Le rapport de transmission est tel que :

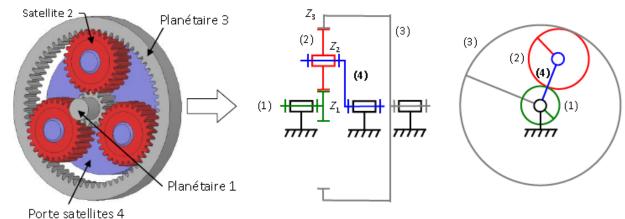
$$i = \frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = (-1)^2 \; \frac{Z_1}{Z_{2r}} \frac{Z_{2p}}{Z_{3r}} \frac{Z_{3p}}{Z_4} = \frac{80 \times 17 \times 30}{60 \times 50 \times 60} \; , \; \text{soit} \; \boxed{i = 0,23}$$

Cela signifie que ce réducteur divise la vitesse angulaire quasiment par quatre.

IV.2 Train d'engrenages épicycloïdal

Les **trains épicycloïdaux** permettent d'obtenir des **rapports de réduction importants dans un encombrement faible** avec des **axes** d'entrée et sortie **coaxiaux**. Ils sont très souvent associés aux moteurs électriques.

Structure d'un train épicycloïdal



"L'utilisation de plusieurs satellites ne modifie pas le comportement cinématique du réducteur mais permet de mieux répartir les efforts.

Structure et modèle de comportement cinématique d'un train épicycloïdal

Le modèle cinématique d'un train épicycloïdal comprend 2 engrenages en série, notés (1)-(2) et (2)- (3) sur le schéma

L'ensemble intermédiaire (2) est appelé satellite, les autres pignons (1) et (3) sont les planétaires.

Les engrenages sont donc : planétaire 1 – satellite et satellite – planétaire 2.

Les **spécificités** d'un train épicycloïdal sont que :

- le satellite est en liaison pivot avec le porte-satellite et le porte-satellite est en liaison pivot avec le bâti ;
- pour des raisons de répartition des efforts, il peut y avoir **plusieurs satellites**. La prise en compte **d'un seul** est suffisante d'un point de vue **cinématique**.

(1) Dans la majorité des cas :

- l'un des deux planétaires est l'entrée;
- l'autre planétaire est fixe ;
- le porte-satellite est la sortie.

Constituants ⁽¹⁾					
Porte-satellite	Pièce en liaison pivot avec le bâti et les satellites				
Satellite	Ensemble engrenant avec les 2 planétaires				
Planétaires	Pignon ou roue engrenant avec le satellite				

Relations fondamentales

Pour déterminer la loi entrée-sortie d'un train épicycloïdal, on considère le **train simple relativement au porte-satellite**, en prenant comme entrée et sortie les planétaires :

$$\frac{\alpha_{Pla,A/Po,Sa}}{\omega_{Pla,B/Po,Sa}}$$
 = λ avec λ le rapport de transmission du train ainsi défini.

Par composition des vitesses on obtient, $\frac{\boldsymbol{\omega}_{P|a,A/0} - \boldsymbol{\omega}_{Po,Sa/0}}{\boldsymbol{\omega}_{P|a,B/0} - \boldsymbol{\omega}_{Po,Sa/0}} = \lambda$, puis la relation ci-dessous de Willis.

Soit \mathcal{A} , raison de base du train épicycloïdal, le rapport de transmission du train d'engrenages simple obtenu porte-satellite bloqué:

$$\left. \lambda = \frac{\omega_{P/a, A/0}}{\omega_{P/a, B/0}} \right|_{\omega_{Pa, Sa/0} = 0}$$

De plus,
$$\lambda = \frac{\alpha_{\text{Pl}a.A/Po.Sa}}{\alpha_{\text{Pl}a.B/Po.Sa}}$$
, d'où la r**elation de Willis** :

$$\omega_{P/a,A/0} - \lambda \cdot \omega_{P/a,B/0} + (\lambda - 1) \cdot \omega_{Po,Sa/0} = 0$$

avec $Pla \cdot A = planétaire A$ $Pla \cdot B = planétaire B$ $Po \cdot Sa = porte - satellite$

L'utilisation d'un train épicycloïdal comme réducteur nécessite d'imposer la vitesse angulaire par rapport au bâti de deux des trois entrées possibles : $\omega_{Pla,A/0}$, $\omega_{Pla,B/0}$ ou $\omega_{Po,Sa/0}$

Dans la pratique, on **bloque** souvent l'une d'entre-elles ; on impose la vitesse de rotation à la deuxième ; la troisième est imposée par la relation de Willis.

