



# Cours C09\_ Déterminer le comportement cinématique et en statique d'un transmetteur non linéaire

Transmission de Puissance

C09

2019-2020

Lycée René Cassin

## Objectifs

Déterminer des lois d'entrée-sortie cinématique en position ou vitesse d'un mécanisme pour caractériser le comportement cinématique et en statique des transmetteurs non linéaires

## Sommaire

<b>I</b>	<b>Loi entrée-sortie cinématique et en statique d'un mécanisme</b>	<b>3</b>
I.1	Loi entrée-sortie cinématique	3
I.2	Loi entrée-sortie statique	4
<b>II</b>	<b>Déterminer la loi entrée-sortie cinématique d'une chaîne fermée</b>	<b>5</b>
II.1	Par fermeture géométrique	5
	<i>Pour éliminer un angle</i>	6
	<i>Pour éliminer une distance</i>	6
	<i>Pour déterminer un angle à partir d'une fonction trigonométrique</i>	6
	<i>Pour déterminer un angle à partir d'une somme de sinus et cosinus</i>	6
II.2	Par fermeture cinématique	7
II.3	Par traduction d'une propriété angulaire	7
<b>III</b>	<b>Mécanismes de transformation de mouvement usuels</b>	<b>7</b>
III.1	Mécanisme 3 barres / système bielle-manivelle	7
III.2	Mécanisme 4 barres	8
III.3	Système à came	9
III.4	Joint d'accouplement	10

## I Loi entrée-sortie cinématique et en statique d'un mécanisme

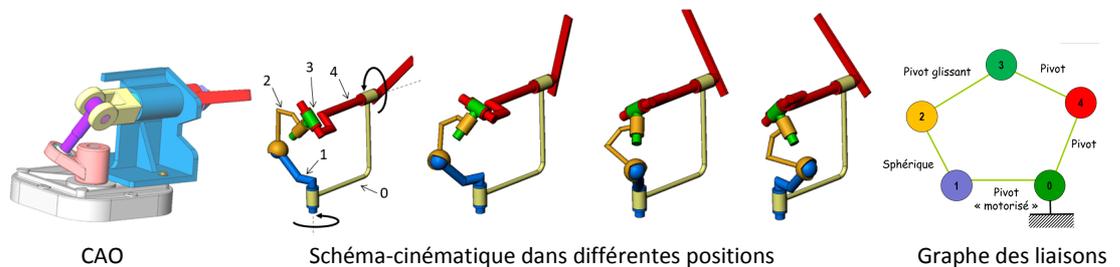
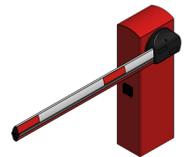
L'objectif de ce cours est de déterminer, par exploitation d'un modèle cinématique, la relation mathématique caractérisant le comportement cinématique d'un **mécanisme en chaîne fermée** utilisé comme transmetteur ; relation appelée **loi entrée-sortie cinématique** (ou loi entrée-sortie en mouvement).

Sous certaines hypothèses, cette relation permet aussi de caractériser le comportement statique du transmetteur par une **loi entrée-sortie statique**.

Dans un mécanisme en chaîne fermée utilisé comme transmetteur, il n'y a qu'une seule liaison « motorisée » par la chaîne d'énergie. C'est la structure bouclée du mécanisme qui fait que la mise en mouvement de cette liaison entraîne celle de tout le mécanisme. Cette **structure bouclée** du mécanisme se retrouve dans le modèle cinématique sous la forme **d'une chaîne fermée**.

**Exemple** : mécanisme de transformation de mouvement d'une barrière.

Le solide 1 est entraîné en rotation par un motoréducteur. Animé d'un mouvement de rotation continu par rapport au bâti 0, il permet la mise en rotation alternative du solide 4 sur lequel est fixé la lisse de la barrière.



