

# Robot SPHERO



## I Présentation du support

### I.A – Description du robot Sphero

Une nouvelle génération de robots à mobilité non conventionnelle a vu le jour avec la conception de robots en forme de sphère. Ces robots commencent à être utilisés dans des environnements difficiles (centrale nucléaire, terrain irrégulier) pour des missions d'inspection et de surveillance. Ce type de robot est aussi présent dans l'industrie du divertissement sous la forme d'objets connectés contrôlables avec un smartphone (ou tablette).

C'est le cas du robot **Sphero** créé par la société Orbotix et qui sert de support d'étude pour ce sujet.

Créé pour le loisir et l'éducation, le robot Sphero roule sur lui-même pour se déplacer. Une base robotique appelée module interne et dite différentielle (plateforme munie de deux roues motrices indépendantes, de même axe) est placée dans une sphère (le corps du robot) qui sert de liaison au sol et permet le déplacement (figure 1).

Le Sphero est commandé par un smartphone avec lequel l'utilisateur guide le robot.



Figure 1 Constitution du Sphero

Même si les consignes de l'utilisateur correspondent au comportement attendu du Sphero (cap et vitesse du corps sphérique), c'est en réalité le module interne que l'utilisateur commande grâce à son smartphone. Le principe de déplacement du Sphero peut être comparé à celui d'une roue de hamster : quand l'animal court à l'intérieur, il déplace le centre de gravité du système, ce qui fait tourner la roue. Ainsi, les deux roues motrices du module interne créent le roulement du corps sphérique du Sphero.

### I.B – Manipulation et déplacement du robot Sphero

Pour commander le robot l'utilisateur dispose d'une application sur son smartphone (ou sa tablette). Une fois la connexion bluetooth établie entre le Sphero et le smartphone, l'utilisateur peut mettre en mouvement le robot grâce à une interface tactile (figure 2). L'utilisateur place son doigt au centre du cadran (sur le curseur ayant le sigle Sphero) puis le déplace dans le cadran. La position du doigt sur le cadran fournit une consigne de cap (par rapport à la marche avant) et de vitesse au robot : plus le doigt est éloigné du centre du cadran plus le robot va vite.

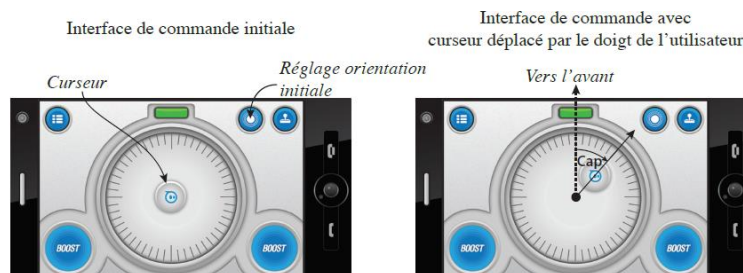
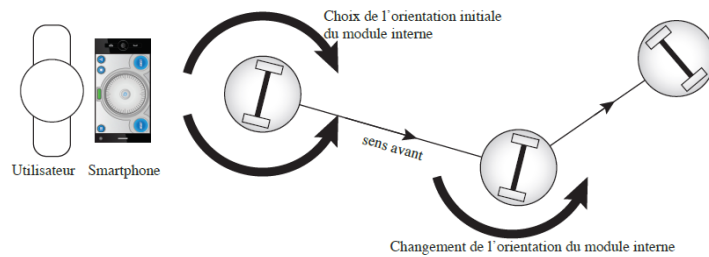


Figure 2 Interface homme-machine (IHM) de commande du Sphero



**Figure 3** Déplacement du robot

Un exemple de déplacement du robot Sphero est décrit par la figure 3. Pour un cap donné le Sphero se déplace selon une trajectoire rectiligne. Lorsque le cap est changé par l'utilisateur, le module interne change son orientation autour d'un axe vertical de lacet et une nouvelle direction est ainsi imposée au Sphero. Ce dernier reprend un déplacement en ligne droite suivant le nouveau cap.

Afin que l'utilisation du robot soit à la hauteur des attentes de l'utilisateur, le robot Sphero doit satisfaire les exigences définies figure 4.

## II Étude préliminaire et respect de l'exigence 2 de maniabilité

Cette partie préliminaire propose de mener une analyse comportementale du Sphero afin de mettre en évidence la problématique qui sera traitée dans ce sujet. Cette analyse permettra de définir l'objectif du sujet.

Un essai est réalisé avec le Sphero en mode non asservi. Les capteurs du robot ne sont pas utilisés pour la commande de ce dernier (figure 5).

La figure 5 montre la trajectoire suivie par le Sphero lors de l'essai. Le Sphero est en mode non asservi et connecté à un ordinateur (liaison sans fil). À l'écran de l'ordinateur est affiché un parcours délimité par deux lignes et l'utilisateur peut cliquer à l'écran pour imposer au Sphero une consigne de cap. Celle-ci correspond à la direction du vecteur ayant pour origine la position mesurée du Sphero au moment du clic et pour extrémité le point cliqué à l'écran. L'expérimentation est réalisée en intérieur et sans aucune perturbation pouvant altérer le fonctionnement du robot. La vitesse du robot est volontairement limitée à 50% de sa vitesse maximale afin de rendre la manipulation plus aisée pour l'utilisateur.

**Q 1.** En considérant le Sphero comme parfaitement asservi aux consignes de clic de l'utilisateur, quel serait le nombre minimal de consignes de changement de cap nécessaire pour faire évoluer le robot selon la trajectoire théorique ? Pour chacune de ces consignes de changement de cap quelle est la valeur du cap imposé (à l'instant initial le cap est de 0 deg) ? **/4Pts**

Il y a 2 virages, donc 2 changements de cap :

- 1<sup>er</sup> virage à droite ; cap (-90°),
- 2<sup>ème</sup> virage à gauche ; cap (+90°).

**Q 2.** D'après l'expérimentation, l'exigence 2 de maniabilité est-elle respectée ? Justifier la réponse à partir du nombre d'actions de changement de cap réalisées par l'utilisateur lors de l'expérimentation.

**/2Pts**

Entre les deux positions 4 et 6, le robot s'écarte de plus de 25 cm de sa trajectoire de consigne : L'exigence 2.3.1 n'est pas validée.

Entre les positions 1 et 4, il effectue des oscillations de lacet et montre une dérive de cap : Les exigences 2.1.1. et 2.1.3. ne sont pas validées.

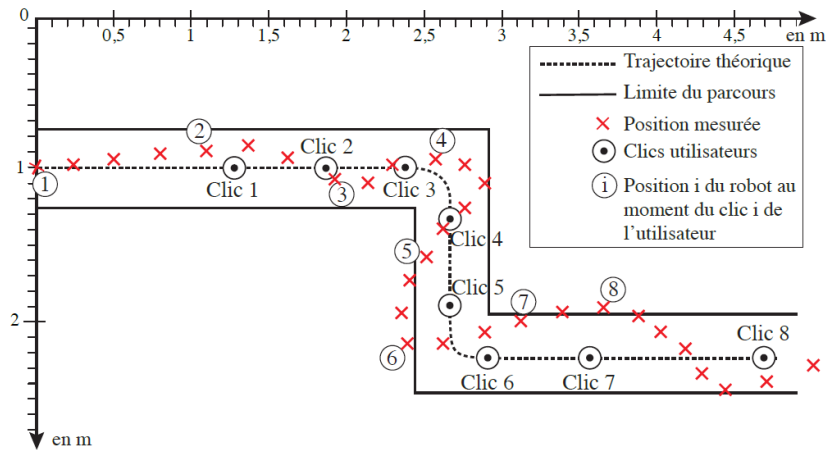


Figure 5 Trajectoire du Sphero

Au vu de l'essai analysé précédemment il apparait que sans commande spécifique le robot Sphero n'atteint pas toutes les exigences attendues. Le comportement précédemment observé impose à l'utilisateur de compenser sans cesse les défauts de trajectoire du Sphero, ce qui rend ce dernier difficilement maniable et donc inutilisable. La suite du sujet vise à résoudre ce problème.

