SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGENIEUR

CPGE PCSI 1ère Année

Cours C02 : 2ème Partie
Déterminer les lois de pilotage en mouvement

Mécanique générale : cinématique du point et du solide

C02

2019-2020

Lycée René Cassin

Objectifs

Utiliser des démarches et des méthodes permettant de décrire et de caractériser les mouvements (trajectoire et vitesse) de tous les points des solides d'un système.
Déduire, des contraintes cinématiques en position, vitesse ou mouvement, des conditions sur les paramètres de mouvement du système
Exprimer une condition de non glissement au lieu d'un contact ponctuel

Table des matières

IV Contraindre la vitesse ou l'accélération d'un point

L'objectif de ce chapitre est de calculer une vitesse ou une accélération d'un point, puis d'obtenir l'équation couplant les paramètres et associée à une contrainte sur la norme ou la direction.

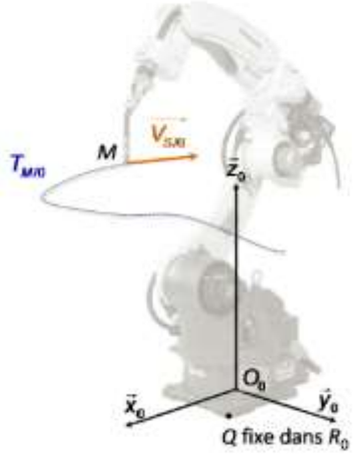
IV.1 Rappels de cinématique du point : vitesse, accélération et dérivée temporelle d'un vecteur

Vecteurs vitesse et accélération d'un point

Le **vecteur vitesse** du point *M*, par rapport au solide de référence associé à $R_0(O_0, B_0)$, est la **dérivée temporelle d'un vecteur position** de *M* dans B_0 :

$$\overrightarrow{V_{M/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{QM}}{dt}\right]_0 \text{ si } Q \text{ est fixe dans } R_0.$$

Le vecteur vitesse est **tangent à la trajectoire $T_{M/0}$.**
La norme s'exprime en $m.s^{-1}$.
Le **vecteur accélération** du point *M*, par rapport au solide de référence associé à $R_0(O_0, B_0)$, est la **dérivée temporelle** du **vecteur vitesse** de M / R_0 dans B_0 (ou la dérivée seconde d'un vecteur position) :



$$\overrightarrow{\gamma_{M/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{M/0}}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d^2\overrightarrow{QM}}{dt^2}\right]_0 \text{ si } Q \text{ est fixe dans } R_0.$$

La **norme** s'exprime en **$m.s^{-2}$**.

Définition de la dérivée d'un vecteur par rapport à une base

Par définition, la **dérivée d'un vecteur $\vec{u}$ dans une base** $B_0(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ a pour coordonnées **les dérivées des coordonnées** de $\vec{u}$ dans B_0 :

si $\vec{u} = x(t)\cdot\overrightarrow{x_0} + y(t)\cdot\overrightarrow{y_0} + z(t)\cdot\overrightarrow{z_0}$ alors $\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_0 = \frac{dx(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{z_0}$ (1)

(1) si la définition est à connaître, nous ne l'utiliserons pas pour déterminer vitesses et accélérations !

Dans ces notations, l'indice 0 fait référence au référentiel 0, au repère R_0 ou à la base B_0 suivant le contexte.

Conséquences :

- Un **vecteur** $\vec{u}$ est **fixe** dans une base B_i
  ⇔ si les coordonnées de $\vec{u}$ sont constantes dans B_i
  ⇔ $\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_0 = 0$
- Les **vecteurs unitaires d'une base sont fixes dans cette base !**
  Soit la base $Bi(\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i})$, $\left[\frac{d\vec{x}_i}{dt}\right]_i = \left[\frac{dy_i}{dt}\right]_i = \left[\frac{d\vec{z}_i}{dt}\right]_i = \vec{0}$

Par exemple, les coordonnées des vecteur unitaires d'une base B_i, exprimés dans cette même base sont : $\vec{x}_i(1,0,0)_{B_i}$, $\vec{y}_i(0,1,0)_{B_i}$, $\vec{z}_i(1,0,0)_{B_i}$. Les coordonnées sont bien des constantes.