### I.1 Loi entrée-sortie cinématique

Les **grandeurs cinématiques** associées aux puissances d'entrée et de sortie sont associées à des **DDL de liaisons** : paramètres cinématiques des torseurs cinématiques des liaisons et paramètres de position associés.

Une loi **d'entrée-sortie cinématique en vitesse** correspond à une relation entre des **paramètres cinématiques** des liaisons.

Une loi **d'entrée-sortie cinématique en position** correspond à une relation entre des **paramètres de position** des liaisons.

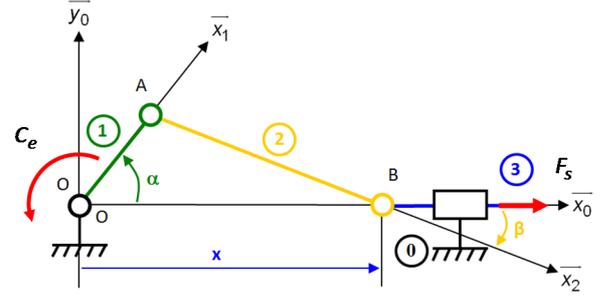
La **dérivation** temporelle de la **loi en position** donne la **loi en vitesse**.

L'intégration de la loi en vitesse donne la loi en position, à une constante près.

À chaque instant, la grandeur **cinématique de sortie** est **proportionnelle** à la grandeur **cinématique d'entrée**. Le coefficient de proportionnalité dépend de la position du mécanisme.

**Exemple** : système bille-manivelle

Ce mécanisme correspond à la celui que l'on retrouve dans un moteur thermique, par exemple.

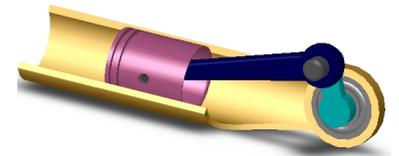


Le modèle cinématique comprend 4 liaisons, 4 DDL de liaison associés à 4 paramètres cinématiques.

Si on pose comme torseur cinématique des liaisons L<sub>1-0</sub> et L<sub>3-0</sub> :

$$\{V_{1/0}\}_O = \begin{Bmatrix} \omega_{10} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ et } \{V_{3/0}\}_* = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v_{30} \vec{x}_0 \end{Bmatrix} \text{ avec } \omega_{10} = \dot{\alpha} \text{ et } v_{30} = \dot{x}, \text{ les}$$

grandeurs cinématiques d'entrée-sortie sont  $\omega_e = \omega_{10}$  et  $v_s = v_{30}$ .



Si la loi entrée-sortie en position est  $x = f(\alpha)$ , par dérivation temporelle, on obtient la loi entrée-sortie en vitesse :

$$\dot{x} = \frac{df(\alpha(t))}{dt} = \dot{\alpha} f'(\alpha) \text{ soit } v_s = \omega_e f'(\alpha).$$

Quel que soit la fonction  $f(\alpha)$ , la vitesse de sortie est proportionnelle à la vitesse d'entrée à tout instant. Le coefficient de proportionnalité dépend de la position du mécanisme, c'est-à-dire de  $\alpha$ .

**I.2 Loi entrée-sortie statique**

Sous les mêmes conditions que celles présentées lors de l'étude des lois E/S en effort des transmetteurs linéaires, la connaissance de la loi cinématique en vitesse permet aussi de déterminer la loi **entrée-sortie statique** (ou loi entrée-sortie en effort).