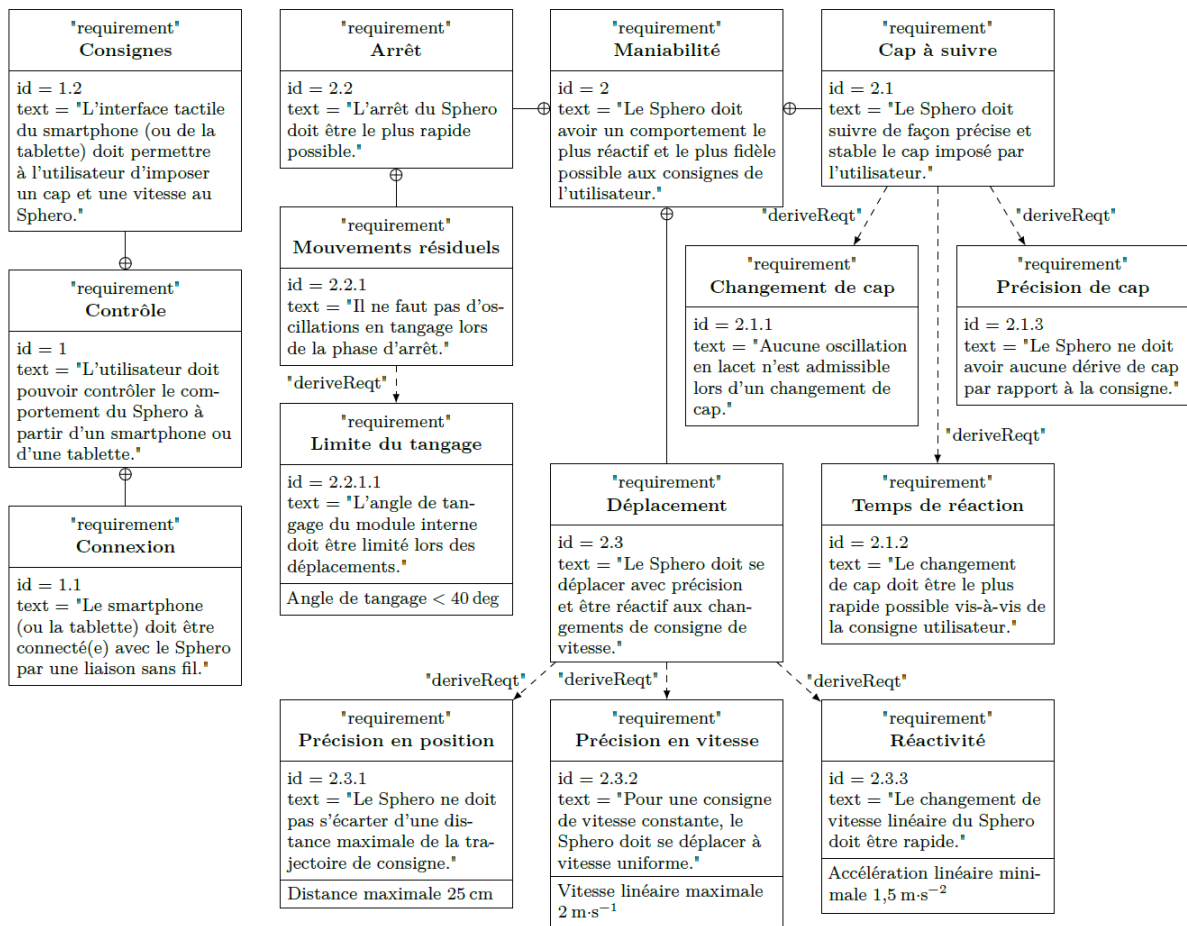


Figure 4 Diagramme des exigences du Sphero

#### IV Architecture détaillée du robot SPHERO

La composition du robot est fournie par le diagramme de définition des blocs figure 6.

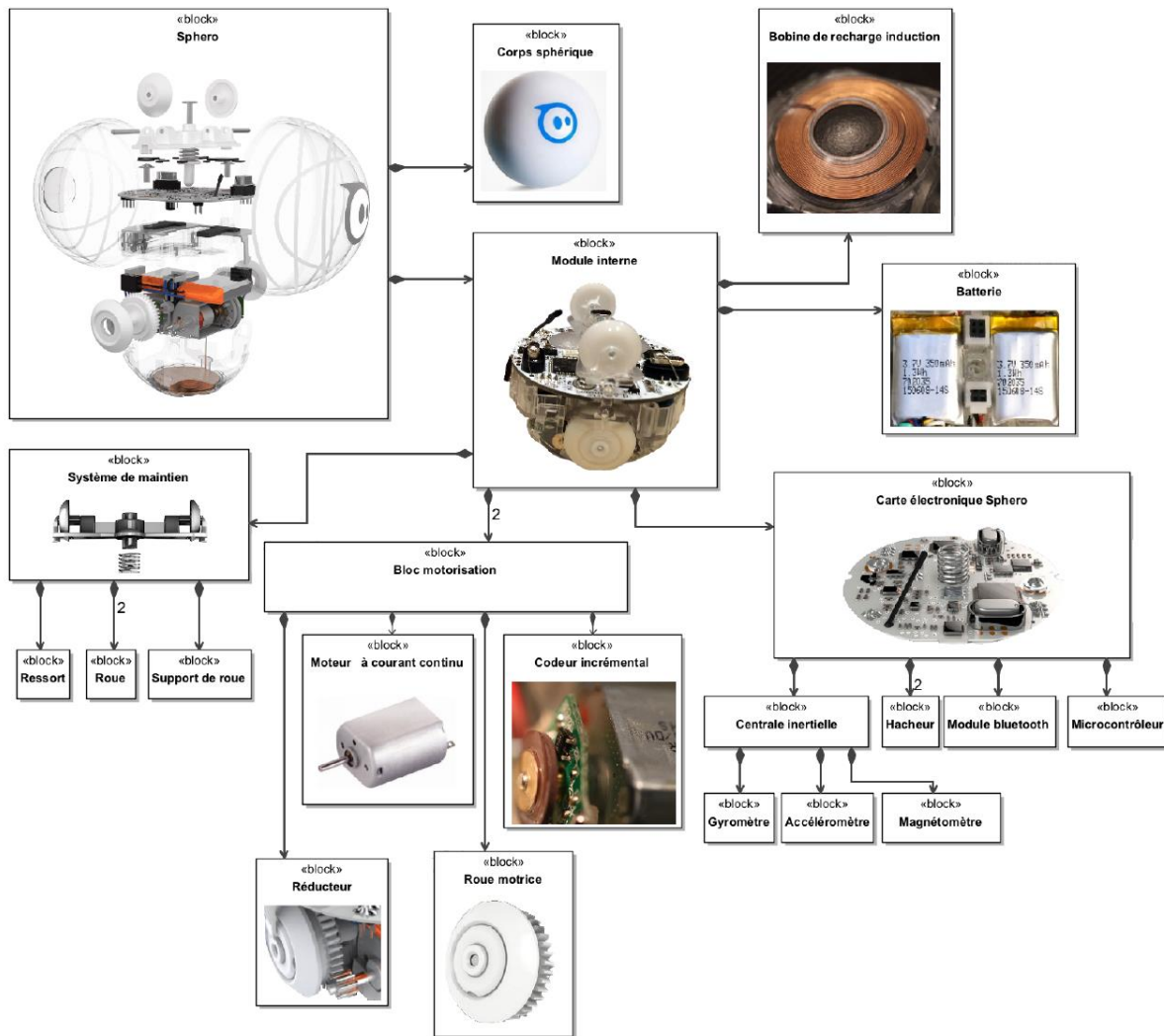


Figure 6 Diagramme de définition des blocs du Sphero

L'avance et l'orientation du robot sont créées par le module interne qui possède deux blocs de motorisation identiques et indépendants (comprenant chacun en particulier une roue motrice et un moteur).

Le module interne est également équipé d'une centrale inertielle composée d'un magnétomètre (mesure du champ magnétique terrestre), d'un accéléromètre numérique (qui calcule les déplacements selon trois axes par double intégration des accélérations mesurées) ainsi que d'un gyromètre (mesure des vitesses de rotation en  $\text{deg}\cdot\text{s}^{-1}$  autour de trois axes) permettant d'acquérir les informations décrites par la figure 7.

