Calculs, mesures et incertitudes

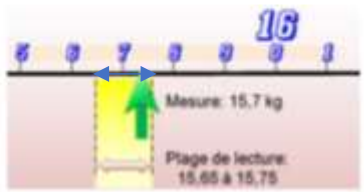
Rappels de 3ème

Chiffres certains et incertains

Les chiffres certains sont ceux sur lesquels il n'y a aucune ambiguïté. Donc ici 2.

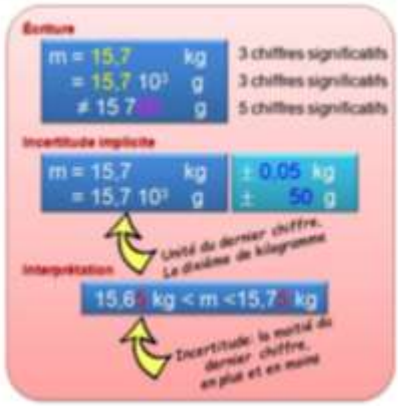
Lecture de la mesure

Sur cette balance, l'aiguille dépasse légèrement la graduation 15,7. On lit tout de même : 15,7 kg.
Chaque fois que l'aiguille s'arrêtera autour du 0,7 (plage en jaune), on lira 15,7 kg en sachant que la mesure est comprise entre 15,65 kg et 15,75 kg.
Soit, une incertitude égale à la moitié du dixième de kilogramme.



Interprétation

Lorsque la mesure indique 15,7 kg, l'intention est de signifier que la lecture de la plus petite graduation de la balance est le dixième de kg, soit la centaine de grammes.
On dit que la mesure est faite avec trois chiffres significatifs, ou encore, un chiffre significatif après la virgule.
Lire 15,700 kg ou encore 15 700 (cinq chiffres significatifs) serait abusif, nous n'avons pas accès à cette précision sur notre balance.



Incertitude

Lorsqu'on veut expliciter l'incertitude, on peut soit mentionner sa valeur en plus et en moins ; ou alors, donner une inégalité (dit: intervalle de confiance).

Rappels de seconde

Demi-unité du dernier chiffre exprimé

Spécification	Les manuels indiquent parfois la manière d'interpréter la mesure : • *En l'absence d'autres indications, on convient que l'incertitude porte sur le dernier chiffre exprimé et vaut une demi-unité de ce chiffre.* • *Lorsque la valeur d'une grandeur est fournie sans incertitude, cette dernière est, par convention, égale à une demi-unité du dernier chiffre exprimé.* • *On appelle incertitude absolue une demi-unité du dernier chiffre affiché.*
Historique	• *L'erreur commise, en plus ou en moins, est égale à une demi-unité du dernier ordre conservé – Bézout (1810)*

Que signifie ces expressions	**Interprétation** On entend par unité, l'unité de mesure qui correspondrait à ce nombre, comme s'il était converti en un nombre sans sa virgule. **Exemple pas à pas** 5,4 g => sans virgule : 54 décigrammes (dg) => précision : la moitié de 1dg = 0,5 dg => 54 dg $\pm$ 0,5 dg => 5,4 g $\pm$ 0,05 g Autres exemples 123,00 m² => (123,00 $\pm$ 0,005) m² On note ici que les deux 0 sont des chiffres significatifs. U1 = 730 mV => 729,5 mV < U1 < 730,5 mV U2 est exprimé avec 2 chiffres significatifs. U2 = 0,73 V => 0,725 V < U2 < 0,735 V U1 est exprimé avec 2 chiffres significatifs.
Compréhension	Le mot **unité** peut prêter à confusion. Ici, il s'agit bien de l'unité de mesure, mais certains peuvent penser à l'unité d'un nombre (le dernier chiffre d'un nombre entier) et ne plus rien y comprendre. Même si le lecteur pense à l'unité de mesure, pour lui c'est, par exemple, le kilogramme, mais pas le dixième de kilogramme. Le lecteur est perdu.
Que dire ? Suggestions:	• *Par convention, on dit que le dernier chiffre significatifs est connu à $\pm$0,5 près* • *L'incertitude absolue ΔL sur la mesure est égale à une demi–unité du dernier rang affichée par l'instrument.* • *L'incertitude correspond à la moitié de l'unité de mesure correspondant à la position du dernier chiffre exprimé.*

