



# **Cours C13\_ Modéliser les résistances au mouvement et les actions locales (STA)**

## Statique

## Objectifs

Modéliser et déterminer les actions mécaniques de contact avec prise en compte du frottement.  
 Modéliser une action mécanique à partir d'un modèle local.  
 Modéliser l'action de pesanteur à partir du modèle local et modéliser les actions de contact avec frottement.

## Table des matières

I Modélisation du frottement et de l'adhérence d'un contact ponctuel .....	2
I.1 Notion d'adhérence et de frottement .....	2
I.2 Résistance au glissement et loi de Coulomb .....	2
Mise en évidence des phénomènes de frottement et d'adhérence.....	2
Lois de Coulomb.....	3
Cône de frottement :.....	4
Hypothèses sur le coefficient d'adhérence.....	4
I.3 Phénomène d'arc-boutement .....	5
I.4 Résistance au roulement et au pivotement .....	5
II Modèle local et modèle global d'une action mécanique.....	6
II.1 Modèle local des actions à distance et de contact.....	6
Définitions permettent de définir un torseur d'action mécanique locale :.....	6
II.2 Du modèle local au modèle global .....	7
II.3 Cas de la pesanteur .....	7
II.4 Point de vue local des actions de contact avec adhérence ou frottement .....	8

## I Modélisation du frottement et de l'adhérence d'un contact ponctuel

### I.1 Notion d'adhérence et de frottement

Les phénomènes de frottement et d'adhérence sont omniprésents dans l'étude du comportement et la conception des systèmes. Ils peuvent être :

- **utiles** lorsqu'il s'agit de freiner ou d'accélérer un solide,
- **néfastes** lorsqu'ils sont à l'origine de pertes d'énergie ou d'usures trop importantes,
- **négligés** dans de nombreuses études.

**Frottement et adhérence** caractérisent une **résistance au glissement** entre 2 solides en contact :

- frottement, s'il existe un **mouvement relatif** (glissement) ;
- adhérence, s'il n'existe pas de mouvement relatif (pas de glissement).

Ces phénomènes sont présents pour des actions mécaniques de contact surfacique et ponctuel.

### I.2 Résistance au glissement et loi de Coulomb

#### Mise en évidence des phénomènes de frottement et d'adhérence

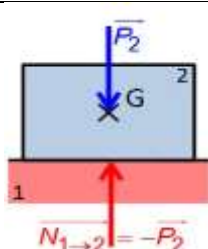
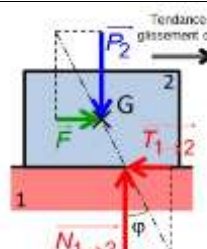
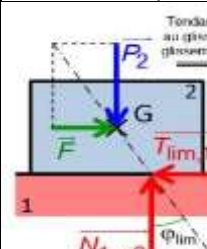
On prend l'exemple d'un colis S2 posé sur un plan horizontal S1 sur lequel on applique un effort horizontal de plus en plus important avec comme objectif de le faire glisser.

On suppose que le **système est à l'équilibre** à tout instant. Les actions exercées sur S2 sont :

- $\vec{P}_2$  résultante de la force de pesanteur sur S2 et  $\vec{F}$ , résultante de la force agissant sur S2 dans le but de le faire glisser, de droite d'action passant par G ;
- l'action de S1 sur S2.

L'action équivalente aux forces de résultantes  $\vec{P}_2$  et  $\vec{F}$  est une force. À l'équilibre, l'action de S1 sur S2 est donc (cf. PFS) aussi une force passant par G. On note  $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$  sa résultante et :

- $\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$  la **composante normale** au contact de S1 sur S2 ;
- $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  la **composante tangentielle** au contact, associée à l'adhérence ou au frottement.