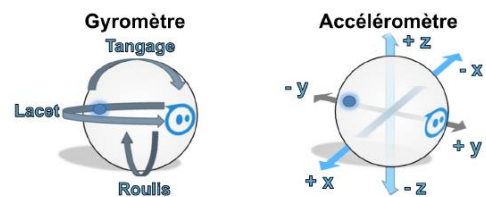
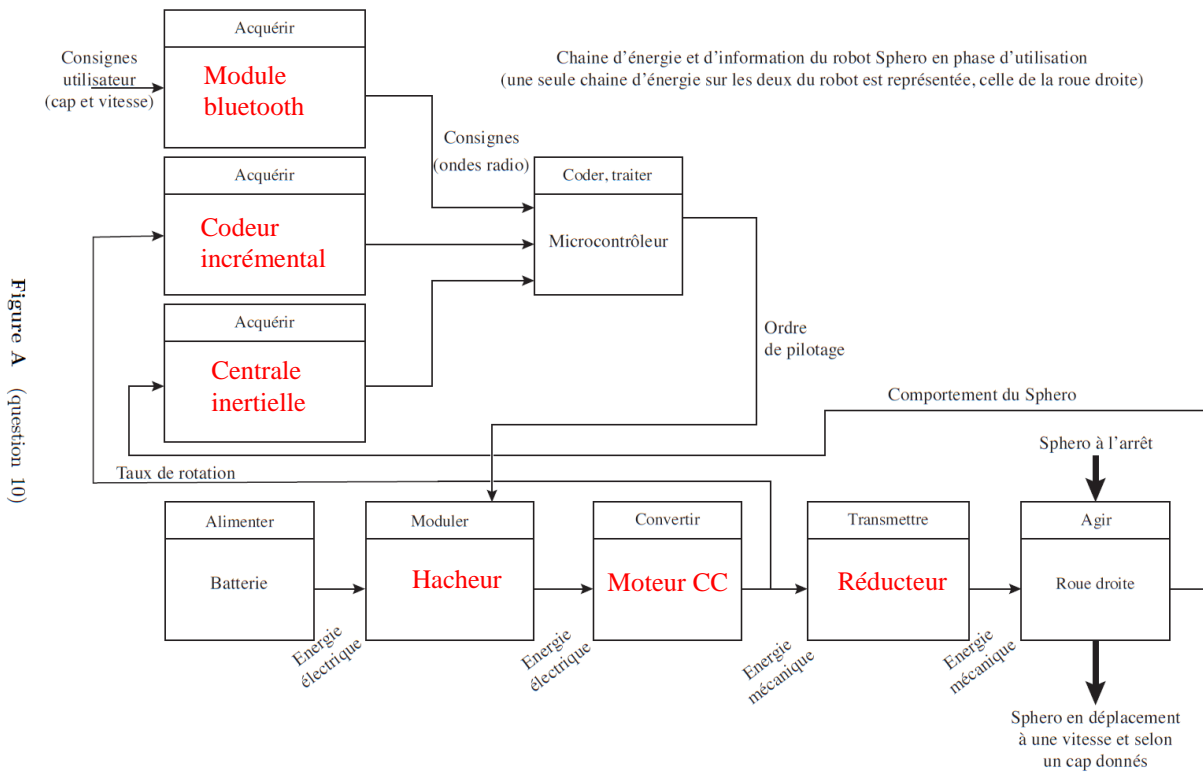


Figure 7 Illustration des informations acquises par la centrale inertielle

**Q 3.** Compléter sur la figure A du document réponse la description chaîne d'information / chaîne d'énergie du robot Sphero. . /2Pts



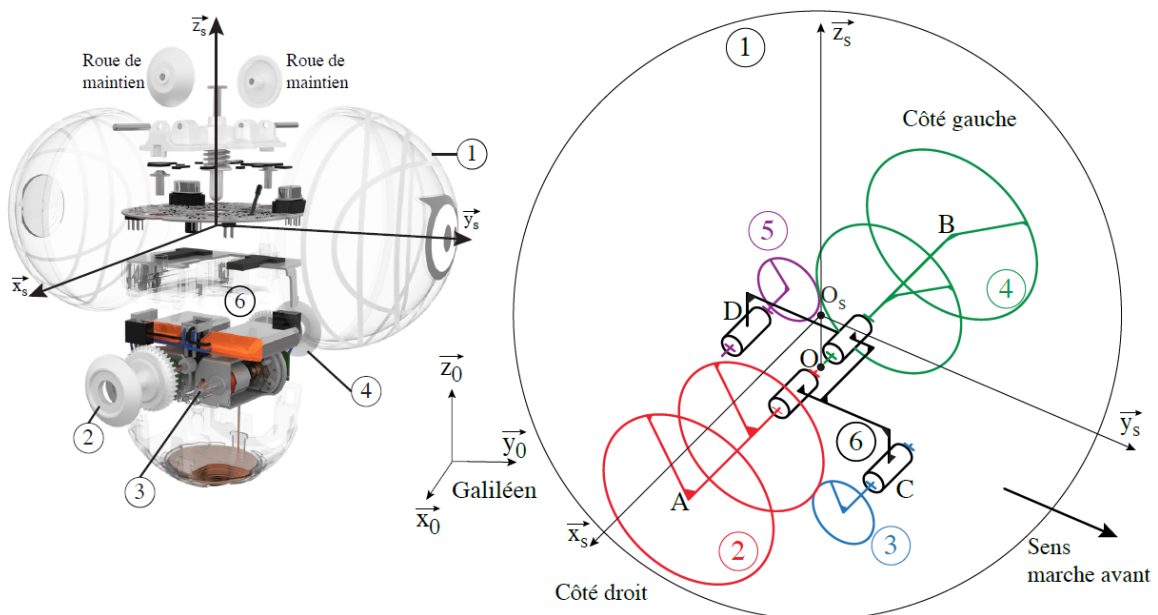
## V Déplacement et réglage de cap du robot Sphero

Le robot est équipé de deux actionneurs (moteurs électriques à courant continu) indépendants. Il est de fait nécessaire de mettre en évidence le lien entre le comportement du robot Sphero et celui des actionneurs.

### Objectif

Mettre en évidence la relation entre les actionneurs et le comportement du Sphero, afin de déterminer la façon dont les actionneurs doivent être commandés.

### V.A – Modélisation et paramétrage



**Figure 8** Schéma cinématique 3D du Sphero (sans le système de maintien)

1 désigne le corps sphérique du robot, 2 la roue motrice droite, 3 l'arbre moteur denté droit, 4 la roue motrice gauche, 5 l'arbre moteur denté gauche et 6 le châssis du module interne. Par la suite la désignation « **module interne** » correspond à l'ensemble {2+3+4+5+6}.

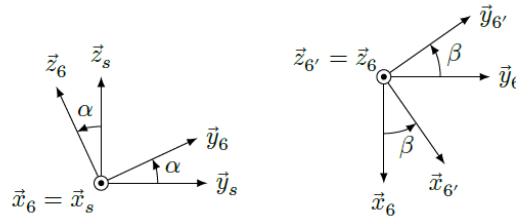


Figure 9 Définition des repères  $\mathcal{R}_6$  et  $\mathcal{R}_{6'}$

Le repère  $\mathcal{R}_s(O_s; \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  accompagne le robot Sphero et est tel que  $\vec{z}_s = \vec{z}_0$  à chaque instant du mouvement, avec  $\vec{z}_0$  la verticale du lieu et  $\vec{y}_s$  dans la direction d'avance du robot. Le point  $O_s$  correspond au centre du corps sphérique du robot.

Le châssis du module interne possède une mobilité en lacet et une en tangage par rapport au corps du Sphero. Le roulis du châssis du module interne par rapport au corps sphérique 1 n'est pas possible du fait de la forme des roues et de leur matière.

Le repère  $\mathcal{R}_6(O; \vec{x}_6 = \vec{x}_s, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$  se déduit du repère  $\mathcal{R}_s$  par rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $(O, \vec{x}_s)$ . Cet angle  $\alpha$  définit l'angle de tangage du châssis du module interne par rapport au repère  $\mathcal{R}_s$ .

Le repère  $\mathcal{R}_{6'}(O; \vec{x}_{6'}, \vec{y}_{6'}, \vec{z}_{6'} = \vec{z}_6)$  lié au châssis du module interne, se déduit du repère  $\mathcal{R}_6$  par rotation d'angle  $\beta$  autour de l'axe  $(O, \vec{z}_6)$ . Cet angle  $\beta$  définit l'angle de lacet du châssis du module interne par rapport au repère  $\mathcal{R}_s$ .

La figure 10 propose un schéma cinématique du Sphero projeté dans le plan  $(O; \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  ainsi que dans le plan  $(O; \vec{x}_s, \vec{y}_s)$  (le système de maintien n'est pas pris en compte).

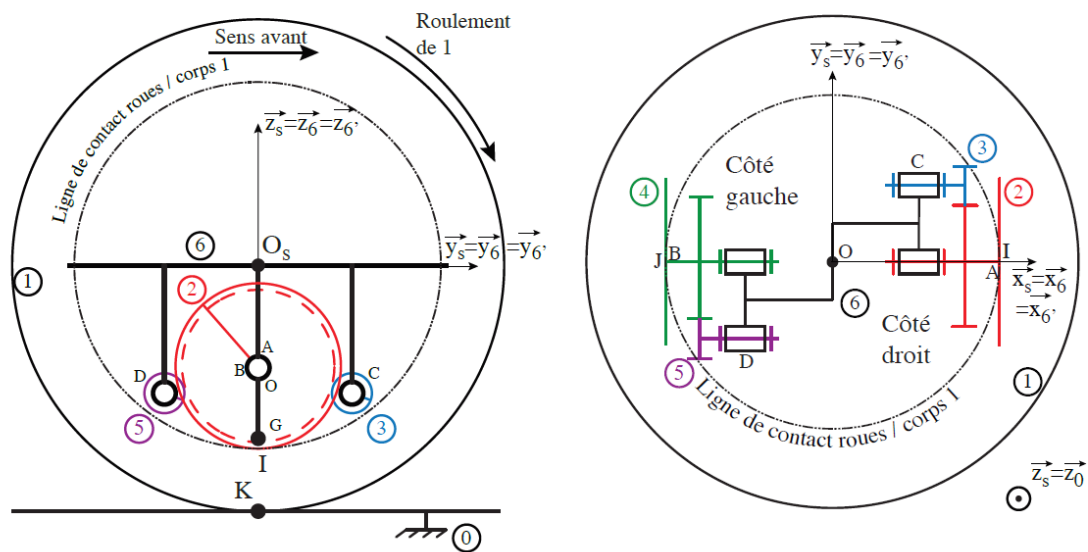


Figure 10 Schémas cinématiques du Sphero vu de côté et de dessus avec  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$

Le graphe des liaisons du robot Sphero (sans le système de maintien) est présenté figure 11.