Si le mécanisme ne comprend que les sollicitations associées aux **actions d'entrée** et de **sortie** ; ou si les efforts résistants sont caractérisés par un **rendement** en régime permanent ; le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble du mécanisme donne les résultats suivants :

si  $\frac{\text{Paramètre cinématique sortie}}{\text{Paramètre cinématique entrée}} = f(\text{paramètres de position})$  ,

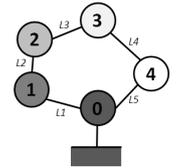
alors

- à l'**équilibre**, en **régime permanent** ou en **régime quasi-statique**, avec des **liaisons parfaites** ( $P_s = P_e$ ),
 
$$\frac{\text{Paramètre en effort sortie}}{\text{Paramètre en effort entrée}} = \frac{1}{f(\text{paramètres de position})}$$
- en **régime permanent** ou en **régime quasi-statique**, si le **rendement** est noté  $\eta$  ( $P_s = \eta P_e$ ),
 
$$\frac{\text{Paramètre en effort sortie}}{\text{Paramètre en effort entrée}} = \frac{\eta}{f(\text{paramètres de position})}$$

À chaque instant, la grandeur **en effort de sortie** est **proportionnelle** à la grandeur en **effort d'entrée**. Le coefficient de proportionnalité dépend de la position du mécanisme.

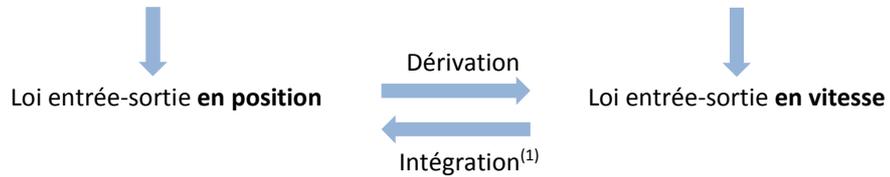
## II Déterminer la loi entrée-sortie cinématique d'une chaîne fermée

Nous nous intéressons à des mécanismes modélisés par des chaînes fermées.



Après avoir **identifié** les **paramètres d'entrée** et de **sortie**, les 4 méthodes pour obtenir une loi entrée-sortie cinématique sont :

- 1) **fermeture géométrique**
- 2) **fermeture cinématique**
- 3) produit **scalaire** (angle constant)
- 4) fermeture par **condition de non glissement** ou de **non pénétration**



(1) avec constante d'intégration déterminée pour une position particulière du mécanisme (« condition initiale »).

### II.1 Par fermeture géométrique

Démarche pour obtenir une loi **entrée-sortie en position** :

- écrire la **relation vectorielle de fermeture géométrique** de la chaîne de solides ; relation de Chasles entre les **points caractéristiques des liaisons** en parcourant la chaîne fermée :

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \dots + \vec{DA} = \vec{0}$$

- **projeter l'équation de fermeture** dans d'une base choisie pour faire apparaître les paramètres d'E/S et éliminer les paramètres intermédiaires (en général, la **base de référence**).

On obtient 3 équations scalaires pour un modèle spatial ;

- **éliminer les paramètres intermédiaires** en combinant les équations obtenues ;

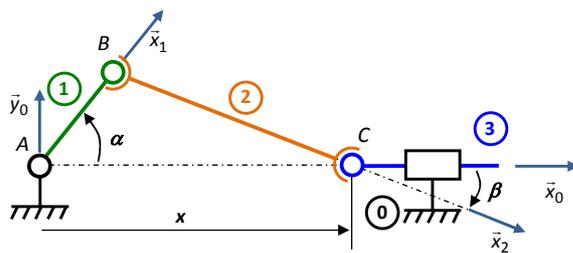
OU

- écrire la **norme au carré** de l'un des termes de la fermeture géométrique

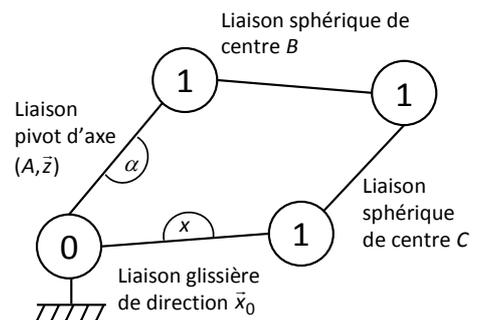
$$\|\vec{AE}\|^2 = (\vec{AB} + \dots + \vec{DE})^2 = \vec{AB}^2 + \dots + \vec{DE}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \dots + 2\vec{CD} \cdot \vec{DE}$$

**Application** : système bielle-manivelle. Déterminer la relation E/S en position.

$$AB = e \text{ et } BC = L$$



A1 - Écrire la fermeture géométrique



A2 - Projeter l'équation de fermeture et identifier le paramètre à éliminer.

