

# Prévoir le comportement fréquentiel des SLCI

Automatique linéaire

## Objectifs

Connaître le comportement fréquentiel des systèmes usuels  
 Savoir construire le diagramme de Bode d'un système quelconque  
 Connaître le lien entre comportement fréquentiel et temporel

## Sommaire

<b>I</b>	<b>L'analyse fréquentielle</b>	<b>3</b>
<b>II</b>	<b>Réponse fréquentielle (ou harmonique) des SLCI</b>	<b>3</b>
II.1	Caractéristiques du comportement fréquentiel	3
II.2	Gain, déphasage et fonction de transfert : $ G(\omega)  =  H(j\omega) $ et $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$	4
II.3	Les diagrammes de Bode, lieu de transfert pour les études fréquentielles	5
II.4	Propriétés pour la construction d'un diagramme de Bode	7
II.5	Filtres, bande passante et pulsation de coupure	8
<b>III</b>	<b>Diagrammes de Bode des systèmes usuels</b>	<b>9</b>
III.1	Diagramme de Bode des fonctions définissant le comportement à basse fréquence	9
III.2	Diagramme de Bode d'un système du 1 <sup>er</sup> ordre	10
III.3	Diagramme de Bode d'un système du 2 <sup>ème</sup> ordre	11
III.4	Inverses d'un premier et deuxième ordre	14
III.5	Diagramme de Bode d'un système à retard pur	15
III.6	Réponse harmonique si $K < 0$	15
<b>IV</b>	<b>Méthode générale de construction des diagrammes de Bode</b>	<b>15</b>
<b>V</b>	<b>Comparaison des études temporelle et fréquentielle</b>	<b>16</b>
V.1	Relation Bande passante et rapidité	16
V.2	Synthèse sur les différents gains	17
V.3	Synthèse sur les différentes pulsations	17
	<b>Rappels sur les logarithmes et les complexes</b>	<b>18</b>
	<b>Diagrammes de Bode des fonctions élémentaires : démonstrations</b>	<b>19</b>

# I L'analyse fréquentielle

L'analyse fréquentielle d'un système s'intéresse à sa réponse à une **sollicitation périodique**.

**Exemples :**  
cuillère anti-tremblements



Robot de chirurgie



Stabilisateur de smartphone



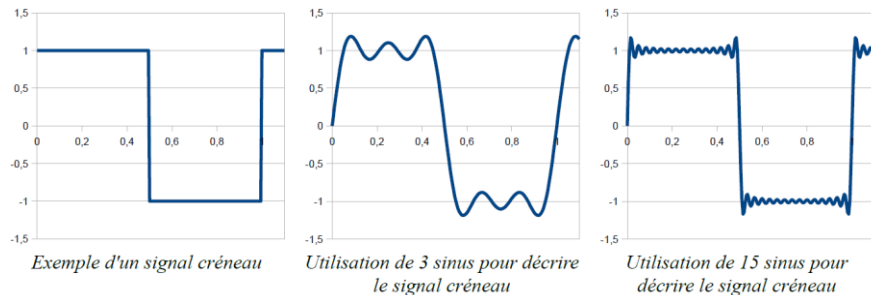
Exemples de système dont l'amplitude des oscillations du signal de sortie doit être atténuée.

L'analyse fréquentielle des systèmes linéaires<sup>(1)</sup> permet de **caractériser le comportement** d'un système à partir de sa **réponse en régime permanent à des entrées sinusoïdales**<sup>(2)</sup>.

En **régime permanent**, la réponse du système est **indépendante de l'état initial** du système.

L'analyse fréquentielle permet :

- l'étude et la **conception des correcteurs** (traitées en 2<sup>ème</sup> année) ;
- la **prédiction du comportement temporel** en considérant le signal d'entrée comme une somme de signaux sinusoïdaux (transformée de Fourier). La réponse est la somme des réponses à chacun des signaux d'entrée.



Exemple de décomposition en signaux sinusoïdaux

(1) Système modélisé en SLCI : linéaire, continu, invariant.

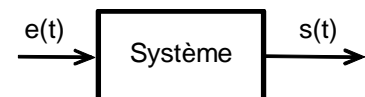
(2) la réponse à un échelon permet de caractériser un système à partir de sa réponse transitoire.

## II Réponse fréquentielle (ou harmonique) des SLCI

### II.1 **Caractéristiques du comportement fréquentiel**

Soit un système linéaire continu et invariant d'entrée  $e(t)$  et de sortie  $s(t)$  caractérisé par l'équation différentielle à coefficients constants :

$$(i) \quad a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 e(t)$$



La solution de l'équation est la somme des **solutions générales** de l'équation sans second membre<sup>(3)</sup> (entrée nulle) et d'une **solution particulière** avec second membre (entrée sinusoïdale).

Les solutions **générales** dépendent des **conditions initiales** et caractérisent le **régime transitoire**. Pour un système stable et dissipatif, cette solution converge vers 0.

La solution **particulière** ne dépend pas des conditions initiales et caractérise le **régime permanent**. Pour une entrée sinusoïdale, la **solution particulière est aussi un signal sinusoïdal** de même pulsation que l'entrée.

Le système étant linéaire, à pulsation d'entrée donnée, **l'amplitude du signal sinusoïdal de sortie est proportionnelle à l'amplitude du signal d'entrée**.

(3) équation homogène

(1) appelée aussi réponse forcée ou régime établi.

Tout SLCI, soumis à une **entrée harmonique** (sinusoïdale) de pulsation  $\omega$ , présente une réponse en **régime permanent**<sup>(1)</sup> **harmonique de même pulsation**, définie par un **gain**  $G(\omega) > 0$  et un **déphasage**  $\varphi(\omega)$  :

$$\text{si } e(t) = E_0 \sin(\omega t),$$

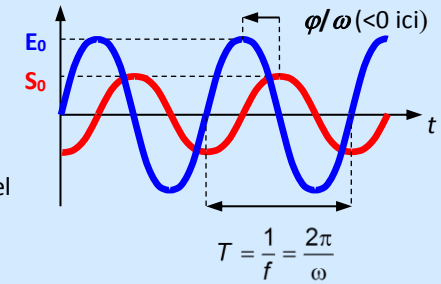
$$s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$s(t) = S_0 \sin(\omega(t + \Delta T))$$

$$\text{avec } \Delta T = \frac{\varphi}{\omega} \text{ déphasage temporel}$$

$$\text{et } S_0 = G(\omega) E_0$$

$e(t), s(t)$  en régime permanent



Lorsque entrée et sortie sont comparables, si  $G(\omega) > 1$  la sortie est dite **amplifiée** ; si  $G(\omega) < 1$  la sortie est dite **atténuée**.

Si  $\varphi > 0$  la sortie est en **avance de phase** par rapport à l'entrée. Si  $\varphi < 0$  la sortie est en **retard de phase**.

**Gain et déphasage sont constants à  $\omega$  donné.**

**Les courbes de gain et de déphasage, fonction de  $\omega$ , caractérisent le comportement fréquentiel.**

## II.2 Gain, déphasage et fonction de transfert : $|G(\omega)| = |H(j\omega)|$ et $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$

Pour déterminer la solution de l'équation différentielle linéaire (i), on pose les **variables complexes** :  $\underline{E} = E_0 e^{j\omega t}$  et  $\underline{S} = S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$  avec  $e(t) = \text{Im}(\underline{E})$  et  $s(t) = \text{Im}(\underline{S})$ .

### - Observation 1 : entrée-sortie complexes et fonction de transfert

Les variables complexes vérifient l'équation différentielle :  $a_n \frac{d^n \underline{S}}{dt^n} + \dots + a_0 \underline{S} = b_m \frac{d^m \underline{E}}{dt^m} + \dots + b_0 \underline{E}$ .

Cette équation devient, après calcul des dérivées :  $a_n (j\omega)^n \underline{S} + \dots + a_0 \underline{S} = b_m (j\omega)^m \underline{E} + \dots + b_0 \underline{E}$  ;

$$\text{soit finalement : } \underline{S} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_0} \underline{E} = H(j\omega) \underline{E}$$

On reconnaît la fonction de transfert du système où la variable de Laplace  $p$  a été remplacée par  $j\omega$ .

### - Observation 2 : entrée-sortie complexes, gain et phase

Par définition de  $\underline{E}$  et  $\underline{S}$ , le rapport  $\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S_0}{E_0} e^{j\varphi} = G(\omega) e^{j\varphi}$ .