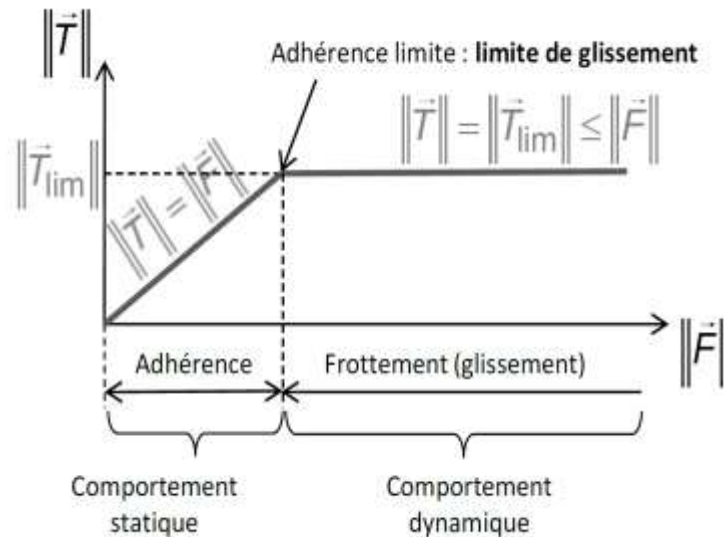
SITUATION INITIALE	TENDANCE AU GLISSEMENT	TENDANCE LIMITE AU GLISSEMENT ou GLISSEMENT
Le colis S <sub>2</sub> est au repos	L'action mécanique $\vec{F}$ agit sur S <sub>2</sub> et tend à le faire glisser par rapport à S <sub>1</sub> .	S <sub>2</sub> est à la limite de glisser, ou glisse par rapport au sol dans le même sens que $\vec{F}$
		
	Le théorème de la résultante statique montre que $\vec{T}_{1 \rightarrow 2} \neq \vec{0}$ : une <b>composante tangentielle s'oppose au mouvement relatif</b> entre S <sub>2</sub> et S <sub>1</sub> .	
	La résultante $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ est inclinée d'un angle $\varphi$ par rapport à la normale. S <sub>2</sub> se met à glisser par rapport à S <sub>1</sub> . Il existe aussi un <b>angle limite</b> d'inclinaison $\varphi_{lim}$	
$\ \vec{T}\  = \ \vec{F}\  = 0$	$\ \vec{T}\  = \ \vec{F}\  < \ \vec{T}_{lim}\ $	$\ \vec{T}\  = \ \vec{T}_{lim}\  = \ \vec{F}\ $ (1)
	<b>ADHERENCE</b> (équilibre stable)	<b>ADHERENCE LIMITE ou FROTTEMENT</b>

(1) si  $\|\vec{T}_{lim}\| \leq \|\vec{F}\|$ , l'équilibre statique est rompu. Les lois de la dynamique conduisent à l'équation :

$$m \frac{dV_{G \in 2/1}}{dt} = \vec{T}_{lim} - \vec{F}$$

Le vecteur accélération est non nul : le solide S<sub>2</sub> est mis en mouvement et glisse sur S<sub>1</sub>.

Évolution de la résultante des actions tangentielles de frottement et d'adhérence :



**Lois de Coulomb**

Soient deux solides 1 et 2 en contact supposé ponctuel au point P. Le torseur d'action mécanique de (1) sur (2) s'écrit :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\}_P = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- $\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$  la **composante normale** au contact ;
- $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  la **composante tangentielle**<sup>(1)</sup> associée au frottement ou à l'adhérence.

(1) appartient au plan tangent commun.

(2) souvent noté f et nommé coefficient de frottement.

(3) le vecteur t appartient au plan tangent commun.

(4) la composante tangentielle est :  
 - colinéaire à la vitesse de glissement ;  
 - de sens opposé à la vitesse de glissement.

La loi de Coulomb s'écrit :

$$\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq \mu \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\| \text{ avec } \mu \text{ le coefficient d'adhérence}^{(2)} (\mu \geq 0).$$

- En cas d'adhérence :  
 $\vec{V}_{P \in 2/1} = \vec{0}$  et  $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq \mu \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$
- En cas de frottement (glissement) :  
 $\vec{V}_{P \in 2/1} \neq \vec{0}$  et  $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = \mu \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$

La composante tangentielle s'oppose au glissement.

Soit  $\vec{t} = \frac{\vec{V}_{P \in 2/1}}{\|\vec{V}_{P \in 2/1}\|}$ <sup>(3)</sup> la direction du vecteur glissement alors  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2} = -\mu \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\| \vec{t}$

d'où  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2} \wedge \vec{V}_{P \in 2/1} = \vec{0}$  et  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{V}_{P \in 2/1} < 0$ <sup>(4)</sup>.