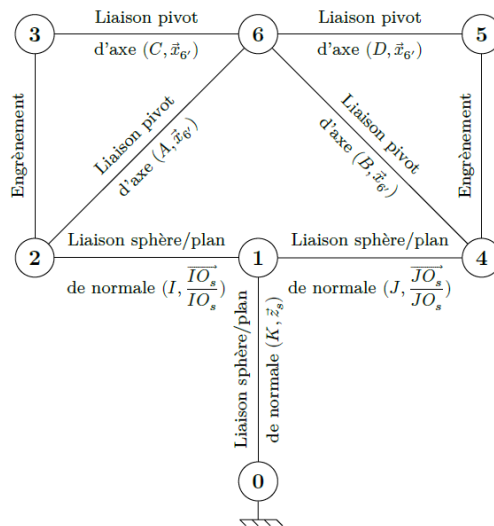


Figure 11 Graphe des liaisons du Sphero

### Hypothèses

L'hypothèse de roulement sans glissement sera adoptée au point  $I$  (point de contact 2/1), au point  $J$  (point de contact 4/1) et au point  $K$  (point de contact 1/0).

### Modèles cinématiques

- Les torseurs cinématiques sont notés :  $\{v_{si/sj}\} = \begin{Bmatrix} p_{ij} & u_{ij} \\ q_{ij} & v_{ij} \\ r_{ij} & w_{ij} \end{Bmatrix}_{X, B_6'}$
- Du fait de l'hypothèse de roulement sans glissement au point  $I$ , le torseur cinématique de la liaison 2/1 s'écrit en  $I$  et dans la base  $B_6'$  ( $O; \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s = \vec{z}_6$ )

$$\{v_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{I, B_6'}$$

- Pour les mêmes raisons,

$$\{v_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} p_{41} & 0 \\ q_{41} & 0 \\ r_{41} & 0 \end{Bmatrix}_{J, B_6'}$$

- Le torseur cinématique  $\{v_{6/1}\}$  en  $O$  est de la forme :

$$\{v_{6/1}\} = \begin{Bmatrix} p_{61} & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{61} & 0 \end{Bmatrix}_{O, B_6'}$$

$p_{61}$  correspond au taux de rotation en tangage du châssis du module interne par rapport au corps sphérique 1 du Sphero, et  $r_{61}$  correspond au taux de rotation en lacet du châssis du module interne par rapport au corps sphérique 1 du Sphero.

— Les autres liaisons mécaniques ont aussi leur torseur cinématique défini dans le repère  $\mathcal{R}_6'$ .

### Données

—  $\vec{IA} = R\vec{z}_6' = \vec{JB}$  avec  $R = 8$  mm rayon de la roue motrice 2 ;

—  $\vec{OA} = L\vec{x}_6' = -\vec{OB}$  ;

—  $\vec{OsK} = -R_s\vec{z}_s$  avec  $R_s = 74$  mm rayon du corps sphérique 1 ;

— le rapport de réduction entre 2 et 3 (et entre 4 et 5) est noté  $k$  avec  $k = 0,21 = \left| \frac{p_{26}}{p_{36}} \right| = \left| \frac{p_{46}}{p_{56}} \right|$

En exploitant la fermeture cinématique 2-6-4-1 il est possible d'écrire que  $r_{21} = k \frac{R}{2L} (p_{36} - p_{56})$  avec  $p_{36}$  le taux de rotation du moteur droit et  $p_{56}$  celui du moteur gauche.

**Q 4.** Écrire au point A les torseurs cinématiques suivants :  $\{v_{6/1}\}_A$ ,  $\{v_{2/6}\}_A$  et  $\{v_{1/2}\}_A$ . /3Pts

Posons :  $\vec{V}_{A,6/1} = \vec{V}_{O,6/1} + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{6/1} = \vec{0} + (-L)\vec{x}_{6'} \wedge (p_{61}\vec{x}_{6'} + r_{61}\vec{z}_{6'}) = Lr_{61}\vec{y}_{6'}$   
 $\rightarrow \{v_{6/1}\} = \begin{Bmatrix} p_{61} & 0 \\ 0 & Lr_{61} \\ r_{61} & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_{6'}}$

Nous avons : La roue 2 est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_{6'})$  avec 6.

$$\rightarrow \{v_{2/6}\} = \begin{Bmatrix} p_{26} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_{6'}}$$

Posons :  $\vec{V}_{A,1/2} = \vec{V}_{I,1/2} + \vec{AI} \wedge \vec{\Omega}_{1/2} = \vec{0} + (-R)\vec{z}_{6'} \wedge (-p_{21}\vec{x}_{6'} - q_{21}\vec{y}_{6'} - r_{21}\vec{z}_{6'}) = R(-q_{21}\vec{x}_{6'} + p_{21}\vec{y}_{6'})$   
 $\{v_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} -p_{21} & -Rq_{21} \\ -q_{21} & Rp_{21} \\ -r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_{6'}}$

**Q 5.** Par composition des mouvements faisant intervenir les solides 1, 2 et 6, montrer que l'expression de  $r_{61}$  en fonction de  $p_{36}$  et  $p_{56}$  est de la forme  $r_{61} = \lambda (p_{36} - p_{56})$  avec  $\lambda$  à déterminer. /2Pts

Nous avons :  $r_{61} = k \frac{R}{2L} (p_{36} - p_{56})$

Il vient :  $\{v_{6/1}\} + \{v_{1/2}\} + \{v_{2/6}\} = \{0\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} p_{61} & 0 \\ 0 & Lr_{61} \\ r_{61} & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_{6'}} + \begin{Bmatrix} p_{26} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_{6'}} + \begin{Bmatrix} -p_{21} & -Rq_{21} \\ -q_{21} & Rp_{21} \\ -r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_{6'}} =$   
 $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$  (A) D'où :  $r_{61} = r_{21} = \underbrace{k \frac{R}{2L}}_{=\lambda} (p_{36} - p_{56})$

**Q 6.** Donner l'expression de  $p_{21}$  en fonction de  $p_{36}$ , de  $p_{56}$  et de  $k$ . /2Pts

En utilisant l'équation A :  $Rp_{21} = -Lr_{61} \Leftrightarrow p_{21} = -\frac{L}{R}r_{61} \Leftrightarrow p_{21} = -\frac{L}{R}k \frac{R}{2L} (p_{36} - p_{56}) \rightarrow p_{21} = -\frac{k}{2} (p_{36} - p_{56})$

**Q 7.** Montrer que l'expression de  $p_{61}$  est de la forme  $p_{61} = \mu (p_{36} + p_{56})$  avec  $\mu$  à déterminer. /2Pts

En utilisant l'équation A :  $p_{21} = p_{61} + p_{26} \Leftrightarrow p_{61} = p_{21} - p_{26} = -\frac{k}{2} (p_{36} - p_{56}) + kp_{36} \rightarrow p_{61} = \frac{k}{\mu} (p_{36} + p_{56})$

Pour la suite il est considéré que  $\lambda = 0,074$  et  $\mu = 0,105$ .

Lors d'un changement de cap du Sphero le châssis du module interne admet un mouvement de lacet autour de l'axe  $(O, z_6')$ . Le cap du robot Sphero est en fait imposé par celui du module interne. Le lacet du châssis du module interne ne doit pas induire de tangage car l'avance et le changement de cap du Sphero doivent être indépendants.

#### V.B – Comportement des actionneurs pour un changement de cap

**Q 8.** Quelle doit être la valeur de  $p_{61}$  lors d'un changement de cap ? /1Pt

Lors d'un changement de cap, il ne faut qu'un déplacement de lacet et pas de tangage.