IV.2 Produit vectoriel

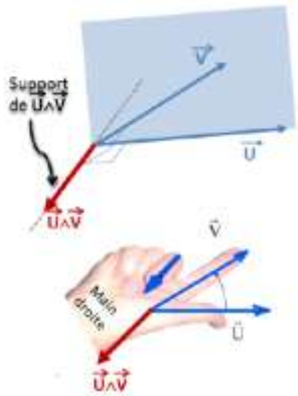
Définition

Le **produit vectoriel** des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est **un vecteur**, noté $\vec{U} \wedge \vec{V}$:

– de **direction perpendiculaire** à $\vec{U}$ et à $\vec{V}$, donc au plan $(\vec{U}, \vec{V})$;

– de **sens** tel que le trièdre $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{U} \wedge \vec{V})$ soit **direct** ;

– de **norme** $\|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times |\sin(\vec{U}, \vec{V})|$



Propriétés

Antisymétrie	Distributivité
$\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$	$\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}$

Le produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est **nul** si :

- un des **vecteurs** est **nul** ;
- les deux **vecteurs** sont **colinéaires** $\rightarrow \sin(\vec{U}, \vec{V}) = 0$.

Produit vectoriel entre vecteurs d'une même base orthonormée directe

Soit la **base orthonormée directe** $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$:

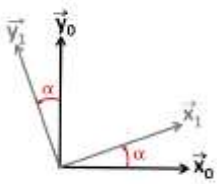
(1) par définition de « direct »

Dans le **sens direct** (1) : $\vec{x}_1 \ \vec{y}_1 \ \vec{z}_1 \ \vec{x}_1 \ \vec{y}_1$ (+) $\boxed{\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_1 = \vec{z}_1}$ $\boxed{\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_1 = \vec{x}_1}$ $\boxed{\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \vec{y}_1}$

Dans le **sens indirect** : $\vec{x}_1 \ \vec{y}_1 \ \vec{z}_1 \ \vec{x}_1 \ \vec{y}_1$ (–) $\boxed{\vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1 = -\vec{x}_1}$ $\boxed{\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_1 = -\vec{z}_1}$ $\boxed{\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_1 = -\vec{y}_1}$

Produit vectoriel entre vecteurs unitaires de bases en rotation plane

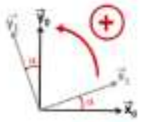
Dans le cas de vecteurs n'appartenant pas à une même base :



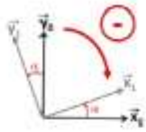
Intensité : $\sin(\theta)$ avec θ **l'angle signé**, entre le 1er et le 2ème vecteur

Direction : vecteur commun

Exemple sens + (trigonométrique) : $\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_0 = \sin(-\alpha + \pi/2)\,\vec{z}_0$
$= \cos\alpha\,\vec{z}_0$



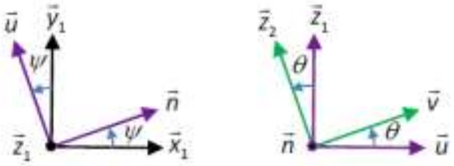
Exemple sens - (anti-trigonométrique) : $\vec{y}_0 \wedge \vec{x}_1 = \sin(-\pi/2 + \alpha)\,\vec{z}_0$
$= -\cos\alpha\,\vec{z}_0$



Application : sur figures des angles d'Euler

A9 - Déterminer $\vec{v} \wedge \vec{x}_1$.

Les deux vecteurs ne sont pas présents sur une même figure de changement de base. On se ramène à cette situation par changement de base du vecteur le plus « éloigné » de la base de référence.