En limite de glissement : on suppose qu'il y a adhérence et que la direction de la composante tangentielle peut être déterminée par la tendance au glissement. La démarche est la suivante :

- supposer un mouvement de 2/1 en cas de **rupture de l'adhérence** ;
- en déduire la **direction de la composante tangentielle**  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2} = -T_{1 \rightarrow 2} \vec{t}$  avec  

$$\vec{t} = \frac{\vec{V}_{P \in 2/1}}{\|\vec{V}_{P \in 2/1}\|}$$
- **appliquer la loi de Coulomb** et en déduire l'action de 1 sur 2 :  

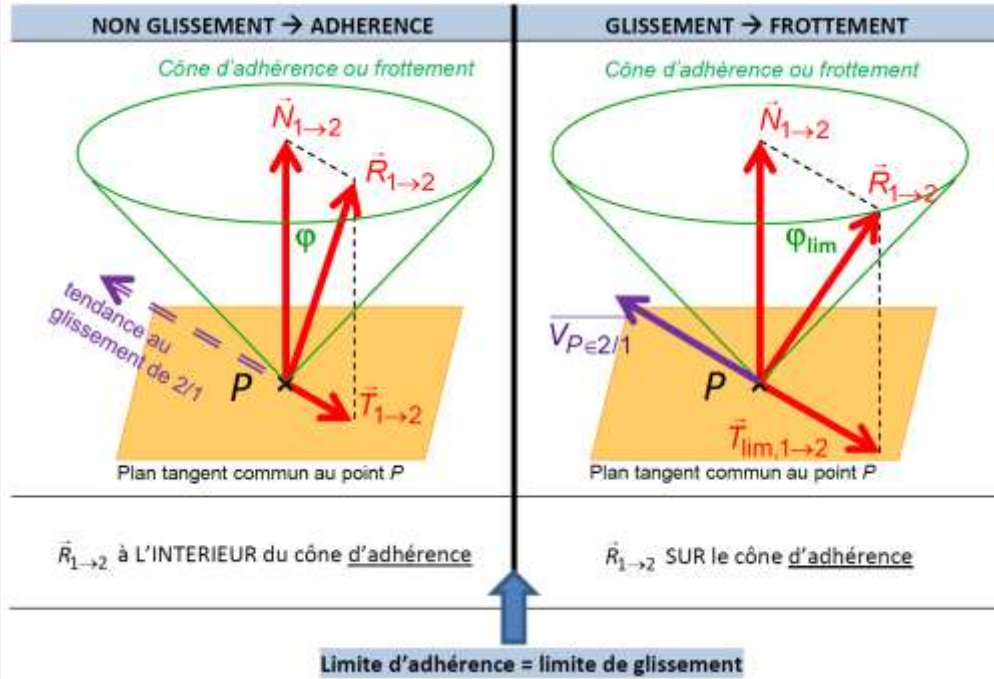
$$\{T_{1 \rightarrow 2}\}_P = \begin{Bmatrix} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} - \mu \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\| \vec{t} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$
- **vérifier l'équilibre** de  $S_2$  (PFS), ce qui permet de valider l'hypothèse cinématique.

**Cône de frottement :**

Soit l'angle d'adhérence  $\varphi$  tel que  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2} = \tan\varphi \cdot \vec{N}_{1 \rightarrow 2}$

Soit  $\varphi$  tel que , l'angle d'adhérence limite.  $\mu = \tan\varphi_{lim}$

La cône d'adhérence est un cône de sommet le point de contact et de demi-angle  $\varphi_{lim}$ .



(1) Il dépend aussi :  
 - de l'état de rugosité des surfaces en contact ;  
 - de la température des surfaces en contact ;  
 - .

**Hypothèses sur le coefficient d'adhérence**

Par hypothèse, la valeur du coefficient d'adhérence

ne dépend pas :	dépend essentiellement(1) :
<ul style="list-style-type: none"> <li>- de l'intensité de la force élémentaire de pression ;</li> <li>- de l'étendue de la surface de contact.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- de la <b>nature des matériaux</b> en contact ;</li> <li>- de la présence ou non de <b>lubrifiant</b>.</li> </ul>

Matériaux en contact	f ou $\mu$	
	Surfaces sèches	Surfaces lubrifiées
Téflon/Acier	0.04	-
Acier/Bronze	0.10	0.09
Acier/Acier	0.15	
Bronze/Bronze	0.2	
Acier/Fonte	0.16	0.08 à 0.04
Fonte/Bronze	0.20	0.08 à 0.04
Nylon/Acier	0.35	0.12
Bois/Bois	0.4 à 0.2	0.16 à 0.04
Pneu/Route	0.6	0.30 à 0.10

Quelques ordres de grandeurs de coefficient de frottement :

### I.3 Phénomène d'arc-boutement

On appelle arc-boutement, un phénomène issu de l'adhérence pour lequel un équilibre subsiste indépendamment de l'intensité de l'effort qui tend à le rompre.