A3 - Déterminer la relation E/S en position en supposant  $x$  l'entrée.

### Pour éliminer un angle

Pour **éliminer un angle**  $\beta$  présent dans 2 équations en cosinus et sinus, on cherche à utiliser le résultat suivant :

$$\text{Si } \begin{cases} (i) & R \cos(\beta) = f(\alpha, \lambda) \\ (ii) & R \sin(\beta) = g(\alpha, \lambda) \end{cases}, \quad (i)^2 + (ii)^2 \text{ donne } R^2 = f^2(\alpha, \lambda) + g^2(\alpha, \lambda).$$

En effet,  $(R \cos(\beta))^2 + (R \sin(\beta))^2 = R^2$ .

### Pour éliminer une distance

Pour **éliminer une distance en facteur** d'un cosinus et sinus, on cherche à utiliser le résultat suivant :

$$\text{Si } \begin{cases} (i) & \lambda \sin(\beta) = f(\alpha) \\ (ii) & \lambda \cos(\beta) = g(\alpha) \end{cases}, \quad \frac{(i)}{(ii)} \text{ donne } \tan(\beta) = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}.$$

### Pour déterminer un angle à partir d'une fonction trigonométrique

À partir du domaine de définition des fonctions inverses et des propriétés des fonctions trigonométriques, on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N}, |A| \leq 1 : \quad & \sin \alpha = A \Rightarrow \alpha = (-1)^n \arcsin(A) + n\pi \\ & \cos \alpha = A \Rightarrow \alpha = \pm \arccos(A) [2\pi] \\ & \tan \alpha = B \Rightarrow \alpha = \arctan(B) [\pi] \end{aligned}$$

### Pour déterminer un angle à partir d'une somme de sinus et cosinus

Il est parfois nécessaire de **simplifier une somme** de sinus et cosinus ainsi :

$$A \cos(\alpha) + B \sin(\alpha) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\alpha - \varphi) \text{ avec } \varphi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) [\pi] \quad (2)$$

$$\text{En effet : } A \cos(\alpha) + B \sin(\alpha) = \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \alpha + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \alpha \right).$$

$$\text{En posant } \cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ et } \sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ on a bien } (\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2 = 1 \text{ et l'angle } \varphi \text{ vérifie } \tan \varphi = \frac{B}{A}$$

$$\text{, soit } \varphi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \text{ modulo } \pi.$$

$$\text{La relation devient : } A \cos(\alpha) + B \sin(\alpha) = \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\alpha - \varphi).$$

(1) avec toutes les précautions nécessaires sur les valeurs de  $g(\alpha)$ .

(2) avec toutes les précautions nécessaires sur la valeur de  $A$ .

(1) Autre possibilité, on pose :

$$\sin \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\text{et } \cos \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\text{Dans ce cas : } \tan \varphi = \frac{A}{B}$$

$$\text{et } \sin(\alpha + \varphi) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

D'où le résultat<sup>(1)</sup> :

$$\text{Si (i) } A \cos(\alpha) + B \sin(\alpha) = C \text{ et si } \left| \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \leq 1,$$

$$\text{alors } \cos(\alpha - \varphi) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ avec } \varphi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) [\pi]$$

$$\text{et } \alpha = \pm \arccos\left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) [2\pi] + \arctan\left(\frac{B}{A}\right) [\pi].$$

Les « bonnes » solutions sont déterminées à partir de la géométrie du système.