Rappels de Première

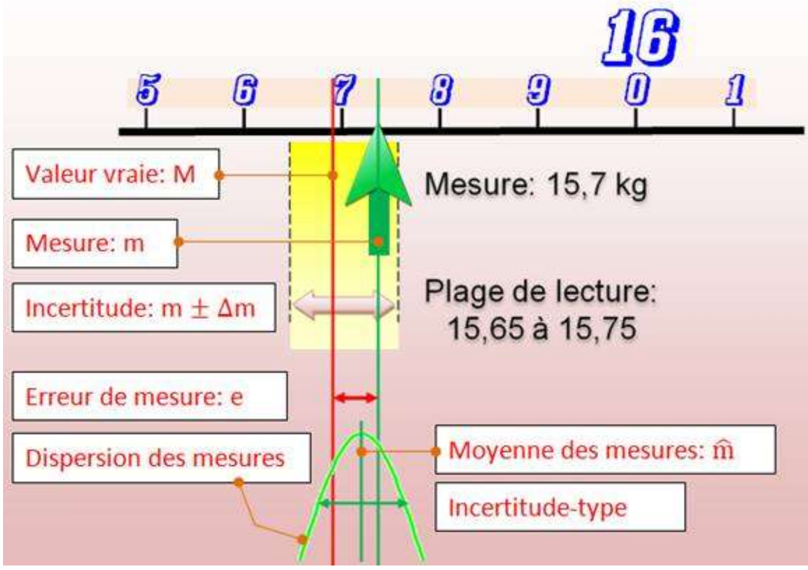
Paramètres associés à une mesure

Définition	Mesurer une grandeur consiste à rechercher la valeur de cette grandeur et à lui associer une incertitude afin de pouvoir qualifier la qualité de la mesure. Comment caractériser cette qualité ? • Valeur mesurée comparée à la valeur vraie ; • Résultat, précision, incertitude, erreur de mesure.

Erreur

L'erreur de mesure est la différence entre la valeur mesurée et la valeur vraie.
Elle peut être aléatoire (quelconque) ou répétitive (toujours la même : biais de mesure).
L'instrument de mesure est fidèle s'il donne toujours des indications voisines pour plusieurs mesures

Résumé des paramètres liés à une mesure



Calcul de la moyenne et de l'écart-type

$$\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \quad \& \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(m_i - \hat{m})^2 \qquad (1)$$

Composition des incertitudes absolues

$$\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b \qquad (2)$$

$$\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b \qquad (4)$$

Incertitude absolue sur la somme = somme des incertitudes absolues

$$\Delta(a \times b) = b\Delta a + a\Delta b \qquad (3)$$

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b\Delta a + a\Delta b}{b^2} \qquad (5)$$

$$\Delta a^n = n.a^{n-1}.\Delta a \qquad (6)$$

Composition des incertitudes relatives

$$\frac{\Delta(a+b)}{a+b} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a+b} \qquad (8)$$

$$\frac{\Delta(a-b)}{a-b} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a-b} \qquad (10)$$

$$\frac{\Delta(a \times b)}{a \times b} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \qquad (7)$$

$$\Delta(a/b)/(a/b) = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \qquad (9)$$