**Exemple :** sur un meuble à étagère réglable, c'est le phénomène d'arc-boutement qui solidarise l'étagère mobile à la colonne fixe.



### I.4 Résistance au roulement et au pivotement

Le raisonnement effectué pour le glissement peut être appliqué au roulement et au pivotement.

Par analogie avec les lois de Coulomb :

– le roulement ou la tendance au roulement donnera naissance à une **résistance au roulement** modélisée par un **moment de résistance au roulement** ;

– le pivotement ou la tendance au pivotement donnera naissance à une **résistance au pivotement** modélisée par un **moment de résistance au pivotement**.

Soit A un point de contact entre 2 solides 1 et 2. L'action mécanique de 1 sur 2 est modélisée en A par le torseur suivant :

- Contact ponctuel avec résistance au glissement (Rappel des lois de Coulomb)

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \text{ où } \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \text{ est la résultante tangentielle de résistance au glissement}$$

$$\text{Avec } \|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq \mu \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$$

$\mu$  coefficient de frottement (sans dimension)

$\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  s'oppose au glissement ou à la tendance au glissement de 2/1

- Pivotement avec résistance au pivotement

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}^p \end{array} \right\} \text{ où } \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}^p \text{ est le moment de résistance au pivotement en A}$$

$$\text{Avec } \|\vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}^p\| \leq \delta \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$$

$\delta$  coefficient de résistance au pivotement (exprimé en m)

$\vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}^p$  s'oppose au pivotement ou à la tendance au pivotement de 2/1

- Pivotement avec résistance au roulement

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}^r \end{array} \right\} \text{ où } \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}^r \text{ est le moment de résistance au roulement en A}$$

$$\text{Avec } \|\vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}^r\| \leq \eta \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$$

$\eta$  coefficient de résistance au roulement (exprimé en m)

$\vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}^r$  s'oppose au roulement à la tendance au roulement de 2/1

- Cas général : combinaison de tous les mouvements ou tendance aux mouvements

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}^p + \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}^r \end{array} \right\}$$

On utilise toujours les mêmes relations pour  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ ;  $\vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}^p$ ;  $\vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}^r$  en fonction de  $\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$ .

NB : tous ces vecteurs sont obtenus par projection sur la normale et sur le plan tangent commun en A à 1 et 2.



## II Modèle local et modèle global d'une action mécanique

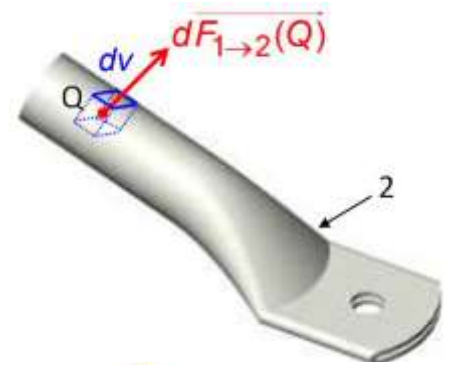
### II.1 Modèle local des actions à distance et de contact

(1) cette modélisation est aussi nécessaire pour la prise en compte des résistances au glissement.

Les **actions locales** permettent de modéliser finement les actions à distances et les actions de contact<sup>(1)</sup> par des **champs de forces** volumique ou surfacique.

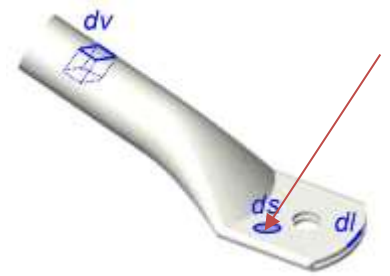
Considérons l'action à distance d'un ensemble (1) sur le solide (2) et un élément de volume  $dV$  de (2) centré sur le point  $Q$ .

L'action à distance locale de (1) sur (2) sur le **volume élémentaire**  $dV$  centré sur le point  $Q$  est une **force élémentaire** de résultante  $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(Q) = \vec{q}(Q)dV$  passant par  $Q$ .