$\vec{v} =$

D'où : $\vec{v} \wedge \vec{x}_1 =$

$=$

Produit mixte

Le **produit mixte** de trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ est un **nombre** obtenu par un produit vectoriel et un produit scalaire : $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$

Le produit mixte est **nul** si **2 vecteurs** sont **colinéaires.**

La **permutation de 2 termes change le signe** :

$$
\begin{aligned}
(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} &= -(\vec{C} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{A} && \text{permutation } \vec{A} \text{ et } \vec{C} \\
&= -(\vec{A} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{B} && \text{permutation } \vec{B} \text{ et } \vec{C} \\
&= -(\vec{B} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{C} && \text{permutation } \vec{A} \text{ et } \vec{B}
\end{aligned}
$$

IV.3 Dérivation vectorielle et formule de Bour

Vecteur vitesse angulaire

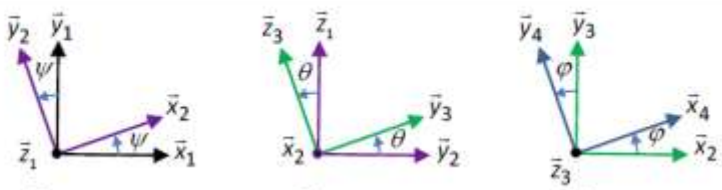
Si une base (2) est en **rotation plane de direction** $\vec{z}$, **d'angle** $\alpha(t)$ par rapport à la base (1), le vecteur vitesse angulaire s'écrit : $\vec{\Omega}_{2/1} = \omega_{2/1}\,\vec{z}$ avec $\omega_{2/1}(t) = \dot{\alpha}(t)$

Propriétés : $\vec{\Omega}_{i/i} = \vec{0}$ $\vec{\Omega}_{i/j} = -\vec{\Omega}_{j/i}$

Composition des vecteurs vitesse angulaire : $\vec{\Omega}_{3/1} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1}$

Application : sur les angles d'Euler

A10 - Compléter les figures avec les vecteurs vitesse angulaire.



$\vec{\Omega}_{2/1} =$ $\vec{\Omega}_{3/2} =$ $\vec{\Omega}_{4/3} =$

A11 - Déterminer le vecteur vitesse angulaire de 4/1.

Par composition des vecteurs vitesse angulaire : $\vec{\Omega}_{4/1} =$

Formule de Bour

La **formule de Bour** est une formule de **changement de base de dérivation** :

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_j = \left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_i + \overrightarrow{\Omega_{i/j}} \wedge \vec{U}$$

En appliquant(1) cette formule aux **vecteurs unitaires** on obtient le résultat suivant :

Pour **dériver un vecteur unitaire** d'une base B_i par rapport à une base B_j, on utilise la relation : $\left[\frac{d\overrightarrow{x_i}}{dt}\right]_j = \overrightarrow{\Omega_{i/j}} \wedge \overrightarrow{x_i}$

(1) Relation obtenue par application de la formule de Bour en passant par la base B_i. En effet xi, est constant dans la base Bi , donc $\left[\frac{d\vec{x_i}}{dt}\right]_i = \vec{0}$

IV.4 Calculer la vitesse ou de l'accélération d'un point

Démarche de calcul d'un vecteur vitesse :

- Faire les **figures de changement de base** avec **vecteur vitesse angulaire**
- Déterminer un **vecteur position**
- Poser le vecteur vitesse et **distribuer la dérivée temporelle**
- **Dériver, à part, les vecteurs unitaires** avec la formule de Bour
- Remplacer les dérivées des vecteur unitaire dans le vecteur vitesse **sans oublier les distances** !
- **Factoriser** les termes ayant même vecteur unitaire.
  Classer les termes en partant de la base de référence et dans l'ordre « x, y, z » (soit $...\vec{x}_0 + ...\vec{y}_0 + ...\vec{z}_0 + ...\vec{x}_1 + ...\vec{y}_1 + ...$)(2)
- **Vérifier l'homogénéité** (attention lors du remplacement des dérivées !)
- Dériver une seconde fois pour obtenir l'accélération en vérifiant l'homogénéité.