### - Détermination des courbes de gain et de déphasage par la fonction de transfert

En **analyse harmonique** (ou fréquentielle), **gain**  $G(\omega)$  et **déphasage**  $\varphi(\omega)$  s'obtiennent à partir de la **fonction de transfert** en **remplaçant  $p$  par  $j\omega$**  :

$$H(j\omega) = G(\omega) e^{j\varphi}$$

$$\text{d'où } \boxed{G(\omega) = |H(j\omega)|} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))}$$

## II.3 Les diagrammes de Bode, lieu de transfert pour les études fréquentielles

### Définition

Une représentation **graphique** de  $H(j\omega)$  est appelée **lieu de transfert**. Les **diagrammes de Bode** sont la représentation la plus connue.

Les **diagrammes de Bode** sont constitués de deux courbes **fonction de la pulsation**  $\omega$ , en échelle semi-logarithmique, tracées l'une en dessous de l'autre :

- le **diagramme de gain**  $G_{dB}(\omega) = 20\log(G(\omega))$ , gain en **dB**, dB pour décibel<sup>(1)</sup>,
- le **diagramme de phase**  $\varphi(\omega)$ , exprimé généralement en degrés.

(1) pour des raisons historiques et pratiques issues de l'acoustique.

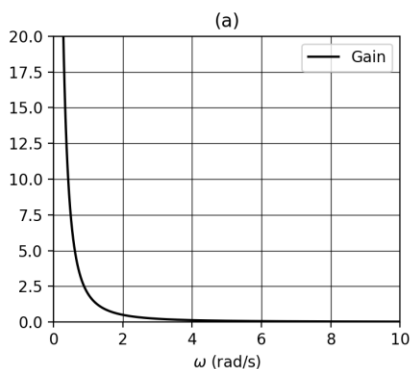
**Application** : considérons le premier ordre de fonction de transfert  $H(p) = \frac{1}{p} \frac{K}{(1 + \tau p)}$ .

A1 - Déterminer le gain  $G(\omega)$  et la phase  $\varphi(\omega)$ .

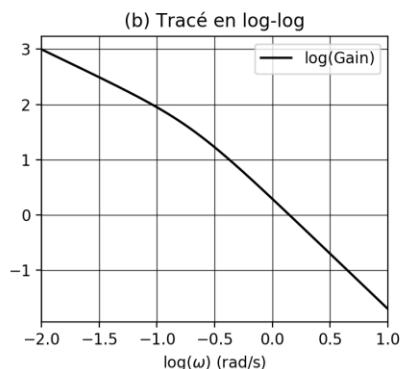
### Principe de la représentation du diagramme de gain : semi-log et décibel

**Exemple** : la figure ci-dessous représente différents tracés du gain de la fonction précédente. Les tracés sont réalisés pour des pulsations comprises entre 0,01 rad/s et 10 rad/s. Quelques remarques :

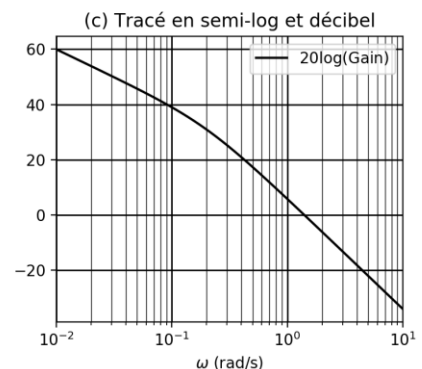
- le tracé (a) réalisé sur toute la plage de valeur ne permet pas une analyse des basses fréquences ;
- le tracé (b), en échelle log-log permet de visualiser des comportements asymptotiques sous la forme de droites ;
- le tracé (c) est le tracé usuel : l'abscisse est en décibel, ce qui est une unité logarithmique ; l'ordonnée est  $\log(\omega)$  mais le quadrillage est celui de  $\omega$ , ce qui permet une lecture plus facile.



`plt.plot(w, G)`



`plt.plot(np.log10(w), np.log10(G))`

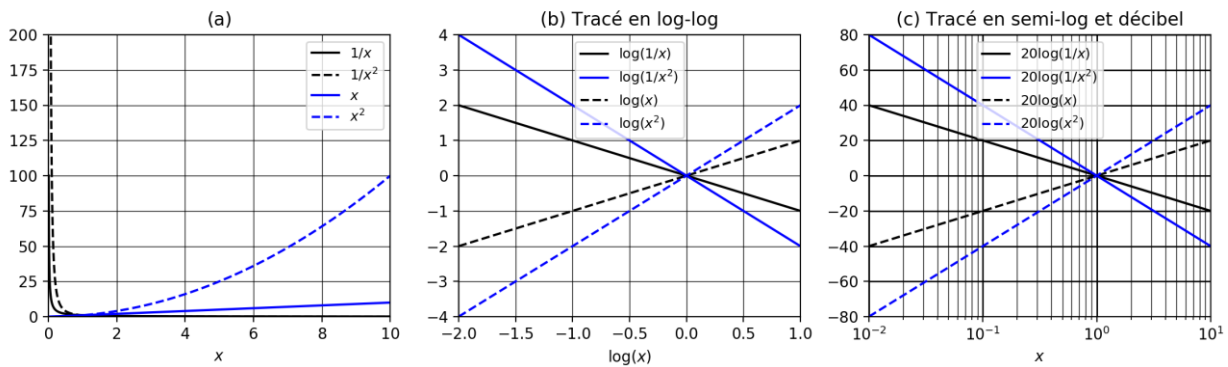


`plt.semilogx(w, 20*np.log10(G))`

Différents systèmes d'axe pour une même représentation du gain d'un 1<sup>er</sup> ordre

Un des intérêts de ce système d'axe est de représenter, sous la forme de droites, des fonctions en puissances. En effet, si  $y(x) = x^p$ ,  $20\log y = 20p\log(x)$ . En posant, pour une représentation en décibel et semi-log,  $Y = 20\log y$  et  $X = \log x$ , on obtient bien  $Y = 20pX$  ; droite de pente  $20p$  décibels par décade. Ainsi :

- $x \rightarrow 1/x$  est représentée par une droite à -20 db/décade ;
- $x \rightarrow 1/x^2$  est représentée par une droite à -40 db/décade.



Différentes représentations de fonctions de  $x^p$  avec  $p$  valant -1, -2, 1 et 2

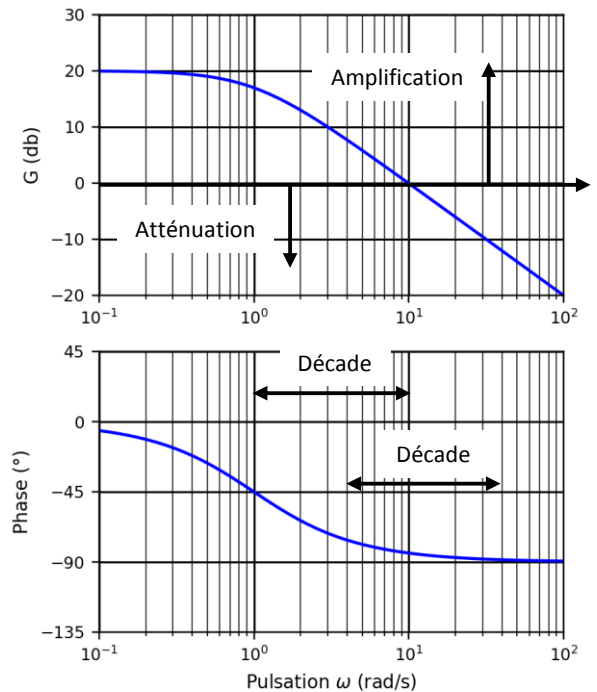
Dans un **diagramme de gain**, exprimé en décibel et tracé en échelle semi-log, une fonction  $\omega \rightarrow K\omega^p$  est représentée par une **droite** de pente  $20 \times p$  dB/decade.

**Caractéristiques d'un diagramme de Bode**

**Application :** déterminer la réponse à partir des diagrammes de Bode

Le système, caractérisé par les diagrammes de Bode ci-contre, est soumis à une entrée sinusoïdale de pulsation 40 rad/s.

A2 - Déterminer la réponse en régime permanent ?