## II.2 Par fermeture cinématique

Démarche pour obtenir une loi **entrée-sortie en vitesse** :

- écrire la relation de **composition des torseurs cinématiques** en parcourant la chaîne fermée :

$$\{V_{n/0}\} = \{V_{n/n-1}\} + \dots + \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\}$$

On obtient **2 équations vectorielles** de fermeture : fermeture du vecteur vitesse angulaire et fermeture du vecteur vitesse en un point ;

- déterminer, en fonction des **domaines de validité** des liaisons et des **paramètres cinématiques d'E/S** à faire apparaître, la ou les **équations scalaires** à écrire. Il faut choisir :
  - l'équation vectorielle, en vecteur vitesse de rotation ou en vecteur vitesse ;
  - le **point de composition** pour l'équation de fermeture du vecteur **vitesse** (en général, le point d'intersection des domaines de validité des liaisons intermédiaires) ;
  - la **direction de projection** de l'équation vectorielle.

## II.3 Par traduction d'une propriété angulaire

Démarche pour obtenir une loi **entrée-sortie en position** :

- écrire le produit scalaire qui traduit la particularité angulaire du système.

$$\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = \text{constante} \text{ (0 si les vecteurs sont orthogonaux).}$$

Il s'agit de la conservation, imposée par certaines liaisons, d'un angle lors du mouvement.

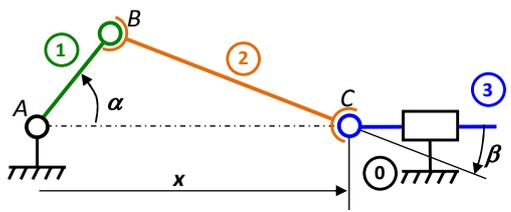
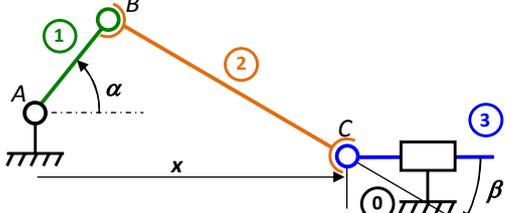
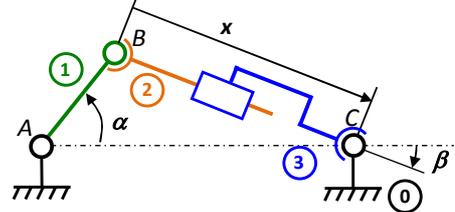
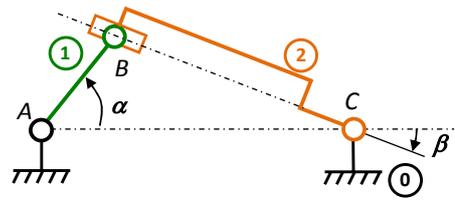
## III Mécanismes de transformation de mouvement usuels

Les mécanismes de transformation de mouvement sont nombreux, variés et font l'objet d'ouvrages entiers. Ne sont repris ici que quelques exemples usuels.

### III.1 Mécanisme 3 barres / système bielle-manivelle

Fermeture géométrique dans un **triangle déformable** (ABC sur les figures) avec un angle et une longueur variable. Utilisé avec ou sans transformation de mouvement.

Ci-dessous des exemples de configuration. Le système bielle-manivelle est à connaître.

<p><b>Système bielle-manivelle</b></p> <p>(1) manivelle (2) bielle (3) coulisseau</p> <p>Utilisé dans les moteurs ou compresseurs, par exemple. Entrée / sortie : <math>x</math> et <math>\alpha</math>.</p>	
<p>Système bielle-manivelle avec coulisseau désaxé</p>	
<p><b>Mécanisme 3 barres avec bielle de longueur variable</b></p> <p>La longueur variable peut être contrôlée par un vérin électrique, par exemple.</p>	
<p>Mécanisme 3 barres avec bielle de longueur variable non pilotée</p> <p>Permet la transformation d'une rotation continue en rotation alternative, par exemple. En général, la liaison sphère-cylindre n'est pas pilotée.</p>	

Pour obtenir la relation E/S en position, on peut :

- projeter la relation vectorielle dans la base de référence des angles, puis éliminer l'angle en trop. Attention, il ne faut pas nécessairement développer la relation ;
- Écrire la longueur au carré de la bielle (ou, d'une manière générale, du côté opposé à l'angle à conserver, cf. la relation d'Al-Kashi).