Déterminer la relation de comportement cinématique

Pour déterminer la relation de comportement cinématique d'un train épicycloïdal :

- 1) identifier les composants (satellite, porte-satellite, planétaires);
- 2) choisir un planétaire A et un planétaire B en les distinguant du bâti ;

en supposant qu'aucune pièce n'est contrôlée (1):

- 3) calculer la raison de base λ en fonction des Z_i , nombres de dents des pignons ;
- 4) appliquer la formule de Willis en utilisant les indices du modèle ;
- 5) appliquer les spécificités du train (élément bloqué ou contrôlé, entrée, sortie...).

(1) Cela implique qu'il faut imaginer que

certaines pièces sont «

libérées ».

Exemple: soit le train défini ci-contre. (1) est l'entrée.

A2 - Déterminer le rapport de transmision.

- 1) (2) est le satellite, il engrène avec 2 pignons;
 - (4) est alors le porte-satellite ;
 - (1) et (0) les planétaires. (0) est aussi le bâti.
- Choix: Planétaire A = (1). Planétaire B noté (3) en distinguant le planétaire du bâti.
- En appliquant les formules :

$$\lambda = \frac{\omega_{Pla,A/0}}{\omega_{Pla,B/0}} \bigg|_{\omega_{Pla,Sa/0} = 0}$$
 donne, en remplaçant les indices et en

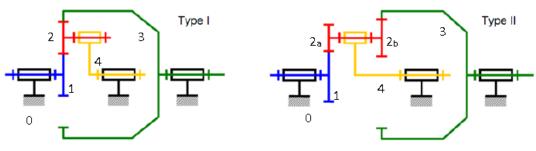
vérifiant bien, à la fin du calcul, que les indices sont croisés

$$\lambda = \frac{\omega_{1/0}}{\omega_{3/0}}\bigg|_{\omega_{4/0} = 0} = (-1)^2 \frac{Z_3}{Z_{2b}} \frac{Z_{2a}}{Z_1}$$

- 4) et $\omega_{Pla,A/0} \lambda \cdot \omega_{Pla,B/0} + (\lambda 1) \cdot \omega_{Po,Sa/0} = 0$ donne $\omega_{1/0} \lambda \cdot \omega_{3/0} + (\lambda 1) \cdot \omega_{4/0} = 0$
- 5) La spécificité du train est que le porte-satellite (3) est bloqué. On a $\,\varpi_{3/0}=0$, donc :

$$\omega_{1/0} + \left(\lambda - 1\right)\omega_{4/0} = 0 \Longrightarrow i = \frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{1}{1 - \lambda} \Longrightarrow i = \frac{Z_{2b} Z_1}{Z_{2b} Z_1 - Z_3 Z_{2a}}$$

Conditions géométriques de fonctionnement



Les conditions géométriques indispensables au montage et au fonctionnement du train épicycloïdal

impliquent des relations entre les entraxes et donc sur les diamètres primitifs : $\frac{D_1 + D_2}{2} = \frac{D_3 - D_2}{2}$

Exemple pour le train épi. de type I, les modules Exem étant obligatoirement égaux :

étant obligatoirement égaux :

$$D_3 = D_1 + 2.D_2 \Rightarrow z_3 = z_1 + 2.z_2$$

Exemple pour le train épi. de type ${
m II}$, si les modules sont égaux :

 Z_1

$$R_1 + R_{2a} + R_{2b} = R_3 \Longrightarrow z_1 + z_{2a} + z_{2b} = z_3$$



				•	
◟	1	١,	\sim	1	rs
. 7	а	v	l J	1	1.7

Je c	onnais :
	Les lois entrée-sortie des transmetteurs élémentaires, systèmes à roues à friction, à engrenages extérieur,
inté	rieur ou conique, à roue et vis sans fin, pignon crémaillère et vis-écrou
	Les principes technologiques des différents transmetteurs
	La structure d'un train d'engrenages simple
	La structure d'un train épicycloïdal
	La définition de la raison de base d'un train épicycloïdal et la relation de Willis
Sa	voir-faire
Je s	ais:
	Reconnaitre les transmetteurs « élémentaires » dans une chaîne d'énergie
	Déterminer rapidement le rapport de transmission d'un train d'engrenages simple
	Déterminer le rapport de transmission d'un train épicycloïdal
	Déterminer le rapport de transmission global d'une chaîne d'énergie
	Écrire une condition géométrique de fonctionnement d'un train épicycloïdal