Donc :  $p_{61} = 0$

**Q 9.** En déduire la relation entre les taux de rotation des moteurs du Sphero lors d'un changement de cap. /2Pts

En cas de changement de cap :  $\underbrace{p_{61}}_{=0} = \frac{k}{2} (p_{36} + p_{56}) \Leftrightarrow p_{36} = -p_{56}$

#### V.C – Comportement des actionneurs pour un déplacement en ligne droite

**Q 10.** Quelle est la valeur de  $r_{61}$  lorsque le Sphero se déplace en ligne droite ? /2Pts

En déplacement en ligne droite :  $r_{61} = 0$

**Q 11.** En déduire la relation entre les taux de rotation des moteurs du Sphero afin que ce dernier puisse se déplacer en ligne droite. /2Pts

En déplacement en ligne droite :  $r_{61} = 0 = k \frac{R}{2L} (p_{36} - p_{56}) \rightarrow p_{36} = p_{56}$



### V.D – Vitesse d’avance et respect de l’exigence 2.3 de déplacement

Au point  $K$  de contact entre le corps 1 et le sol noté 0 il y a roulement sans glissement et donc le torseur

cinématique de la liaison 1/0 s’écrit en  $K$  et dans la base  $B_s(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s) : \{v_{1/0}\} = \begin{pmatrix} p_{10} & 0 \\ q_{10} & 0 \\ r_{10} & 0 \end{pmatrix}_{K, B_s}$ .

**Q 12.** Lors d’un mouvement d’avance en ligne droite, donner la relation entre  $p_{10}$ ,  $R_s$  et  $v$  la vitesse d’avance du robot par rapport au sol ( $v = \vec{V}_{0s,1/0} \cdot \vec{y}_s$ ). /2Pts

Nous avons:  $\vec{V}_{0s,1/0} = \underbrace{\vec{V}_{K,1/0}}_{=\vec{0}} + \vec{O_s K} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -R_s \vec{z}_s \wedge (p_{10} \vec{x}_s + q_{10} \vec{y}_s + r_{10} \vec{z}_s) = R_s (q_{10} \vec{x}_s - p_{10} \vec{y}_s)$

Donc:  $\vec{V}_{0s,1/0} \cdot \vec{y}_s = v = -R_s p_{10}$

Pour cette étude, on se place en régime établi où l’angle de tangage  $\alpha$  du module interne est constant.

**Q 13.** Pour  $\alpha$  constant et toujours lors d’un déplacement en ligne droite ( $\vec{x}_s = \vec{x}_6 = \vec{x}_6'$ ), que vaut la composante  $p_{60} = \vec{\Omega}_{6/0} \cdot \vec{x}_s$  correspondant à la vitesse de tangage du module interne par rapport au sol ?

/2Pts

En déplacement en ligne droite et  $\alpha = cte : p_{60} = 0$

**Q 14.** En déduire la relation entre  $p_{10}$  et  $p_{61}$ .

Le constructeur du robot Sphero annonce une vitesse maximale d’avance en ligne droite

$v = \vec{V}_{0s,1/0} \cdot \vec{y}_s = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  alors que les moteurs possèdent un taux de rotation maximal de  $1200 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ . /1Pt

Pour un déplacement en ligne droite et  $\alpha = cte : p_{60} = p_{61} + p_{10} \rightarrow p_{61} = -p_{10}$

**Q 15.** Déterminer l’expression de  $v$  en fonction de  $p_{36}$  et de  $p_{56}$ . Faire l’application numérique et conclure sur le respect de l’exigence 2.3.

Maintenant que la manière avec laquelle les moteurs doivent être pilotés est connue et que ces derniers semblent cinématiquement bien dimensionnés, il reste à évaluer les performances dynamiques du robot en tangage.

/3Pts

L’exigence 2.3 demande que la vitesse maximale n’excède pas 2 m/s !

Il vient :

$$\begin{cases} p_{61} = -p_{10} = \frac{v}{R_s} \\ p_{61} = \frac{k}{2} (p_{36} + p_{56}) \end{cases} \rightarrow \frac{v}{R_s} = \frac{k}{2} (p_{36} + p_{56})$$

Or : La vitesse de déplacement est maximale pour  $p_{36} = p_{56}$

Donc :  $v_{max} = \frac{k R_s}{2} (p_{36} + p_{56})$       A.N :  $v_{max} = \frac{0,21 \cdot 0,074}{2} (1200 + 1200) \cdot \frac{\pi}{30} = 1,95 \text{ m/s} < 2 \text{ m/s}$

L’exigence de vitesse maximale est validée.

## VI Comportement en tangage de SPHERO (exigences 2.2.1 et 2.2.1.1)

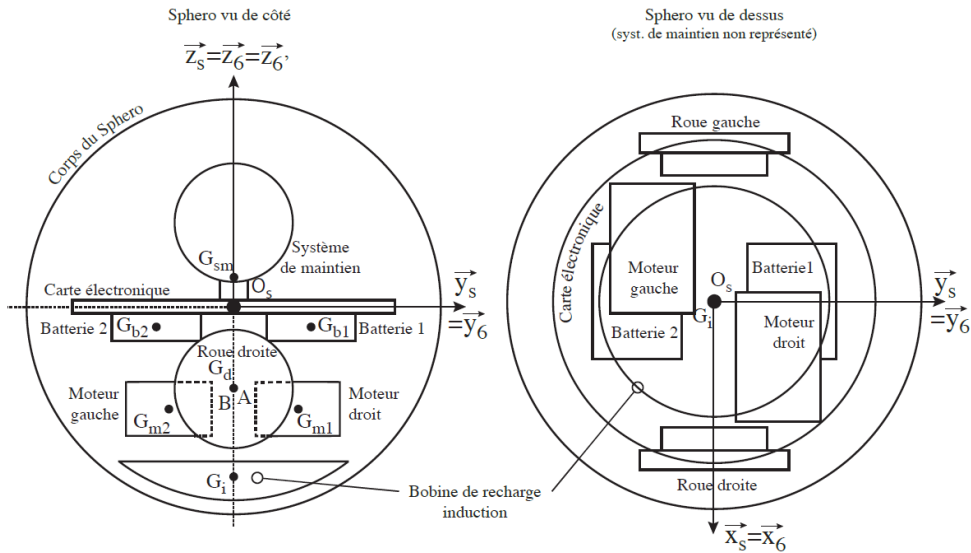
Les choix technologiques de conception du robot Sphero ont été réalisés afin que « naturellement » le robot n’ait pas d’oscillations en tangage à l’arrêt et que le tangage du module interne soit à angle constant lors des phases de mouvement à vitesse uniforme.

### Objectif

Vérifier que la structure mécanique du robot permet le respect de la contrainte sur le tangage du module interne.

### VI.A – Analyse de l’agencement mécanique du robot

La figure 12 représente le robot Sphero à l’arrêt vu de côté et de dessus. Le robot a été conçu de façon à ce que les éléments principaux du module interne soient disposés symétriquement par rapport à l’axe  $(O_s; \vec{z}_6')$ . Quant à la carte électronique, son centre de gravité est confondu avec le centre  $O_s$ .



**Figure 12** Robot Sphero représenté à l'arrêt de profil et vu de dessus  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$

$G_i$  est le centre de gravité de la bobine de recharge par induction,  $G_{m1}$  celui du moteur droit,  $G_{m2}$  celui du moteur gauche,  $G_{b1}$  celui de la batterie 1,  $G_{b2}$  celui de la batterie 2,  $A$  celui de la roue droite,  $B$  celui de la roue gauche et  $G_{sm}$  celui du système de maintien. Ces points sont définis par :

- $\overrightarrow{O_s G_{b1}} \cdot \vec{z}'_6 = \overrightarrow{O_s G_{b2}} \cdot \vec{z}'_6 = -h_b$  ;
- $\overrightarrow{O_s G_{m1}} \cdot \vec{z}'_6 = \overrightarrow{O_s G_{m2}} \cdot \vec{z}'_6 = -h_m$  ;
- $\overrightarrow{O_s A} \cdot \vec{z}'_6 = \overrightarrow{O_s B} \cdot \vec{z}'_6 = -h_r$  ;
- $\overrightarrow{O_s G_{sm}} \cdot \vec{z}'_6 = h_s$  ;
- $\overrightarrow{O_s G_i} \cdot \vec{z}'_6 = -h_i$ .

La masse totale du module interne est  $M = 115$  g. Les masses des différents composants sont fournies tableau 1.

Désignation	Position	Masse
Carte électronique	en $O_s$	$m_c = 12$ g
Batterie 1	$h_b = 9$ mm	$m_b = 7$ g
Batterie 2	$h_b = 9$ mm	$m_b = 7$ g
Bobine de recharge	$h_i = 35$ mm	$m_i = 27$ g
Système de maintien	$h_s = 9$ mm	$m_s = 8$ g

Désignation	Position	Masse
Roue droite	$h_r = 15$ mm	$m_r = 1$ g
Roue gauche	$h_r = 15$ mm	$m_r = 1$ g
Moteur droit	$h_m = 20$ mm	$m = 26$ g
Moteur gauche	$h_m = 20$ mm	$m = 26$ g

**Tableau 1** Masses et positions des composants

**Q 16.** La position du centre de gravité  $G$  du module interne étant définie par :

$\overrightarrow{O_s G} = x_g \vec{x}'_6 + y_g \vec{y}'_6 + z_g \vec{z}'_6$ , déterminer  $x_g$ ,  $y_g$  et  $z_g$  en fonction des paramètres dimensionnels du robot.