Si la bielle est longue devant la longueur de la manivelle, la transformation de mouvement est sinusoïdale :  $x \approx L + e \cos \alpha$  et  $\dot{x} \approx -\dot{\alpha} e \sin \alpha$ .

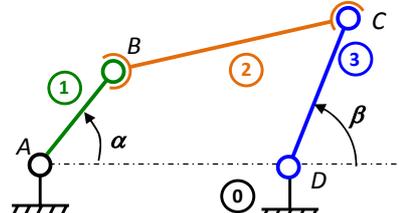
### III.2 Mécanisme 4 barres

Fermeture géométrique dans un **quadrilatère déformable** (ABCD sur les figures). Souvent utilisé avec des pièces de longueurs constantes. L'ensemble de sortie est une manivelle ou la bielle.

Permet aussi la transformation de mouvement rotation – translation circulaire si le quadrilatère est un parallélogramme.

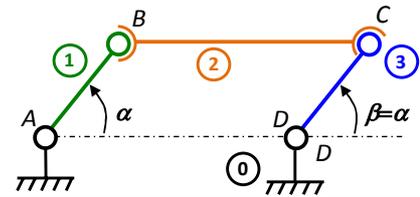
Les lois obtenues sont très variables en fonction des longueurs relatives.

Ce site donne des exemples : <https://www.mathcurve.com/courbes2d/troisbarres/troisbarre.shtml>

<p><b>Mécanisme 4 barres</b></p> <p>(1) et (3) manivelles (2) bielle</p> <p>Si l'entrée est généralement sur une manivelle, la sortie est soit la deuxième manivelle, soit la bielle.</p>	
---	---

**Mécanisme 4 barres en parallélogramme déformable**

Peut servir à transformer une rotation en translation circulaire



Pour obtenir la relation E/S en position il faut écrire la fermeture géométrique et projeter dans la base de définition des angles puis éliminer l'angle intermédiaire. Une résolution numérique est souvent pertinente.

Pour un mécanisme en parallélogramme, une analyse géométrique est suffisante.

**III.3 Système à came**

Un système à came **couple le mouvement de 2 pièces par contact**. D'un point de vue cinématique, le mécanisme revient à imposer le maintien d'un point sur une surface, le **couplage est donc réalisé par une liaison sphère-plan** qui modélise un contact supposé ponctuel.

Dans les structures les plus simples, la surface est plane ou cylindrique, mais elle peut être beaucoup plus complexe afin d'imposer des lois de mouvement particulières (avec continuité de la dérivée de l'accélération, par exemple).

Quelques animations ici : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Came\\_\(mécanique\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Came_(mécanique))

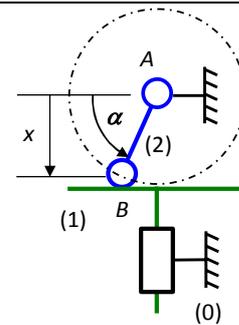
**Came à plateau axial**

Impose au point de contact de rester sur un plan.

Transforme une rotation continue en translation alternative sinusoïdale.

Les directions sont perpendiculaires.

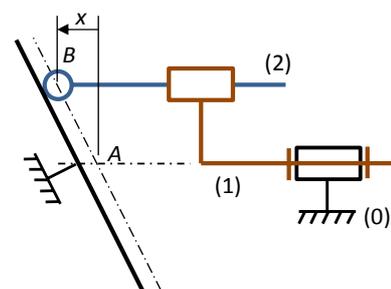
L'amplitude du mouvement de translation est le double de l'excentricité AB.