(2) Exprimer le résultat dans l'ordre croissant des bases puis dans l'ordre croissant des vecteurs unitaires : $\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = ..\vec{x}_1 + ..\vec{y}_1 + ..\vec{y}_2 + ..\vec{z}_2 + ..$

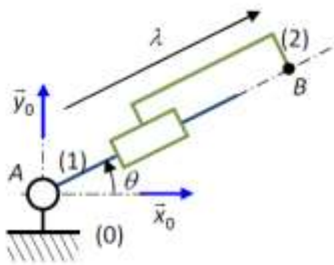
Application : bras manipulateur . $\overrightarrow{O_0B} = a\,\vec{z}_0 + \lambda(t)\,\vec{x}_1$

A12 - Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}_{B/0}$.

$\vec{V}_{B/0} =$

avec

D'où : $\vec{V}_{B/0} = \dot{\lambda}\,\vec{x}_1 + \lambda\dot{\theta}\,\vec{y}_1$ relation homogène à m.s-1.



A13 - Déterminer le vecteur accélération $\vec{\gamma}_{B/0}$.

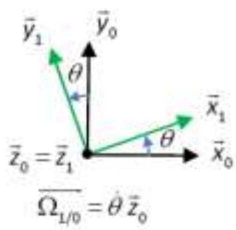
$\vec{\gamma}_{B/0} =$

avec $\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_0 =$

soit : $\vec{\gamma}_{B/0} =$

$=$

relation homogène à m.s-2.

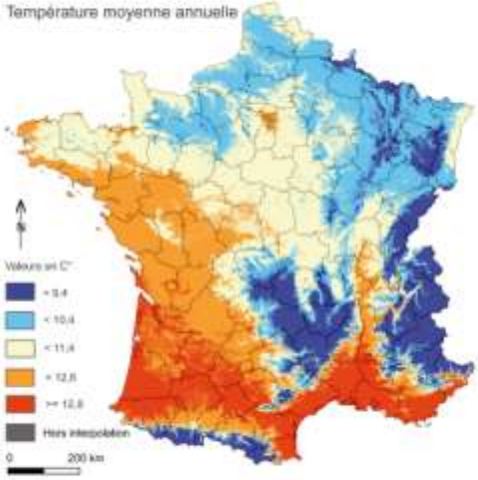


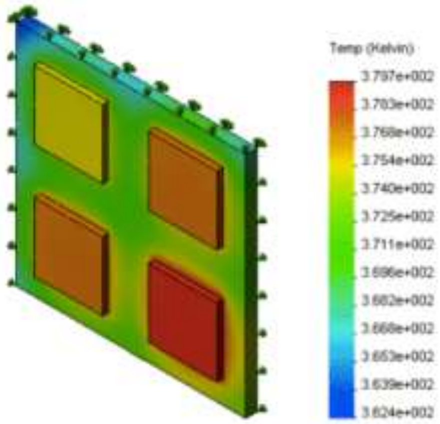
V Contraindre la cinématique d'un solide

V.1 Champ des vecteurs vitesse et torseur cinématique

Un champ ?

Un champ est une application qui, à tout point d'un **domaine géométrique**, associe une **grandeur physique**.
Les champs permettent de **caractériser l'état d'un système** étudié.
Sont ainsi définis des champs des pressions (grandeur scalaire), des températures (scalaire), des déplacements (vectoriel), de champ magnétique (vectoriel)…



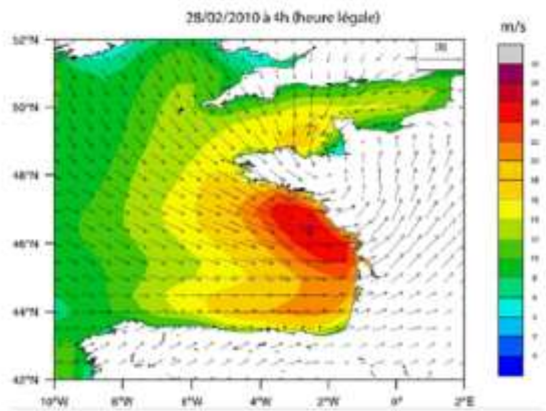


Champ des températures en moyenne annuelle pour la France (géométrie plane) et champ des températures stabilisées d'une carte électronique (géométrie 3D)

Champ de vecteurs : application d'un espace affine de dimension 3 (ou 2 pour une géométrie plane), dans l'espace vectoriel associé

$$P \in \mathcal{E} \xrightarrow{\vec{M}} \vec{M}(P) \in E$$

En tout point P du **domaine d'étude** est associé un vecteur $\vec{M}(P)$.