De même, sur un élément de surface  $dS$  :

L'action de contact locale de (1) sur (2) sur la **surface élémentaire**  $dS$  centrée sur le point  $Q$  est une **force élémentaire** de résultante  $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(Q) = \vec{q}(Q)dS$  passant par  $Q$



Définitions permettent de définir un torseur d'action

mécanique locale :  $\{dT_{1 \rightarrow 2}\}(Q) = \begin{Bmatrix} d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(Q) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

L'expression de la résultante élémentaire  $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(Q)$  varie en fonction de la nature de l'élément de (2), associé à  $Q$  :

Nature et forme de l'élément		Densité de l'action mécanique $\vec{q}$	Expression de $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(Q)$
Ligne		linéique [N·m <sup>-1</sup> ]	$\vec{q} \cdot dl$
Surface		surfacique [N·m <sup>-2</sup> ] ou [Pa] <sup>(2)</sup>	$\vec{q} \cdot ds$
Volume		volumique [N·m <sup>-3</sup> ]	$\vec{q} \cdot dv$

(2) une densité surfacique est homogène à une pression.



L'ensemble des forces élémentaires agissant sur l'ensemble des éléments concerné par l'action mécanique défini un **champ de forces** associé à l'action mécanique.

## II.2 Du modèle local au modèle global

Le modèle global d'une action mécanique est l'action équivalente à l'ensemble des actions locales.

Le torseur d'action mécanique du modèle global est la **somme des torseurs des actions mécaniques locales** :  $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \int \{dT_{1 \rightarrow 2}\}(Q)$

Avec  $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \int d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(Q)$  (en N) pour la résultante

$\vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} = \int \vec{AQ} \wedge d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(Q)$  (en N.m) pour le moment

## II.3 Cas de la pesanteur

Si un solide est **supposé homogène**, sa masse volumique est supposée constante dans le volume :  $\forall Q \in \text{solide}, \rho(Q) = \rho = C^{te}$

Quelques ordres de grandeur :	Acier	Aluminium	PVC
	$\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\rho = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\rho \approx 1400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

### Point de vue local

L'action de la pesanteur sur un solide (1) est une **action mécanique à distance**. Le champ de force associé est tel que :  $\forall Q \in 1,$

$$d\vec{F}_{pes \rightarrow 1}(Q) = dm \vec{g} = \rho dv \vec{g}$$

$\vec{g}$  est le **champ de pesanteur** :

- orienté suivant la verticale descendante ;
- de norme  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .



Pare-brise arrière de Citroën C1

### Point de vue global

Les forces locales étant des forces de résultantes parallèles à  $\vec{g}$ , le torseur du modèle global est nécessairement

aussi une force orientée par  $\vec{g}$ , nommée **force de pesanteur ou poids**.

La **résultante** de l'action de la pesanteur sur (1) est telle que :

$$\vec{R}_{pes \rightarrow 1} = \int_{V_1} d\vec{F}_{pes \rightarrow 1}(Q) = \int_{V_1} \rho dv \vec{g} = \rho \vec{g} \int_{V_1} dv = \rho \vec{g} V_1 = m_1 \vec{g} \text{ avec } \begin{matrix} V_1 \\ m_1 \end{matrix} \begin{matrix} \text{volume de (1)} \\ \text{volume de (1)} \end{matrix}$$

Soit  $G_1$  le **centre de gravité** de (1). Comme barycentre des masses, il vérifie (1) :

Déterminons le moment de l'action globale en  $G_1$ :

$$\vec{OG}_1 = \frac{1}{m_1} \int_{V_1} \vec{OQ} \cdot dm \text{ avec } dm = \rho(Q) dv \quad \text{et} \quad \int_{V_1} \vec{G}_1 \vec{Q} dm = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{G_1, pes \rightarrow 1} = \int_{V_1} \vec{G}_1 \vec{Q} \wedge d\vec{F}_{pes \rightarrow 1}(Q) = \int_{V_1} \vec{G}_1 \vec{Q} \wedge (\vec{g} dm) = \left( \int_{V_1} \vec{G}_1 \vec{Q} dm \right) \wedge \vec{g} = \vec{0} \text{ par définition de } G_1$$

$G_1$  est donc un point de la droite d'action de la force de pesanteur.