Quelques caractéristiques importantes des diagrammes de Bode:

- l'écart entre  $\omega$  et  $10 \omega$  est une **décade** ;
- sur l'échelle logarithmique, il n'y a **pas d'origine** des abscisses (pas de 0) et le tracé ne concerne qu'une bande de pulsation judicieusement choisie sur 3 ou 4 décades ;
- le **gain**  $G(\omega) = \frac{S_0}{E_0}(\omega)$  n'a **pas d'unité** alors que  $G_{dB}(\omega) = 20\log G(\omega)$  est en **décibel** ;
- un gain de **0 dB** correspond à un **gain de 1**, soit  $E_0$  et  $S_0$  de même amplitude ;
- un **gain en dB positif** correspond à un **gain supérieur à 1**,  $S_0 > E_0$  ;
- un **gain en dB négatif** correspond à un **gain inférieur à 1**,  $S_0 < E_0$  ;
- **20 dB** ( $=20\log 10$ ) correspondent à un **facteur 10** sur le gain, **-20dB** à un facteur  $1/10$ .
- **40 dB** ( $=20\log 10^2$ ) correspondent à un **facteur 100**, **-40dB** à un facteur  $1/100$ , etc.
- **-3 dB** correspond à une atténuation de **30%**, **-6 db** correspond à **-50%**.

## II.4 Propriétés pour la construction d'un diagramme de Bode

### Forme générale des fonctions de transfert

Les modèles étudiés sont :

- des modèles usuels : premier ou deuxième ordre ;
- des modèles associés à des fonctions de transfert écrites comme combinaison de modèles usuels.

Pour une fonction de transfert sous **forme canonique**,  $H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+\dots}{1+\dots}$

- le terme  $\frac{K}{p^\alpha}$  caractérise le **comportement à basse fréquence**
- le terme complémentaire est écrit comme un **produit de fonctions de transfert de gain unitaire**.

Pour l'analyse fréquentielle, les **fonctions de transferts** s'écrivent sous la forme suivante :

The diagram shows the transfer function  $H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \times \frac{1}{\prod(1 + \tau_i p)} \times \frac{1}{\prod(1 + a_i p + b_i p^2)} \times \prod(1 + \tau_i p) \times \prod(1 + a_i p + b_i p^2)$ . Arrows indicate the following components:
 

- $\frac{K}{p^\alpha}$ : Comportement basse fréquence
- $\frac{1}{\prod(1 + \tau_i p)}$ : Produit de 1<sup>er</sup> ordre
- $\frac{1}{\prod(1 + a_i p + b_i p^2)}$ : Produit de 2<sup>ème</sup> ordre
- $\prod(1 + \tau_i p)$ : Produit d'inverses de 1<sup>er</sup> ordre
- $\prod(1 + a_i p + b_i p^2)$ : Produit d'inverses de 2<sup>ème</sup> ordre

### Propriété des diagrammes de Bode : produit de fonctions et inverse d'une fonction

(1) car

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = |A(j\omega)| \times |B(j\omega)|$$

d'où

$$G_{HdB}(\omega) = 20 \log |A(j\omega)| + 20 \log |B(j\omega)|$$

De même pour l'argument :

$$\varphi_H(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \arg(A(j\omega)) + \arg(B(j\omega))$$

(2) cette propriété sera très pratique pour tracer rapidement un diagramme.

Si  $H(p) = A(p)B(p)$  alors<sup>(1)</sup> :

$$\begin{aligned} G_{HdB}(\omega) &= G_{AdB}(\omega) + G_{BdB}(\omega) \\ \varphi_H(\omega) &= \varphi_A(\omega) + \varphi_B(\omega) \end{aligned}$$

Les **modules en dB** et les **arguments** en degrés **s'ajoutent** quand les fonctions de transfert se **multiplient**.

On ajoute les 2 diagrammes de  $A(j\omega)$  et  $B(j\omega)$ , pour déterminer le diagramme de  $H(j\omega)$ .

L'étude des diagrammes de Bode des fonctions du 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre usuelles et de gain unitaire montre que le gain en décibel et la phase sont nuls à basse fréquence.

Lorsque l'on **ajoute** à un diagramme existant le diagramme d'une fonction du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>ème</sup> ordre de **gain unitaire**, le **diagramme à basse fréquence n'est pas modifié**<sup>(2)</sup>.

Si  $H(p) = 1 / F(p)$  alors<sup>(1)</sup> :

$$\begin{aligned} G_{HdB}(\omega) &= -G_{FdB}(\omega) \\ \varphi_H(\omega) &= -\varphi_F(\omega) \end{aligned}$$

Les diagrammes des **inverses de 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre de gain unitaire** se déduisent des diagrammes des 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre par **symétrie par rapport à l'axe des abscisses**.

## II.5 Filtres, bande passante et pulsation de coupure

(1) Ce gain de référence n'est pas nécessairement la valeur maximale du gain.

Le système étudié est un filtre ou a un **comportement de filtre** si, en dehors d'une **plage de pulsation** appelée **bande passante** et délimitée par des **pulsations de coupure**, le gain est plus faible qu'un **gain de référence** <sup>(1)</sup>.

<b>Filtre passe-bande</b> (gain de référence = gain maximal)		Le système laisse passer une <b>bande de fréquence</b> . La bande passante est $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$
<b>Filtre passe-bas</b> (gain de référence = gain à basse fréquence)		Le système laisse passer les <b>basses fréquences</b> . La bande passante est $]0, \omega_{c2}]$
<b>Filtre passe-haut</b> (gain de référence = gain à haute fréquence)		Le système laisse passer les <b>hautes fréquences</b> . La bande passante est $[\omega_{c1}, +\infty[$

**Dans leur grande majorité, les systèmes linéaires rencontrés en automatique et particulièrement les systèmes mécaniques, présentent un comportement fréquentiel de filtre passe-bas.**

Si la pulsation de l'entrée est faible, le système peut suivre la consigne et sa réponse n'est pratiquement pas altérée : rapport d'amplitude quasiment défini par le gain statique et déphasage quasi nul.

En revanche, si les variations de l'entrée sont trop rapides, le système ne peut les suivre et sa réponse se traduit par une forte atténuation d'amplitude, associée à un déphasage important.

Nous retiendrons en 1<sup>ère</sup> année :

Critère	Détermination à partir du gain	Détermination à partir du gain en dB
<b>Pulsation de coupure à -3 dB</b> $\omega_{c-3dB}$ gain atténué de 30% par rapport à une valeur de référence $G_0$	$G(\omega_{c-3dB}) = 70\% G_0$ $= 0,7 \times G_0$	$G_{dB}(\omega_{c-3dB}) = G_{0\ dB} - 3dB$
<b>Pulsation de coupure à -6 dB</b> $\omega_{c-6dB}$ gain atténué de 50% par rapport à une valeur de référence $G_0$	$G(\omega_{c-6dB}) = 50\% G_0$ $= 0,5 \times G_0$	$G_{dB}(\omega_{c-6dB}) = G_{0\ dB} - 6dB$



### III Diagrammes de Bode des systèmes usuels

#### III.1 Diagramme de Bode des fonctions définissant le comportement à basse fréquence

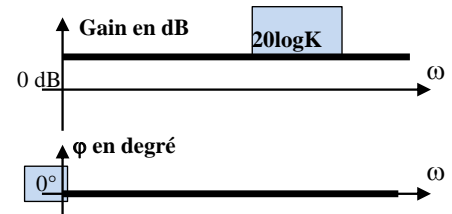
(1) éléments de démonstration en annexe.

Les résultats à connaître<sup>(1)</sup> sont les courbes et leurs éléments caractéristiques (pentes, point de passage). On suppose ici  $K > 0$

##### Diagramme de Bode d'un système à action proportionnelle

$$H(p) = K \quad (K > 0) \Rightarrow H(j\omega) = K$$

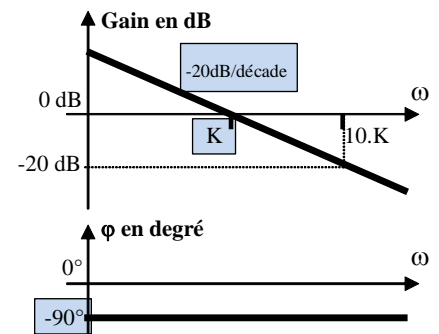
Droite horizontale. Phase nulle.