**Came à plateau incliné**

Impose au point de contact de rester sur un plan.

Transforme une rotation continue en translation alternative sinusoïdale.

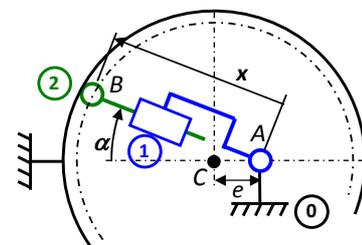
Les directions sont parallèles.

**Came circulaire excentrée**

Impose au point de contact de rester sur un cercle.

Transforme une rotation continue en translation alternative.

L'amplitude du mouvement de translation est le double de l'excentricité  $e=AC$ .



Pour obtenir la loi E/S géométrique, il faut écrire une fermeture passant par le point de contact.

Pour obtenir la loi E/S cinématique directement, il faut écrire la fermeture cinématique en vitesse, au point de contact, en projection sur la normale au contact. Cela revient à écrire la propriété cinématique de la liaison sphère-cylindre associée au contact ponctuel, du type :  $\vec{V}_{B \in 2/1} \cdot \vec{n} = 0$ .

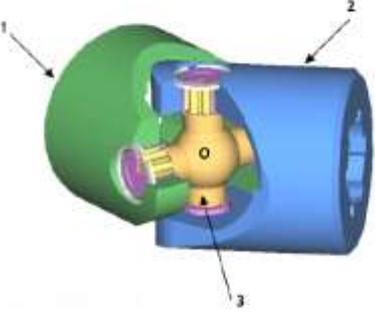
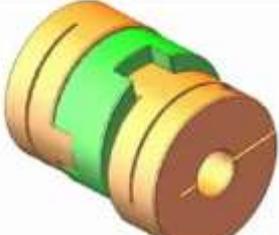
### III.4 Joint d'accouplement

Un joint d'accouplement permet de coupler le mouvement de 2 arbres en rotation dont les axes ne sont pas confondus.

Un joint est dit **homocinétique** si la vitesse angulaire de l'arbre de sortie vaut, à tout instant, celle de l'arbre d'entrée.

(1) présent sur le Maxpid

Le joint de Oldham<sup>(1)</sup>, homocinétique, et le joint de cardan, non homocinétique, sont des classiques.

<p><b>Joint de cardan</b></p> <p>1 et 2 sont les fourches 3 est le croisillon</p> <p>Le croisillon est en liaison pivot avec les 2 fourches. Les axes des pivot sont perpendiculaires et coïncidents.</p> <p>La relation s'obtient en écrivant le <b>produit scalaire entre les directions des axes des pivots</b> qui est nul.</p>	
<p><b>Joint d'Oldham</b></p> <p>Le disque intermédiaire est en liaison glissière avec les plateaux d'entrée et de sortie.</p> <p>La relation s'obtient par <b>fermeture cinématique</b>.</p>	

Voir le sujet de TD pour plus de détails.

## Savoirs

Je connais :

- les notions de loi entrée-sortie cinématique et statique
- les hypothèses pour déterminer une loi entrée-sortie statique à partir de la loi cinématique
- la relation entre les lois entrée-sortie cinématiques en vitesse et en position
- les démarches pour déterminer une loi d'entrée-sortie par fermeture géométrique, fermeture cinématique et particularité angulaire

## Savoir-faire

Je sais :

- identifier les paramètres cinématiques et de position d'entrée et de sortie
- appliquer les démarches de fermeture géométrique, cinématique et de particularité angulaire afin de déterminer une loi entrée-sortie cinématique en vitesse ou position
- déterminer, sous condition, une loi entrée-sortie statique à partir d'une loi cinématique