**L'action de la pesanteur sur un solide (1) est une force (un glisseur) passant par le**

**centre de gravité  $G_1$  de (1) :**  $\{T_{pes \rightarrow 1}\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} m \vec{g} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \left\{ \int_{V_1} \vec{OQ} \wedge d\vec{F}_{pes \rightarrow 1}(Q) \right\}_O$

(1) si le solide est homogène :

$$m_1 = \rho V_1 \text{ et } \rho(Q) = \rho \text{ d'où :}$$

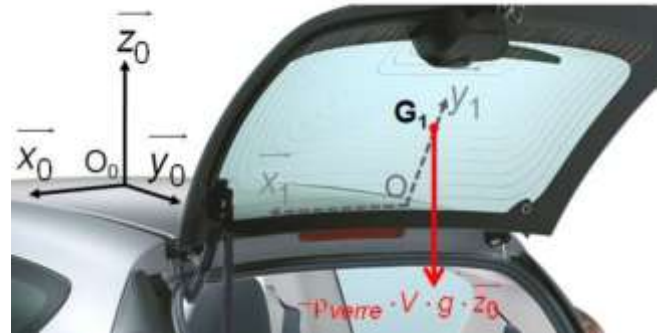
$$\vec{OG}_1 = \frac{1}{V_1} \int_{V_1} \vec{OQ} dv$$

✋ Pour des solides dont certaines dimensions sont négligeables (plaques, tiges) on utilisera un élément ds ou dl et une masse surfacique ou linéique.



Le centre de gravité est toujours situé sur les éléments de symétrie du solide : point, plan, droite...

Dans le cas du pare-brise :  $G_1$  est dans le plan  $(OY_1Z_1)$ .



## II.4 Point de vue local des actions de contact avec adhérence ou frottement

En tout point  $P$  de la surface de contact :

$$\{dT_{1 \rightarrow 2}\}(P) = \begin{cases} d\vec{R}_{1 \rightarrow 2}(P) = d\vec{N}_{1 \rightarrow 2}(P) + d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}(P) \\ \vec{0} \end{cases}$$

avec :

- $d\vec{N}_{1 \rightarrow 2}(P) = -p(P) dS \vec{n}_{21}(P)$  **composante normale locale**.  $p(P)$  pression en  $P$  et  $\vec{n}_{21}(P)$  normale sortante à  $S_2$  ;
- $d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}(P)$  **composante tangentielle locale** (inclue dans le plan tangent commun en  $P$ ).

La loi de Coulomb s'applique aux actions locales de contact avec adhérence entre deux solides 1 et 2.

- $\|d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq \mu \|d\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\| \Rightarrow \|d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq \mu p dS$  en cas d'adhérence ;
- $\|d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = \mu \|d\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\| \Rightarrow \|d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = \mu p dS$  en cas de frottement (glissement) avec,  
si  $\vec{t}(P) = \vec{V}_{P \in 2/1} / \|\vec{V}_{P \in 2/1}\|$ ,  $d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}(P) = -\mu p(P) dS \vec{t}(P)$

En limite de glissement, la démarche de détermination des actions locales est identique à celle pour l'action ponctuelle. Il est cependant nécessaire d'ajouter une hypothèse sur le champ de pression et de déterminer l'action globale.

**En limite de glissement** : on suppose qu'il y a adhérence et, qu'en tout point de la surface de contact, la direction de la composante tangentielle peut être déterminée par la tendance locale au glissement.

La démarche est la suivante :

- supposer un mouvement de 2/1 en cas de rupture de l'adhérence en définissant un **torseur cinématique**  $\{V_{2/1}\}$  ;
- en déduire la **direction de la composante tangentielle en tout point de la surface de contact** :  $\vec{t}(P) = \vec{V}_{P \in 2/1} / \|\vec{V}_{P \in 2/1}\|$
- **appliquer la loi de Coulomb** à l'action locale :

$$\{dT_{1 \rightarrow 2}\}(P) = \begin{cases} (\vec{n}_{21}(P) - \mu \vec{t}(P)) p(P) dS \\ \vec{0} \end{cases}$$

- **Déterminer l'action globale** par intégration en utilisant une **hypothèse sur le champ de pression**.
- **vérifier l'équilibre** de  $S_2$  (PFS), ce qui permet de valider l'hypothèse cinématique.