##### Diagramme de Bode d'un système intégrateur

$$H(p) = \frac{K}{p} \quad (K > 0) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

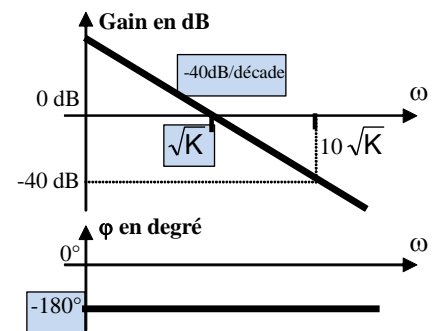
Droite à -20 db / décade de gain nul en K. Phase à -90°



##### Diagramme de Bode d'un système intégrateur de degré 2

$$H(p) = \frac{K}{p^2} \quad (K > 0) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2} = \frac{-K}{\omega^2}$$

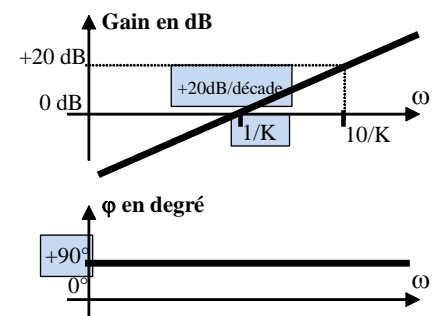
Droite à -40 db / décade de gain nul en  $\sqrt{K}$ . Phase à -180°



##### Diagramme de Bode d'un système dérivateur

$$H(p) = K p \quad (K > 0) \Rightarrow H(j\omega) = K j \omega$$

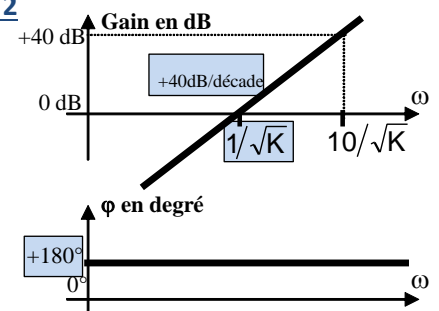
Droite à +20 db / décade de gain nul en 1/K. Phase à +90°



##### Diagramme de Bode d'un système dérivateur de degré 2

$$H(p) = K p^2 \quad (K > 0) \Rightarrow H(j\omega) = K (j\omega)^2 = -K \omega^2$$

Droite à +40 db / décade de gain nul en  $1/\sqrt{K}$ . Phase à +180°



### III.2 Diagramme de Bode d'un système du 1<sup>er</sup> ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \\ \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -\arg(1 + \tau j\omega) = -\arctan(\tau \omega) \end{cases}$$

#### Comportement asymptotique

Pour  $\omega \rightarrow 0^+$ ,  $H(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = K$  d'où :

Le comportement fréquentiel à **basse fréquence** est celui d'un **gain pur** de gain  $K$ .

Pour  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $H(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{K}{\tau j\omega}$  d'où :

Le comportement fréquentiel à **haute fréquence** est celui d'un **intégrateur** de gain  $K/\tau$ .

#### Gain et phase à $\omega_{cassure} = \omega_{coupure}$

La **pulsation de cassure**,  $\omega_{cassure}$  correspond à la pulsation du point **d'intersection des asymptotes** du diagramme de gain.

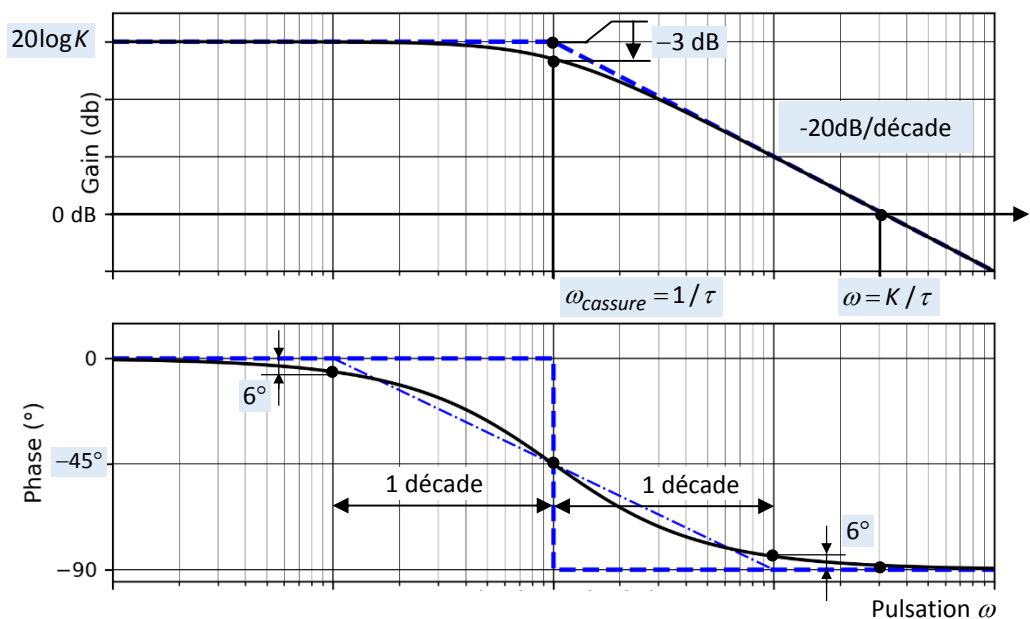
Il s'agit de trouver  $\omega_{cassure}$  telle que le gain du comportement à basse fréquence soit identique au

gain du comportement à haute fréquence :  $K = \frac{K}{\tau \omega_{cassure}} \Rightarrow \omega_{cassure} = 1/\tau$ .

De plus,  $G_{dB}(\omega_{cassure}) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{2} = G_{0dB} - 3dB = G_{dB}(\omega_{c-3dB})$

Pour un 1<sup>er</sup> ordre la pulsation de **coupure** à **-3dB** est la pulsation de **cassure** :

$$\omega_{c-3dB} = \omega_{cassure} = \frac{1}{\tau} \quad \varphi(\omega_{cassure}) = -\arctan(1) = -45^\circ$$



### III.3 Diagramme de Bode d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}(j\omega) + \frac{1}{\omega_0^2}(j\omega)^2} = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j 2z \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{K}{(1-u^2) + j 2zu} \text{ avec } u = \frac{\omega}{\omega_0}, \text{ pulsation réduite.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4z^2u^2}} \\ G_{dB}(\omega) = 20\log|H(j\omega)| = 20\log K - 20\log\sqrt{(1-u^2)^2 + 4z^2u^2} \\ \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2z.u}{1-u^2}\right) & \text{si } u < 1 \\ -90^\circ & \text{si } u = 1 \quad (\omega = \omega_0) \\ -180^\circ + \arctan\left(\frac{2z.u}{u^2-1}\right) & \text{si } u > 1 \end{cases} \end{cases}$$

#### Comportement asymptotique et pulsation de cassure

Pour  $\omega \rightarrow 0^+$ ,  $H(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = K$  d'où :

Le comporte fréquentiel à **basse fréquence** est celui d'un **gain pur** de gain **K**.

Pour  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $H(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = -K \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$  d'où :

Le comporte fréquentiel à **haute fréquence** est celui d'un **intégrateur de degré 2** de gain  **$K\omega_0^2$** .

Pour  $\omega_{cassure}$  le gain du comportement à basse fréquence est identique au gain du comportement à

haute fréquence :  $K = K \frac{\omega_0^2}{\omega_{cassure}^2} \Rightarrow \omega_{cassure} = \omega_0$ .

$\omega_{cassure}$  correspond à  $u = 1$ , soit à  $G_{dB}(\omega_0) = 20\log K - 20\log\sqrt{4z^2} = 20\log K - 20\log(2z)$

Pour un deuxième ordre, la **pulsation de cassure** est  $\omega_{cassure} = \omega_0$  :

$$G_{dB}(\omega_{cassure}) - 20\log K = -20\log(2z) \text{ et } \varphi(\omega_{cassure}) = -90^\circ$$

#### Extremum de $G(\omega)$ : résonance pour $z < 1/\sqrt{2} \approx 0,707$ , pulsation de résonance et facteur de surtension

Un extremum de  $G(\omega)$  existe si  $P(u) = (1-u^2)^2 + 4z^2u^2$  a un extremum, soit si  $\frac{dP(u)}{du}$  s'annule,

avec  $\frac{dP(u)}{du} = 2(-2u) \times (1-u^2) + 4z^2 \times 2u = 4u(2z^2 - 1 + u^2)$ .

$$\frac{dP(u)}{du} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \text{ (soit } \omega = 0) \Rightarrow \text{impossible en régime fréquentielle} \\ u^2 = 1 - 2z^2 \Rightarrow \text{possible si } 1 - 2z^2 > 0 \text{ soit } z < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \end{cases}$$

et pour  $u = \sqrt{1-2z^2}$ ,  $G_{dB}(\omega_r) = 20\log K - 20\log\sqrt{(2z^2)^2 + 4z^2(1-2z^2)}$

$$= 20\log K - 20\log\sqrt{4z^2(z^2 + 1 - 2z^2)} = 20\log K - 20\log(2z\sqrt{1-z^2})$$

(1) à ne pas confondre avec la pulsation amortie de la réponse à un échelon :

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$$

Pour  $0,707 < z < 1$ , la réponse à un échelon présente des dépassements, mais la réponse fréquentielle ne présente pas de résonance.