$$\frac{\Delta a^n}{a} = n.\frac{\Delta a}{a} \qquad (11)$$

Incertitude relative sur le produit = somme des incertitudes relative

Précision et justesse

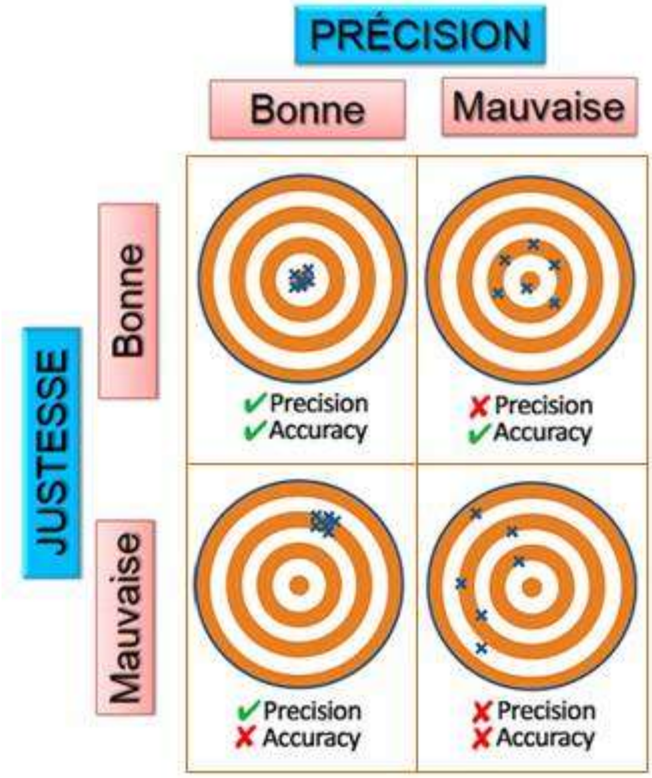
Précision d'une valeur – *Precision*

= incertitude qui lui est attachée.

Plus un résultat ou un calcul est précis, plus le nombre de chiffres significatifs est grand et plus l'intervalle de confiance est petit.

Justesse – Accuracy

= Erreur de mesure minimale.
La valeur vraie étant généralement inconnue, la justesse est difficile à apprécier. On s'en approche, en faisant de nombreuses mesures ou encore en pratiquant des approches variées.



Qualité des appareils de mesure

Fidélité
Un appareil de mesure est fidèle s'il donne un même résultat pour plusieurs mesures dans les mêmes conditions.

Exactitude
Un appareil de mesure est exact si les résultats sont justes, si l'erreur de mesure est minimale.

Exemple d'application à une formule

La période d'oscillation T d'un pendule simple dépend de la longueur l du pendule :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

En mesurant la longueur du pendule et sa période (donc ici deux mesures), on obtient de façon simple l'accélération de la pesanteur g : $g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}$.

L'incertitude sur g est obtenue à partir des incertitudes sur l et T par :

$$\Delta g(l,T) = \frac{\partial g}{\partial l}\Delta l + \frac{\partial g}{\partial T}\Delta T = 4\pi^2(\frac{1}{T^2}\Delta l + \frac{2l}{T^3}\Delta T)$$

Méthode simplifiée : selon (7) et (9), $g = 4\,\pi^2 \frac{l}{T\times T}$ (produit et quotient → erreurs relatives s'ajoutent)

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta T}{T} \Rightarrow \Delta g = \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta T}{T}\right) \times g = 4\,\pi^2 \frac{l}{T^2}\left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta T}{T}\right)$$

Application numérique :

Votre appareil de mesure du temps est précis à $\pm$0,01 seconde prés et l'appareil laser de mesure des distances est précis au millimètre. Après avoir mesurer une longueur du pendule de 30,1 cm et 20 périodes d'oscillation en 21,98s.

Donner sa variation relative et donner la variation absolue de la valeur de g.

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta T}{T} = \frac{1\times 10^{-3}}{0{,}301} + 2 \times \frac{0{,}01}{1{,}099} = 0{,}0215 = 2{,}15\%$$

Calcul de g : $g = 4\,\pi^2 \frac{0{,}301}{1{,}099^2} = 9{,}8385\ \mathrm{m.s^{-2}}$

$$\Delta g = \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta T}{T}\right) \times g = 0{,}211\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

Quelle est alors la précision de la mesure de g au regard de la précision des appareils. Préciser la valeur max et min que peut prendre g :

Autre Exemple d'application à une formule

Utilisation d'un accéléromètre pour mesurer g :

Exemple d'une masse (m=5,01g) sur un ressort (k = 2,13 N/m) et $\Delta x = L - L_0 = -23{,}02$mm

Si équilibre alors F=P ⇔ $-k\Delta x = mg$ ⇔ $g = \frac{-k(L-L0)}{m}$