Vecteurs vitesse du vent lors de la tempête Xynthia

Champ des vecteurs vitesse d'un solide indéformable

(1) un point matériel représente un élément de matière suffisamment petit. Un point matériel est donc, par définition, fixe dans un solide indéformable.

Le **champ des vecteurs vitesse** d'un solide (2) par rapport à un solide (1) représente l'ensemble des **vecteurs vitesses des points fixes,** matériel(1) ou non, **du solide** (2) par rapport au solide (1).

C'est donc une application qui donne, en un point A, le vecteur vitesse de ce point s'il est, ou s'il était, fixe dans le repère lié à (2). Ce vecteur vitesse est noté :

- $\vec{V}_{A\in 2/1}$ « vitesse du point A appartenant à (2) par rapport à (1) »
- $\vec{V}_{A,2/1}$ « Vitesse en A de (2) par rapport à (1) »

ou encore: $\vec{V}_{2/1}(A)$, $\vec{V}(A,2/1)$.

Par définition[(2)] du champ des vecteurs vitesse :

$\vec{V}_{A\in 2/1} = \vec{V}_{A/1}$ si **A est fixe dans** (2).

(2) et démonstration en annexe à partir de la formule de Bour.

Vecteur vitesse angulaire et relation de Varignon

L'hypothèse **d'indéformabilité** permet de montrer que pour tout mouvement de (2), indéformable, par rapport à (1) :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{B\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}}$$

Il s'agit de la **relation de Varignon.**

Le **vecteur vitesse angulaire** est celui associé aux **bases liées** aux solides (1) et (2), **nul si** les bases sont **fixes** l'une par rapport à l'autre (cas des translations).

Démonstration en annexe à partir de la formule de Bour

Cette relation permet de calculer les vitesses en tout point de l'espace, indépendamment de la géométrie des pièces.

Torseur cinématique

Un **champ vectoriel** vérifiant la relation de Varignon,

$$\exists \vec{R} \text{ tel que } \forall A,B,\ \vec{V}_B = \vec{V}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R},$$

est appelé **torseur**. $\vec{R}$ est appelé résultante.

Le **champ des vecteurs vitesse** d'un solide **indéformable** (2) par rapport à (1) est appelé **torseur cinématique** de (2) par rapport à (1), noté[1] :

$$\{V_{2/1}\}$$

(1) On trouvera aussi les notations : $V2/1$, $V(2/1)$*, La mienne* $\{V(2/1)\}$

Grâce à la relation de Varignon, le **torseur cinématique** de (2) par rapport à (1) est **entièrement défini** par :

- le **vecteur vitesse angulaire** de (2) / (1) (résultante cinématique)
- la **vitesse** en un point de (2) / (1)
- le **point** auquel la vitesse est connue, point quelconque mais défini.

D'où la notation :

$$\{V_{2/1}\} = {}_A\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 2/1}}\end{array}\right.$$

V.2 Champ des vecteurs vitesse d'un solide en rotation plane

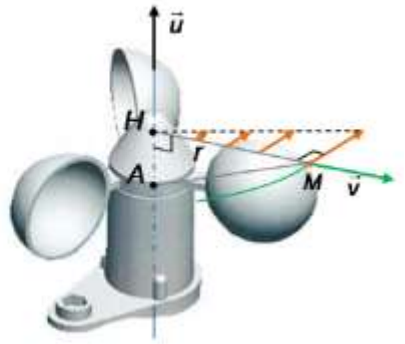
Soit un solide (2) en **rotation d'axe** $(A,\vec{u})$ par rapport à un solide (1), le **torseur cinématique** s'écrit :

$$\forall M \in (A,\vec{u}),\ \{V_{2/1}\} = {}_M\left\{\begin{array}{l}\omega_{2/1}\,\vec{u} \\ \vec{0}\end{array}\right.$$