Si  $z < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ , le gain a un maximum à la pulsation de résonance<sup>(1)</sup>

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$$

$$G_{dB}(\omega_r) - 20 \log K = Q_{dB} \quad \text{avec} \quad Q_{dB} = -20 \log(2z\sqrt{1 - z^2})$$

$Q_{dB}$ , facteur de surtension varie de 0 à  $+\infty$  quand  $z$  varie de 0,7 à 0.

Si  $z > 0,7$ , la courbe de gain est strictement décroissante.

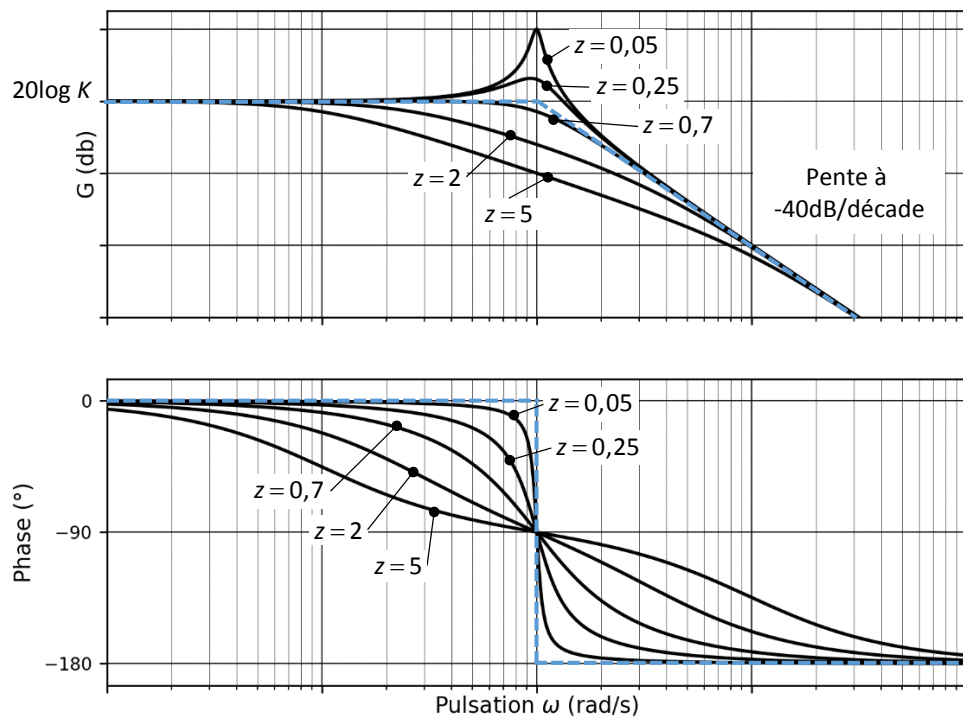
$\varphi(\omega_r)$  n'est pas une valeur particulière.

La définition du facteur de surtension permet aussi d'écrire :  $Q = \frac{G(\omega_r)}{G(0+)} = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(j\omega)_{\omega \rightarrow 0}|} = \frac{1}{2z\sqrt{1 - z^2}}$ .

$Q$  varie de 1 à  $+\infty$  quand  $z$  varie de 0,7 à 0 ;

Un critère de réglage souvent utilisé pour un système asservi est d'ajuster le facteur de surtension à la valeur  $Q = 1,3$  soit en dB  $Q_{dB} = 2,3$  dB .

Exemples :



**Cas où  $z > 1$  : le dénominateur possède 2 racines réelles**

Pour  $z > 1$ ,  $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} = K \frac{1}{(1 + T_1 p)} \cdot \frac{1}{(1 + T_2 p)}$  avec  $\omega_0 = 1/\sqrt{T_1 T_2}$

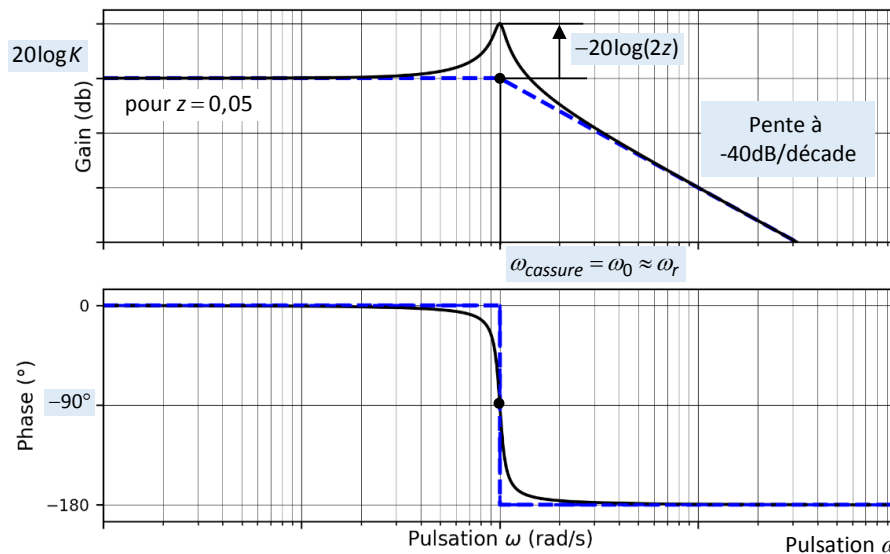
qui est un produit de 3 fonctions de transfert : 1 système à action proportionnelle et 2 systèmes du 1<sup>er</sup> ordre de constantes de temps  $T_1$  et  $T_2$ .

Leurs diagrammes de Bode s'additionnent.

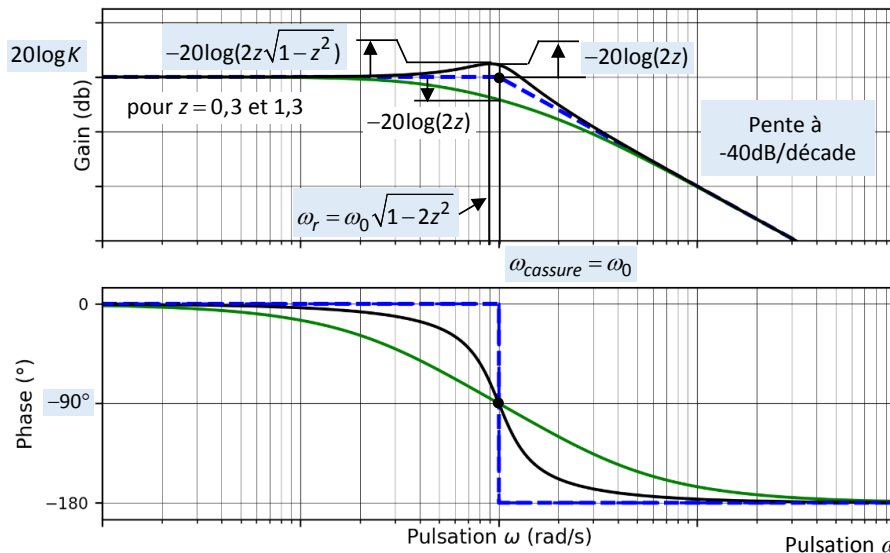
**Le diagramme asymptotique est plus précis que celui tracé avec le 2<sup>nd</sup> ordre du départ...**