Faire les applications numériques. **/2Pts**

**Posons :**  $(\sum m_k)(\overrightarrow{O_s G}) = \sum (m_k \overrightarrow{O_s G_k}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{O_s G}) = \frac{\sum (m_k \overrightarrow{O_s G_k})}{(\sum m_k)}$

**Or :** L'axe  $(O_s, z_{6'})$  est un axe de symétrie **Donc :**  $x_G = 0 ; y_G = 0 ; z_G = \frac{\sum (m_k \overrightarrow{O_s G_k}) \cdot \vec{z}'_6}{(\sum m_k)}$

**Il vient alors :**

$$z_G = \frac{(m_c \vec{0} + m_{b1} \overrightarrow{O_s G_{b1}} + m_{b2} \overrightarrow{O_s G_{b2}} + m_i \overrightarrow{O_s G_i} + m_s \overrightarrow{O_s G_{sm}} + m_r \overrightarrow{O_s A} + m_r \overrightarrow{O_s B} + m \overrightarrow{O_s G_{m1}} + m \overrightarrow{O_s G_{m2}}) \cdot \vec{z}'_6}{m_c + m_{b1} + m_{b2} + m_i + m_s + m_r + m_r + m + m}$$

$$= \frac{(m_c \cdot 0 + m_{b1}(-h_b) + m_{b2}(-h_b) + m_i(-h_i) + m_s(h_s) + m_r(-h_r) + m_r(-h_r) + m(-h_m) + m(-h_m))}{m_c + m_{b1} + m_{b2} + m_i + m_s + m_r + m_r + m + m}$$

**A.N. :**

$$z_G = \frac{(0 + 7(-9) + 7(-9) + 27(-35) + 8(9) + 1(-15) + 1(-15) + 26(-20) + 26(-20))}{12 + 7 + 7 + 27 + 8 + 1 + 1 + 26 + 26}$$

$$\Leftrightarrow z_G = \frac{(-63 - 63 - 945 + 72 - 15 - 15 - 520 - 520)}{12 + 7 + 7 + 27 + 8 + 1 + 1 + 26 + 26} = \frac{-2069}{115}$$

$$\rightarrow z_G = -17,99 \text{ mm}$$

**Q 17.** À partir de la question précédente, expliquer l'intérêt de la répartition des masses des composants du module interne. /1Pt

Il faut que l'axe  $(O_S, z_G)$  soit un axe de symétrie sinon le robot présentera un balourd et son déplacement sera inadéquat.

Pour la stabilité en tangage, il est mieux que le centre de gravité de l'ensemble se situe en dessous de  $O_S$ . (un pendule est plus stable qu'un pendule inversé...)

### VI.B – Comportement en tangage du module interne

Même si la structure du robot semble en cohérence avec les exigences à atteindre, il reste encore à analyser le comportement en tangage du module interne lors de l'avance du robot.

Il faut que lors d'un mouvement d'avance rectiligne et pour l'accélération minimale préconisée du robot Sphero, l'angle de tangage du module interne soit constant et n'excède pas  $40^\circ$  (exigence 2.2.1.1.). Au-delà de cette valeur, les oscillations en tangage du Sphero lors de son arrêt seront d'amplitude trop grande et leur nombre trop important. De plus, sur un sol dur et non parfait (tel que du béton), ces oscillations couplées aux défauts du sol peuvent induire des petites oscillations en lacet qui ont pour conséquence un changement d'orientation du robot. De fait, avant tout nouveau démarrage, l'utilisateur serait contraint de régler de nouveau le cap s'il voulait que le robot reprenne celui initialement suivi.

Pour ce qui suit  $\beta = 0$  (pas de lacet) et donc les repères  $\mathcal{R}_6$  et  $\mathcal{R}_6'$  sont confondus. La liaison corps 1/sol est une liaison sphère/plan de centre  $K$  et de normale  $z_s$  avec frottement.

On rappelle  $\overline{O_S K} = -R_S \vec{z}_s$  avec  $R_S = 74 \text{ mm}$ .

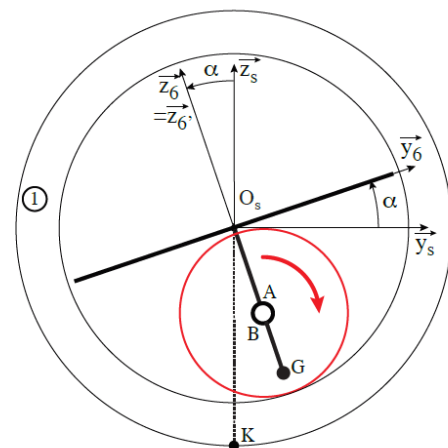
Expression du torseur mécanique de l'action du sol sur le corps 1 :

- Action du sol :  $\{\tau_{0 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} T_{01} \vec{y}_s + N_{01} \vec{z}_s \\ \vec{0} \end{array} \right\}_K$  avec  $N_{01} > 0$  et  $T_{01} > 0$

L'accélération constante minimale préconisée du Sphero s'écrit :  $\vec{a}_{(0_s, 6/0)} = a \vec{y}_s$  avec  $a = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

On néglige les masses des solides 1, 2, 3, 4, 5 au regard de la masse du châssis du module interne 6. La masse de l'ensemble des solides {1, 2, 3, 4, 5, 6} est  $M = 115 \text{ g}$ , et le centre de gravité de cet ensemble est  $G$  avec  $\overline{O_S G} = z_g \vec{z}_6$  et  $z_g = -18 \text{ mm}$ .

L'angle de tangage,  $\alpha$ , du châssis du module interne est défini figure 13.



**Figure 13** Vue de profil du Sphero avec  $\alpha \neq 0$  et  $\beta = 0$

**Q 18.** Le système isolé étant l'ensemble du Sphero constitué des solides {1, 2, 3, 4, 5, 6}, faire un inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à cet ensemble. /2Pts

Isolons le système  $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ .

Bilan des efforts :

- Pesanteur :  $\{\tau_{pes \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg \vec{z}_s \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$ ,
- Action du sol :  $\{\tau_{0 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} T_{01} \vec{y}_s + N_{01} \vec{z}_s \\ \vec{0} \end{array} \right\}_K$

En considérant un mouvement rectiligne uniformément accéléré du châssis du module interne du Sphero et un angle  $\alpha$  de tangage du châssis du module interne constant, l'expression de  $\delta_K^{\rightarrow} (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}/0)$  moment

dynamique de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6} au point  $K$  permettrait grâce au Principe fondamental de la dynamique de déterminer l'accélération  $a$  en fonction de l'angle de tangage  $\alpha$  de  $z_g$  et de  $R_s$  :  $a(\alpha, z_g, R_s)$ .

Que nous ne demanderons pas de chercher ici et que nous donnons :

Cherchons donc :

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{K,S/0} &= \vec{\delta}_{K,1/0} + \vec{\delta}_{K,2/0} + \vec{\delta}_{K,3/0} + \vec{\delta}_{K,4/0} + \vec{\delta}_{K,5/0} + \vec{\delta}_{K,6/0} = \vec{\delta}_{K,6/0} \\ &= \vec{\delta}_{G,6/0} + \overrightarrow{KG} \wedge M \vec{\Gamma}_{G,6/0} \\ &= \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G,6/0} \Big|_0 + (R_s \vec{z}_s + z_g \vec{z}_6) \wedge Ma \vec{y}_s \\ &= \frac{d}{dt} (I(G,S) \vec{\Omega}_{S/0}) \Big|_0 + (R_s \vec{z}_s + z_g \vec{z}_6) \wedge Ma \vec{y}_s \\ &= \vec{0} - MR_s a \vec{x}_s - M z_g a \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \vec{x}_s \\ &= -Ma (R_s + z_g \cos(\alpha)) \vec{x}_s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{K,S/0} &= \sum \vec{M}_{K,\bar{s} \rightarrow S/0} \Leftrightarrow [-Ma (R_s + z_g \cos(\alpha)) \vec{x}_s] = \overrightarrow{KG} \wedge -Mg \vec{z}_s \\ &\Leftrightarrow -Ma (R_s + z_g \cos(\alpha)) \vec{x}_s = (R_s \vec{z}_s + z_g \vec{z}_6) \wedge -Mg \vec{z}_s = Mg z_g \sin(\alpha) \vec{x}_s \\ &\Leftrightarrow -a (R_s + z_g \cos(\alpha)) = g z_g \sin(\alpha) \\ &\rightarrow a = -\frac{g z_g \sin(\alpha)}{(R_s + z_g \cos(\alpha))}\end{aligned}$$

$$a = -\frac{g z_g \sin(\alpha)}{(R_s + z_g \cos(\alpha))}$$

**Q 19.** En admettant que la fonction  $a(\alpha, z_g, R_s)$  est croissante en  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0^\circ, 50^\circ]$ , conclure au regard de l'exigence 2.2.1.1. /2Pts