Propriétés :

- en tout **point** I **de l'axe de rotation**, la **vitesse est nulle**, $\vec{V}_{I\in 2/1} = \vec{0}$
- les **vecteurs vitesses** sont **perpendiculaires aux « rayons »** et à l'axe de rotation
- **l'intensité** des vecteurs vitesse est **proportionnelle** à la **distance à l'axe** et à la **vitesse angulaire**. Si M est à une distance r de l'axe : $\left\|\overrightarrow{V_{M,2/1}}\right\| = r\left|\omega_{2/1}\right|$
- si la position de (2)/(1) est **paramétrée** par **l'angle** $\alpha(t)$: $\omega_{2/1} = \dot{\alpha}$

Démonstrations :



- Si I est un point de la droite $(A,\vec{u})$, il existe λ tel que $\overrightarrow{AI} = \lambda\,\vec{u}$.

  Alors $\vec{V}_{I\in 2/1} = \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = (-\lambda\,\vec{u}) \wedge (\omega_{2/1}\,\vec{u}) = \vec{0}$, le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires étant nul.
- Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe $(A,\vec{u})$. On note r la distance de M à la droite $(A,\vec{u})$: $r = \left\|\overrightarrow{HM}\right\|$.

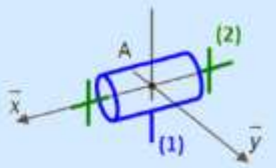
  En posant $\overrightarrow{HM} = r\,\vec{v}$, on peut écrire : $\overrightarrow{AM} = AH\,\vec{u} + r\,\vec{v}$.

  D'où $\vec{V}_{M\in 2/1} = \cancel{\vec{V}_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{MA} \wedge \omega_{2/1}\,\vec{u} = -(AH\,\vec{u} + r\,\vec{v}) \wedge \omega_{2/1}\vec{u}$.

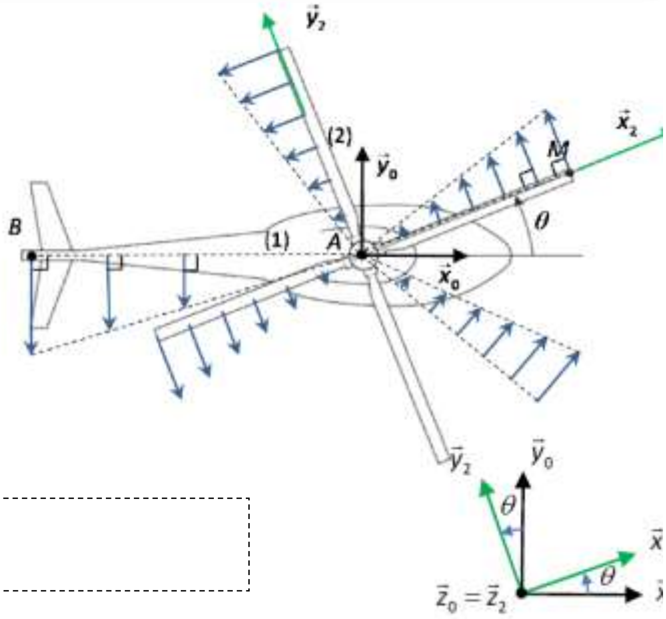
  $$= -AH\,\omega_{2/1}\,\underbrace{\vec{u}\wedge\vec{u}}_{\vec{0}} - r\,\omega_{2/1}\,\vec{v}\wedge\vec{u}$$

  $$= r\,\omega_{2/1}\,\vec{u}\wedge\vec{v}$$

Le vecteur vitesse est bien perpendiculaire à l'axe et au « rayon » et d'intensité proportionnelle à la distance à l'axe r.