**Exemples de tracés**

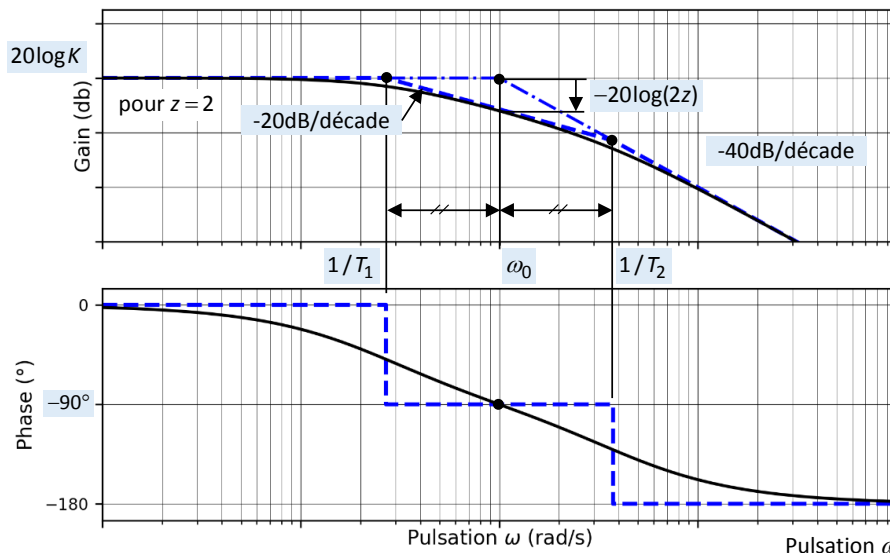
- Pour  $z \ll 1$  : les pulsations de cassure et de résonance sont proches



- Pour  $z$  proche de 1 : on peut distinguer les pulsations de cassure et de résonance si  $z < 0,7$

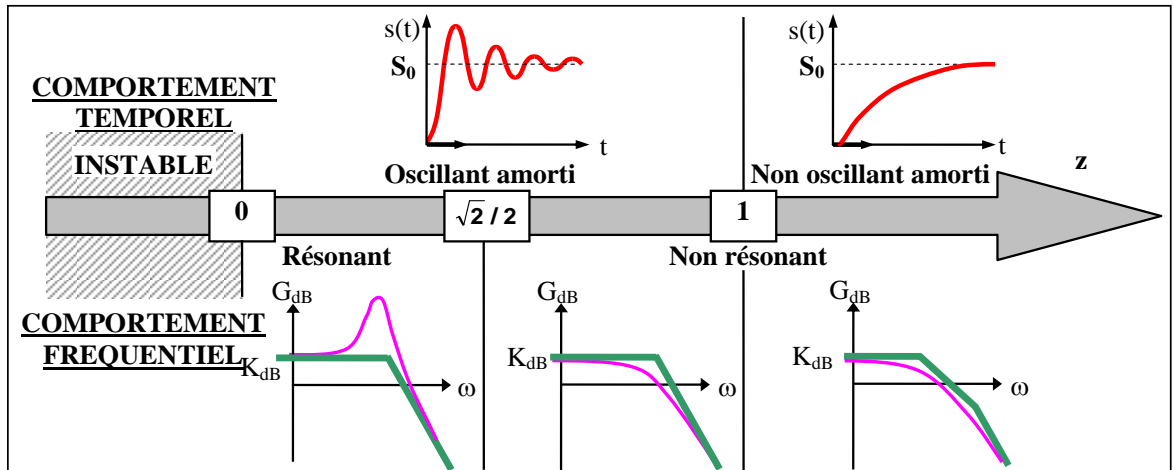


- Pour  $z > 1,5$



Pour  $z > 3$ , on peut considérer que la courbe de phase passe par  $-45^\circ$  et  $-135^\circ$ .

**Différence entre comportements temporel et fréquentiel d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre**



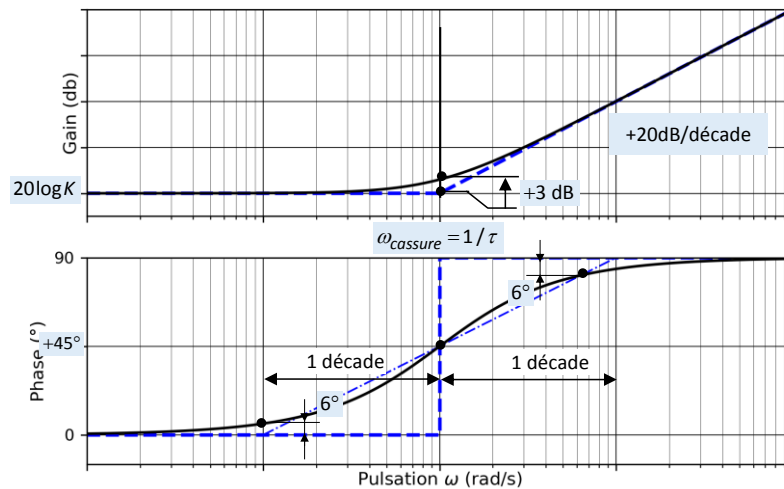
**III.4 Inverses d'un premier et deuxième ordre**

Les courbes et propriétés se déduisent directement de celles d'un premier et deuxième ordre.

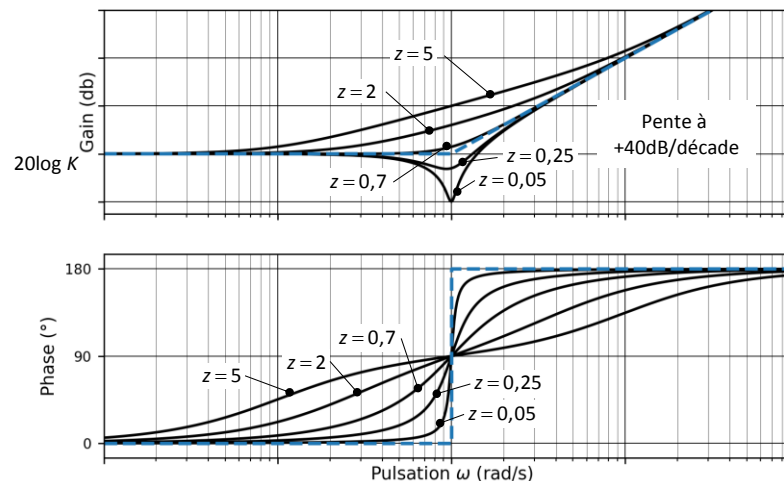
Entre  $H(p)$  et  $1/H(p)$  :

- les pulsations de cassure et de résonance sont identiques ;
- les écarts aux tracés asymptotiques des courbes réelles sont inverses.

Exemple pour un 1<sup>er</sup> ordre avec  $H(p) = K(1 + \tau p)$  :



Exemple pour des 2<sup>ème</sup> ordres.



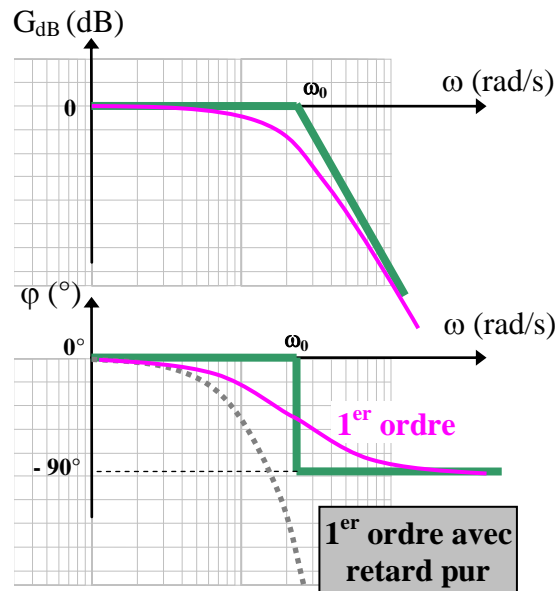
### III.5 Diagramme de Bode d'un système à retard pur

(1) La présence d'un retard pur dans la FTBO pourra entraîner l'instabilité du système en boucle fermée.

La fonction de transfert<sup>(1)</sup> s'écrit :  $H(p) = e^{-Tp}$  soit  $H(j\omega) = e^{-T.j\omega}$  pour la réponse harmonique.  
 Le module est constant et égal à 1 ( $G_{dB} = 0$  dB).  
 L'argument est une fonction linéaire de  $\omega$  :  $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) = -T\omega$ .

Seule la courbe de phase du système est affectée par le retard pur.

Exemple : retard pur associé à un premier ordre :  $H(j\omega) = \frac{e^{-T.j\omega}}{1 + T.j\omega}$



### III.6 Réponse harmonique si $K < 0$

Quel que soit la fonction, si  $K < 0$ , le **module est inchangé**, mais le **déphasage est augmenté de 180°** [ $2\pi$ ].

En effet  $\arg[K \cdot g(\omega)] = \arg K + \arg(g(\omega))$  et  $\arg K = 180^\circ [2\pi]$  si  $K < 0$ .