L'exigence 2.2.1.1. impose  $\alpha < 40^\circ$  ; ce qui conduit à une accélération  $a = -\frac{9,81 \cdot 18,10^{-3} \sin(40^\circ)}{(74,10^{-3} - 18,10^{-3} \cos(40^\circ))} =$

$1,82m/s/s > 1,5m/s/s$  (accélération minimale)

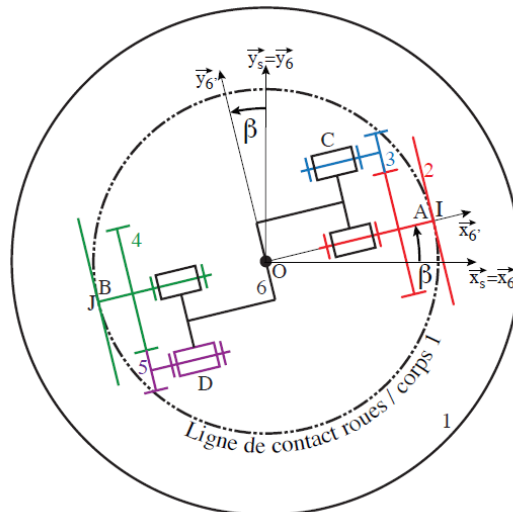
Le SPHERO pourra donc atteindre l'accélération minimale avant de tanguer de  $40^\circ$ .

## VII Performances en changement de cap du Sphero (exigence 2.1 de suivi de cap)

### Objectif

Déterminer la loi de commande en lacet du module interne qui permettra le respect des exigences de cap lors de l'utilisation du Sphero (exigences 2.1, 2.1.1 et 2.1.2).

Lors d'un réglage de cap le module interne admet un mouvement de lacet d'angle  $\beta$  (voir figure 16). Le cap du robot Sphero est imposé par celui du module interne.



**Figure 14** Schéma cinématique plan du Sphero vu de dessus avec  $\alpha = 0$  et  $\beta \neq 0$

Lors de la rotation du module interne autour de l'axe  $(O, \vec{z}_6')$  aucun mouvement de lacet du corps sphérique 1 n'est induit. Ceci est rendu possible du fait de l'action combinée, des deux moteurs, associée à la résistance au roulement au niveau du contact Sphero/sol.

L'étude proposée dans cette partie est réalisée robot à l'arrêt. Si les performances en lacet du module sont satisfaisantes dans ces conditions, elles le seront également en mouvement car le fait que le robot avance n'induit pas de perturbations sur le lacet du module interne.

Lors du réglage de cap, le mouvement du module interne est un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O, \vec{z}_6')$ , le corps 1 étant considéré immobile ( $\vec{z}_6' = \vec{z}_6$ )

Les moteurs devant avoir le même taux de rotation, la notation suivante est adoptée :  $p_{36} = \omega_m(t) = -p_{56}$ .

Afin que les exigences 2.1, 2.1.1 et 2.1.2 soient vérifiées par le robot, les performances données tableau 2 doivent être atteintes.

Performance	Critère	Niveau
Précision angulaire	Erreur en position en régime permanent	Nulle pour une entrée en échelon
Rapidité	Temps de réponse à 5%	$tr_{5\%} \leq 0,3 \text{ s}$
Stabilité	Dépassement	aucun

**Tableau 2**

#### **VII.A – Commande en lacet du module interne**

La loi entrée-sortie de la transmission mécanique étant connue, l'objectif est maintenant d'évaluer les performances de la commande en lacet du module interne. Dans un premier temps la commande étudiée sera sans correction afin de mettre en évidence les performances intrinsèques liées au choix de l'architecture de commande.

La commande en lacet du module interne est décrite figure 15.

La commande des motorisations se fait directement par l'acquisition de la vitesse de tangage  $r_{61}(t)$  du module interne et par une tension de consigne  $u_c(t)$ . Cette tension  $u_c(t)$  est générée par un correcteur à partir de la différence entre l'orientation de consigne  $\beta_c(t)$  du module interne et son orientation réelle  $\beta(t)$  (information fournie par la centrale inertielle).

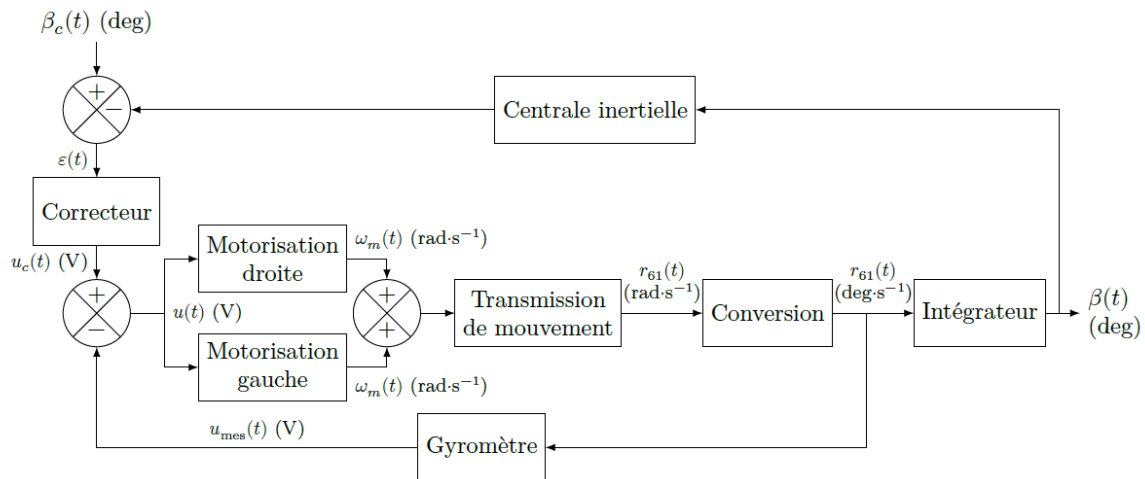


Figure 15 Schéma fonctionnel de l'asservissement en lacet

### Données

- la centrale inertielle est modélisée par un gain unité ;
- la fonction de transfert du correcteur est notée  $C(p)$  ;
- la sensibilité du gyromètre est de  $K_g = 0,028 \text{ V}\cdot\text{s}\cdot\text{deg}^{-1}$  ;
- les blocs motorisation ont la même fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{1 + \tau_m p}$ . Le bloc motorisation modélise l'ensemble hacheur + moteur ;
- $r_{61} = 2\lambda\omega_m(t)$ .

La figure 16 représente la réponse indicielle du moteur droit pour un essai avec un échelon d'entrée  $u(t) = 1 \text{ V}$ . Le bloc gauche possède la même réponse.