## IV Méthode générale de construction des diagrammes de Bode

Le principe de tracé d'un diagramme de Bode consiste à factoriser le numérateur et le dénominateur de  $H(j\omega)$  pour en faire un produit de fonctions de transfert élémentaires connues et faciles à tracer dans Bode.

**Étape n°1** : mettre la **fonction de transfert** sous la forme d'un **produit d'éléments simples** du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>nd</sup> ordre, de leurs inverses, d'un gain et d'intégrateurs multiples.

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \times \frac{1}{\prod (1 + \tau_i p)} \times \frac{1}{\prod (1 + a_i p + b_i p^2)} \times \prod (1 + \tau_i p) \times \prod (1 + a_i p + b_i p^2)$$

Comportement basse fréquence
Produit d'inverses de 1<sup>er</sup> ordre
Produit d'inverses de 2<sup>ème</sup> ordre

↑
↑
↑

Produit de 1<sup>er</sup> ordre
Produit de 2<sup>ème</sup> ordre

**Étape n°2** : classer les pulsations de cassures par valeurs croissantes ( $1/\tau_i$  pour un 1<sup>er</sup> ordre et  $\omega_0$  pour un 2<sup>nd</sup> ordre). Les brisures du tracé asymptotique correspondront alors à ces pulsations.

**Étape n°3 : Construire** le diagramme de Bode de  $H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\alpha}$ , puis **successivement** en avançant vers les pulsations croissantes, faire intervenir les pôles et les zéros selon l'ordre précédent en utilisant les constructions asymptotiques.

**Étape n°4 : Affiner** le tracé asymptotique en combinant les courbes réelles.



La multiplication d'un gain  $K$  se traduit simplement par la translation suivant l'axe vertical du diagramme des gains de  $20 \cdot \log(K)$ , le diagramme des phases restant inchangé.



Il est souvent suffisant pour analyser la réponse d'un système de tracer seulement le diagramme de Bode asymptotique.

Il existe un lien entre la **pen**te d'un segment du diagramme asymptotique de gain et la phase associée :

pour une pente de  $k \times 20$  dB/decade, alors,  $\varphi = k \times 90^\circ$ .

## V Comparaison des études temporelle et fréquentielle

### V.1 Relation Bande passante et rapidité

Rappel : le critère de rapidité standard est le temps de réponse à 5%. Il est défini lorsqu'un système est soumis à un ECHELON.

#### Pour un 1<sup>er</sup> ordre

Le temps de réponse est défini par  $t_{5\%} \approx 3 \cdot \tau$

La bande passante à -3 dB est  $]0, \omega_c]$  avec  $\omega_{c-3dB} = \omega_{cassure} = \frac{1}{\tau}$

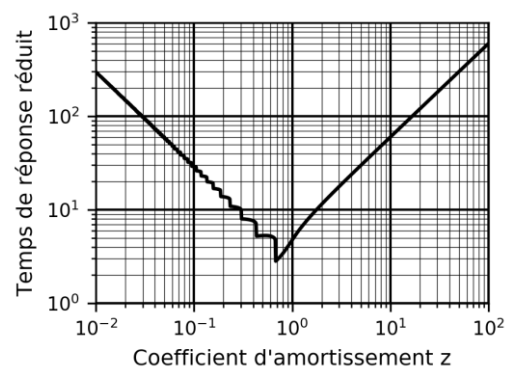
Donc rapidité du système  $\uparrow \Rightarrow t_{5\%} \downarrow \Rightarrow \tau \downarrow \Rightarrow \omega_{c-3dB} \uparrow \Rightarrow$  bande passante  $\uparrow$

#### Pour un 2<sup>ème</sup> ordre

Le temps de réponse est défini par le graphe du « temps de réponse réduit  $t_{5\%} \cdot \omega_0$  » ci-contre.

On remarque que pour un facteur d'amortissement constant, le temps de réponse réduit  $t_{5\%} \cdot \omega_0$  est constant.

Donc (**pour un  $z$  fixé**) rapidité du système  $\uparrow \Rightarrow t_{5\%} \downarrow \Rightarrow \omega_0 = \omega_{cassure} \uparrow \Rightarrow \omega_{c-3dB} \uparrow \Rightarrow$  bande passante  $\uparrow$



#### Conclusion

**Une large bande passante caractérise un système rapide.**

C'est-à-dire que le système est apte à suivre des entrées rapides ou des fréquences élevées.



## V.2 Synthèse sur les différents gains

<b>Temporel</b>	K	<b>Gain statique du système.</b> Il caractérise le comportement du système de classe 0 en régime permanent : $s(+\infty) = KE_c$ .
<b>Fréquentiel</b>	$G(\omega) =  H(j\omega)  = \left  \frac{S_0}{E_0}(\omega) \right $	<b>Gain (ou module) du système (sans unité).</b> Il caractérise l'amplification ( $G > 1$ ) ou l'atténuation ( $G < 1$ ) du système en fonction de $\omega$ .
	$G_{dB}(\omega) = 20 \log  H(j\omega) $ $= 20 \log \left  \frac{S_0}{E_0}(\omega) \right $	<b>Gain (ou module) du système (en décibel).</b> Il caractérise l'amplification ( $G > 0\text{dB}$ ) ou l'atténuation ( $G < 0\text{dB}$ ) du système en fonction de $\omega$ .

## V.3 Synthèse sur les différentes pulsations

Toutes les pulsations ci-dessous sont en rad/s et sont positives.

<b>Temporel</b>	$\omega_0$ (notée parfois $\omega_n$ )	<b>Pulsation propre non amortie d'un système du 2<sup>e</sup> ordre.</b> (pulsation du système s'il n'était pas amorti).
	$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$	<b>Pulsation amortie d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre oscillatoire.</b> ( $z < 1$ ).
<b>Fréquentiel</b>	$\omega$	<b>Pulsation de l'entrée ou de la sortie sinusoïdales du système.</b>
	$\omega_{cassure}$	<b>Pulsation de cassure</b> (pulsation où les asymptotes des courbes de gain se coupent) : $\omega_{cassure} = \frac{1}{\tau}$ pour un 1 <sup>er</sup> ordre $\omega_{cassure} = \omega_0$ pour un 2 <sup>e</sup> ordre
	$\omega_c$	<b>Pulsation de coupure</b> (pulsation définissant la bande passante). Plusieurs critères sont utilisés : -3dB, -6dB ( $\omega_{c-3dB}$ , $\omega_{c-6dB}$ ). NB : Pour un 1 <sup>er</sup> ordre $\omega_{c-3dB} = \omega_{cassure} = \frac{1}{\tau}$
	$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$	<b>Pulsation de résonance d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre (seulement pour <math>z &lt; \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707</math>).</b> Pulsation où le gain présente un maximum.

# Rappels sur les logarithmes et les complexes

(1) Le logarithme utilisé est le logarithme en base 10.

## Sur les logarithmes en base 10

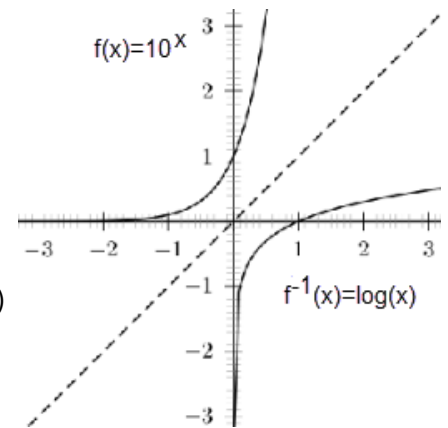
$X^{(1)}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	$10^1$	$10^2$
Log(x)	-2	-1	0	1	2

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(a^n) = n \cdot \log(a)$$

$$10^{n \cdot \log(a)} = a^n$$



## Sur les nombres complexes

Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $z = a + j.b = |z|.e^{j\varphi} = |z|.(\cos\varphi + j \sin\varphi)$

alors  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$  et  $\arg(z) = \varphi$

Soient  $z_i$  des nombres complexes :  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  et  $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} \text{ et } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi]$$

notamment  $\arg\left(\frac{K}{z_2}\right) = -\arg(z_2) [2\pi]$  (si  $K > 0$ )

Remarque 1 : si  $\varphi = -15^\circ [2\pi]$  alors  $\varphi$  vaut aussi  $345^\circ [2\pi]$

Mais on préférera dire que  $s(t)$  est en retard de phase de  $15^\circ$  plutôt que  $s(t)$  est en avance de phase de  $345^\circ$ .