Q 20. Déduire de l'essai les valeurs numériques de  $K_m$  et  $\tau_m$ . /2Pts

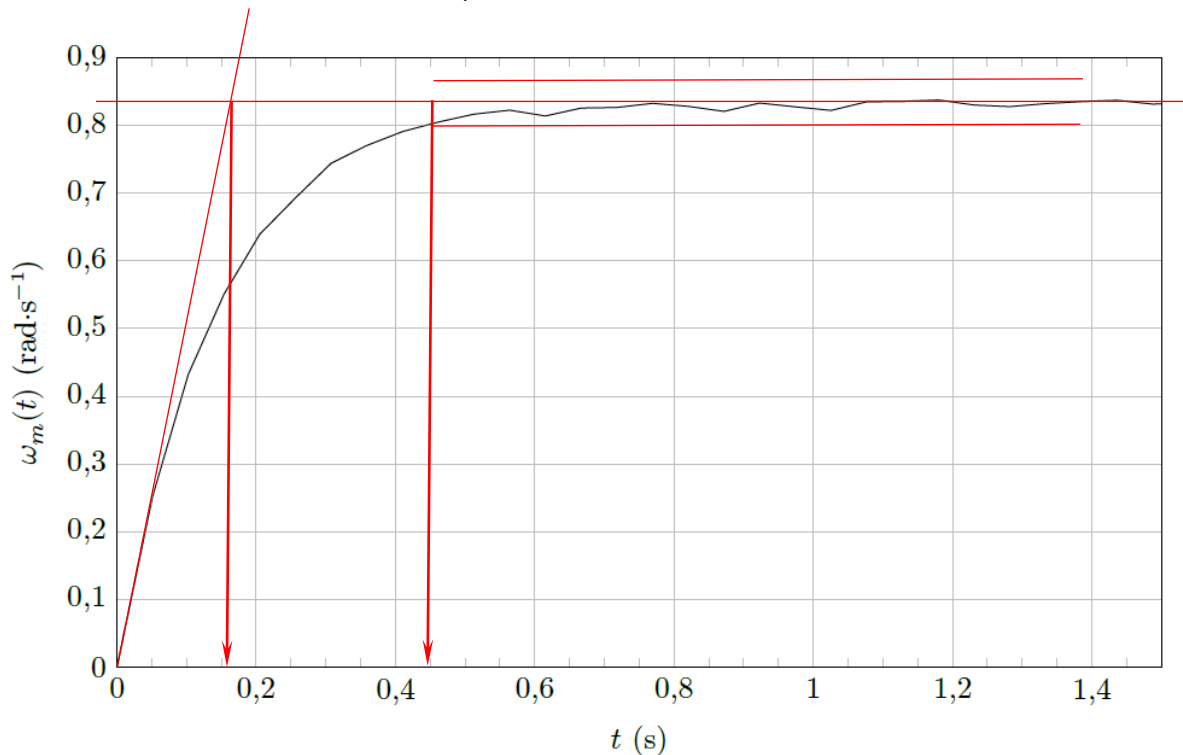
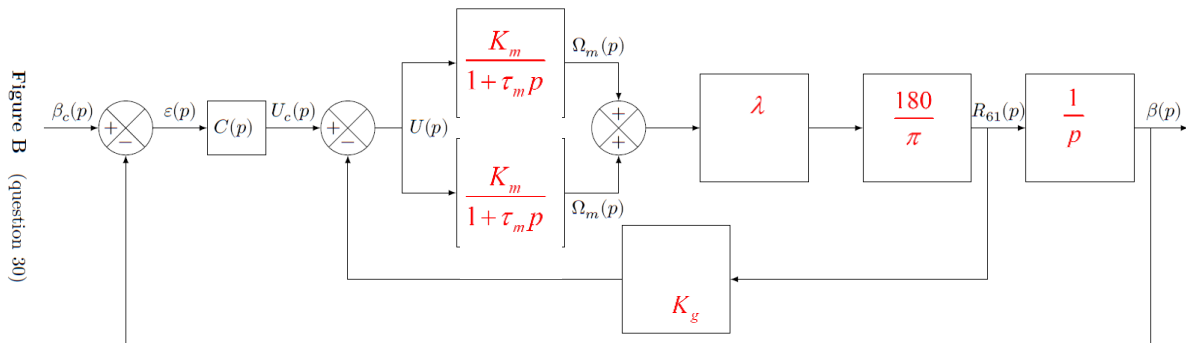


Figure 16 Réponse indicielle du moteur droit

$K_m = 0,84 \text{ rad/s/V}$      $\tau_m = 0,16 \text{ s}$

**Q 21.** En se plaçant dans le domaine de Laplace, compléter sur la figure B du document le schéma blocs de l'asservissement de l'angle de lacet du module interne. /2Pts



**Figure B** Schéma fonctionnel de l'asservissement à compléter

Dans cette première étude de la commande, il n'y a pas de correction :  $C(p) = 1$ .

**Q 22.** Déterminer l'expression sous forme canonique de la fonction de transfert en boucle fermée

$$H(p) = \frac{\beta(p)}{\beta_c(p)}. \quad /4Pts$$

Pour la suite la forme numérique de  $H(p)$  est  $H(p) = \frac{1}{ap^2 + bp + 1}$ , avec  $a = 0,019$  s<sup>2</sup> et  $b = 0,17$  s.

Il vient :  $H(p) = \frac{\beta(p)}{\beta_c(p)} = \frac{F(p)}{1+F(p)} \quad ; \quad F(p) = C(p) \cdot G(p) \cdot \frac{1}{p} \quad ; \quad G(p) = \frac{M(p)}{1+K_g \cdot M(p)}$

Avec :  $M(p) = 2 \frac{K_m}{1+\tau_m p} \cdot \lambda \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{\lambda \frac{360}{\pi} K_m}{1+\tau_m p}$

D'où :  $G(p) = \frac{\frac{\lambda \frac{360}{\pi} K_m}{1+\tau_m p}}{1 + K_g \cdot \frac{\lambda \frac{360}{\pi} K_m}{1+\tau_m p}} = \frac{\lambda \frac{360}{\pi} K_m}{1+\tau_m p + \lambda \frac{360}{\pi} K_m K_g} = \frac{\lambda \frac{360}{\pi} K_m}{1 + \lambda \frac{360}{\pi} K_m K_g + \tau_m p}$

$$F(p) = C(p) \cdot \frac{\lambda \frac{360}{\pi} K_m}{1 + \lambda \frac{360}{\pi} K_m K_g + \tau_m p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{\lambda \frac{360}{\pi} K_m}{\left(1 + \lambda \frac{360}{\pi} K_m K_g\right) p + \tau_m p^2}$$

$$H(p) = \frac{\beta(p)}{\beta_c(p)} = \frac{\frac{\lambda \frac{360}{\pi} K_m}{\left(1 + \lambda \frac{360}{\pi} K_m K_g\right) p + \tau_m p^2}}{1 + \frac{\lambda \frac{360}{\pi} K_m}{\left(1 + \lambda \frac{360}{\pi} K_m K_g\right) p + \tau_m p^2}} = \frac{\lambda \frac{360}{\pi} K_m}{\left(1 + \lambda \frac{360}{\pi} K_m K_g\right) p + \tau_m p^2 + \lambda \frac{360}{\pi} K_m}$$

$$\rightarrow H(p) = \frac{1}{1 + \frac{\left(1 + \lambda \frac{360}{\pi} K_m K_g\right) p + \frac{\tau_m}{\lambda \frac{360}{\pi} K_m} p^2}{\lambda \frac{360}{\pi} K_m}}$$

**Q 23.** En utilisant l'abaque de la figure 17 fournissant la valeur de  $tr_{5\%}\omega_0$  en fonction de  $\xi$ , déterminer le temps de réponse à 5% du système de commande en lacet. /2Pts

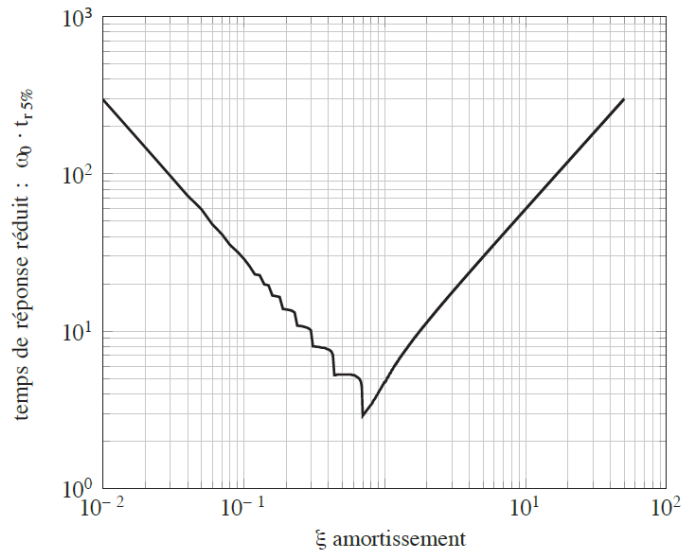


Figure 17 Abaque des temps de réponse

Nous avons :  $H(p) = \frac{1}{1 + \frac{b}{\omega_0} p + \frac{a}{\omega_0^2} p^2} \approx \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$

Il vient :  $\begin{cases} \frac{2\xi}{\omega_0} = b \\ \frac{1}{\omega_0^2} = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \xi = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1}{a}} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{a}} \end{cases} \quad \text{A.N. : } \begin{cases} \xi = \frac{0,17}{2} \sqrt{\frac{1}{0,019}} = 0,6 \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{0,019}} = 7,25 \text{ rad/s} \end{cases}$

Pour  $\xi = 0,6$ , on obtient  $t_r \cdot \omega_0 \approx 5$

Donc :  $t_r = \frac{5}{\omega_0} = \frac{5}{7,25} \rightarrow t_r = 0,7 \text{ s}$

**Q 24.** D'après les questions précédemment traitées, les performances requises pour l'asservissement sont-elles atteintes ? Justifier les réponses apportées et s'il y a lieu proposer un type de correction pour la commande.

**/2Pts**

On obtient  $\xi = 0,6$  ; la réponse du système est donc pseudo-périodique et présente un dépassement : La performance de stabilité n'est pas validée.

Le temps de réponse est  $t_r = 0,7 \text{ s} > 0,3 \text{ s}$  : La performance de rapidité n'est donc pas validée.

Pour résoudre ce problème, il faudrait utiliser un correcteur dérivateur tel qu'un correcteur à avance de phase vous le verrez en 2<sup>ème</sup> année...