### Remarque 2 : Calcul d'argument

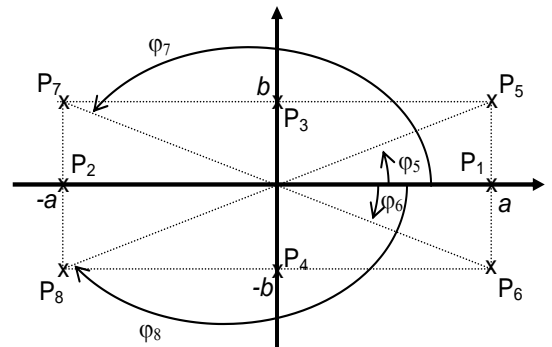
On pose  $a > 0$  et  $b > 0$  :

Au point  $P_1 : z_1 = a \Rightarrow \arg(P_1) = 0^\circ [2\pi]$

Au point  $P_2 : z_2 = -a \Rightarrow \arg(P_2) = 180^\circ [2\pi]$

Au point  $P_3 : z_3 = j.b \Rightarrow \arg(P_3) = 90^\circ [2\pi]$

Au point  $P_4 : z_4 = -j.b \Rightarrow \arg(P_4) = -90^\circ [2\pi]$

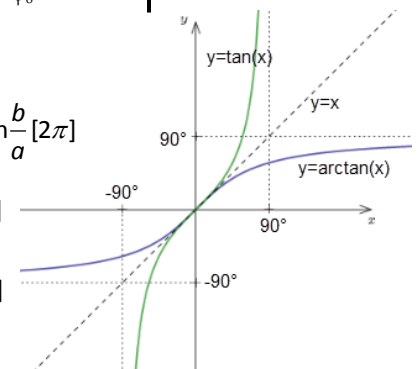


Au point  $P_5 : z_5 = a + j.b \Rightarrow \arg(P_5) = \varphi_5 = \arctan\frac{b}{a} [2\pi]$

Au point  $P_6 : z_6 = a - j.b \Rightarrow \arg(P_6) = \varphi_6 = \arctan\frac{-b}{a} = -\arctan\frac{b}{a} [2\pi]$

Au point  $P_7 : z_7 = -a + j.b \Rightarrow \arg(P_7) = \varphi_7 = 180^\circ - \arctan\frac{b}{a} [2\pi]$

Au point  $P_8 : z_8 = -a - j.b \Rightarrow \arg(P_8) = \varphi_8 = 180^\circ + \arctan\frac{b}{a} [2\pi]$



Arctan étant compris entre  $-90^\circ$  et  $+90^\circ$ , il est nécessaire de prendre en compte  $+180^\circ$  pour déterminer l'argument (ou le déphasage) aux points  $P_7$  et  $P_8$

Quand la partie **réelle** du complexe est **négative**, on détermine la **phase** en ajoutant  **$+180^\circ$**  à l'angle déterminé par l'**arc tangente**.

# Diagrammes de Bode des fonctions élémentaires : démonstrations

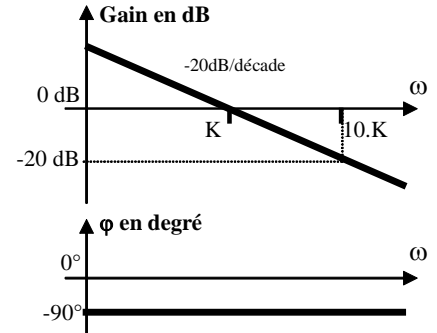
## Diagramme de Bode d'un système intégrateur

$$H(p) = \frac{K}{p} \quad (K > 0)$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20\log\frac{K}{\omega} = 20\log K - 20\log\omega \\ \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -90^\circ \end{cases}$$

Pour tracer la droite du gain en dB :

- Si  $\omega = K$  alors  $G_{dB}(K) = 20\log K - 20\log K = 0\text{dB}$
- Si  $\omega = 10.K$  alors  $G_{dB}(10.K) = 20\log K - 20\log 10 - 20\log K = -20\text{dB}$



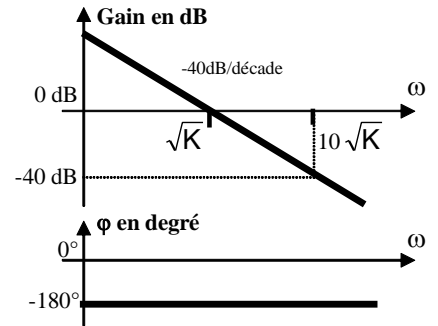
## Diagramme de Bode d'un système intégrateur de degré 2

$$H(p) = \frac{K}{p^2} \quad (K > 0)$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2} = \frac{-K}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20\log\frac{K}{\omega^2} = 20\log K - 40\log\omega \\ \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -180^\circ \end{cases}$$

Pour tracer la droite du gain en dB :

- Si  $\omega = \sqrt{K}$  alors  $G_{dB}(\sqrt{K}) = 20\log K - 20\log K = 0\text{dB}$
- Si  $\omega = 10\sqrt{K}$  alors  $G_{dB}(10\sqrt{K}) = 20\log K - 40\log 10 - 20\log K = -40\text{dB}$



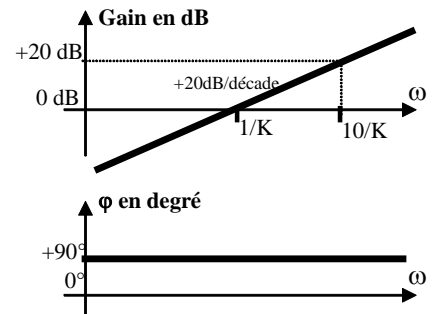
## Diagramme de Bode d'un système dérivateur

$$H(p) = K \cdot p \quad (K > 0)$$

$$H(j\omega) = K \cdot j\omega \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20\log(K\omega) = 20\log K + 20\log\omega \\ \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = +90^\circ \end{cases}$$

Pour tracer la droite du gain en dB :

- Si  $\omega = 1/K$  alors  $G_{dB}(1/K) = 20\log K - 20\log K = 0\text{dB}$
- Si  $\omega = 10/K$  alors  $G_{dB}(10/K) = 20\log K + 20\log 10 - 20\log K = +20\text{dB}$



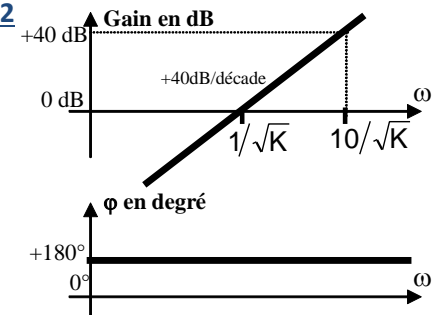
## Diagramme de Bode d'un système dérivateur de degré 2

$$H(p) = K \cdot p^2 \quad (K > 0)$$

$$H(j\omega) = K(j\omega)^2 = -K\omega^2 \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20\log(K\omega^2) = 20\log K + 40\log\omega \\ \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = +180^\circ \end{cases}$$

Pour tracer la droite du gain en dB :

- Si  $\omega = 1/\sqrt{K}$  alors  $G_{dB}(1/\sqrt{K}) = 20\log K - 20\log K = 0\text{dB}$
- Si  $\omega = 10/\sqrt{K}$  alors  $G_{dB}(10/\sqrt{K}) = 20\log K + 40\log 10 - 20\log K = +40\text{dB}$



## Savoirs

Je connais :

- les conditions et hypothèses associées à l'analyse fréquentielle
- les propriétés d'une réponse harmonique, son lien avec la fonction de transfert
- les informations présentes sur un diagramme de Bode
- la définition des pulsations de coupure
- les réponses fréquentielles des fonctions élémentaires (à action proportionnelle, intégrateur ou dérivateur)
- les caractéristiques des réponses fréquentielles des systèmes du premier et du deuxième ordre

## Savoir-faire

Je sais :

- Tracer le diagramme de Bode des fonctions élémentaires
- Tracer le diagramme de Bode d'un système du premier ou du deuxième ordre
- Tracer le diagramme de Bode d'un produit de fonctions élémentaires, de premiers, deuxièmes ordres et d'inverses de premiers et deuxièmes ordres
- Déterminer une fréquence de coupure sur un diagramme de Bode et analytiquement
- Identifier une fonction de transfert à partir d'un diagramme de Bode