> Une liaison pivot imposant un mouvement de rotation, si un ensemble (2) est en **liaison pivot d'axe** $(A,\vec{x})$ par rapport à un ensemble (1), **paramétrée** par un **angle** $\alpha(t)$:
>
> - le **torseur cinématique** s'écrit : $\forall M \in (A,\vec{x}), \{V_{2/1}\} = \left\{\begin{matrix} \dot{\alpha}\,\vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_M$
> - en tout **point I de l'axe de** la liaison,
>
>   la **vitesse relative est nulle**[1], $\vec{V}_{I\in 2/1} = \vec{0}$
>
> I étant fixe dans (1) et (2), $\vec{V}_{I\in 2/0} = \vec{V}_{I\in 1/0} = \vec{V}_{I/0}$
>
> 
>

Application : (2) est en rotation par rapport à (1), d'axe $(A,\vec{z}_0)$, paramétrée par l'angle θ. $\omega_{2/1}$ est la vitesse angulaire. Pales de longueur R.



A14 - Déterminer le torseur cinématique de 2/1.

Rotation d'axe $(A,\vec{z}_0)$:

$\overrightarrow{\Omega_{2/1}} =$ [ ]

$\forall I \in (A,\vec{z}_0), \{V_{2/1}\} =$ [ ]

A15 - Déterminer le vecteur vitesse de 2/1 en M, $\vec{V}_{M\in 2/1}$.

On calcule la vitesse en M à partir de la vitesse connue, celle de A.

$\vec{V}_{M\in 2/1} =$ [ ]

A16 - Déterminer le vecteur vitesse de 2/1 en B tel que $\overrightarrow{BA} = L\,\vec{x}_0$, $\vec{V}_{B\in 2/1}$.

Cette vitesse correspond à la valeur du champ des vitesses en B. C'est le vecteur vitesse de B si B était fixe dans (2). C'est aussi le vecteur vitesse qu'aurait un point matériel de (2) au moment ou il passerait en B.

$\vec{V}_{B\in 2/1} =$ [ ]

Remarque : B n'est pas un point fixe de 2. On ne peut passer par la cinématique du point : $\vec{V}_{B\in 2/1} \neq \vec{V}_{B/1}$.

A17 - En se basant sur les propriétés du champ des vitesses d'un solide en rotation, dessiner les vecteurs vitesses de 2/1 en différents points du segment $[AB]$.

L'intensité est proportionnelle à la distance à l'axe. La direction est perpendiculaire au « rayon ». Le champ est défini en tout point de l'espace, même en des points non fixes dans (2) (cas du point *B*, par exemple).

V.3 Champ des vecteurs vitesse d'un solide en translation

Soit un solide (2) en **translation de direction** $\vec{u}$ par rapport à un solide (1), le **torseur cinématique** s'écrit : $\forall M, \{V_{2/1}\} = {}_M\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v_{2/1}\,\vec{u} \end{Bmatrix}$

Propriétés :

- le **champ des vitesses est uniforme**[1], colinéaire à la direction du mouvement :

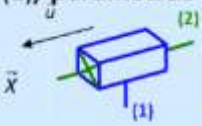
$$\forall M, \overrightarrow{V_{M\in 2/1}} = v_{2/1}\,\vec{u}$$

- le **vecteur vitesse angulaire** est **nul** : $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \vec{0}$ [1]
- si la **translation** est **rectiligne paramétrée** par la **distance** $\lambda(t)$: $v_{2/1} = \dot{\lambda}$

(1) la relation de Varignon donne : $\forall A,B,$

Le champ est uniforme (même valeur en tout point).

Une liaison glissière imposant un mouvement de translation rectiligne, si un ensemble (2) est en **liaison glissière de direction** $\vec{x}$ par rapport à un ensemble (1), **paramétrée** par la **distance** $\lambda(t)$, le **torseur cinématique** s'écrit : $\forall M, \{V_{2/1}\} = {}_M\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda}\,\vec{x} \end{Bmatrix}$



Application : le fuselage (1) est en translation de direction $\vec{x}_0$ par rapport à (0) à une vitesse V .

Sur la figure ci-dessous, quelques vecteurs vitesse de 1 / 0 sont tracés.

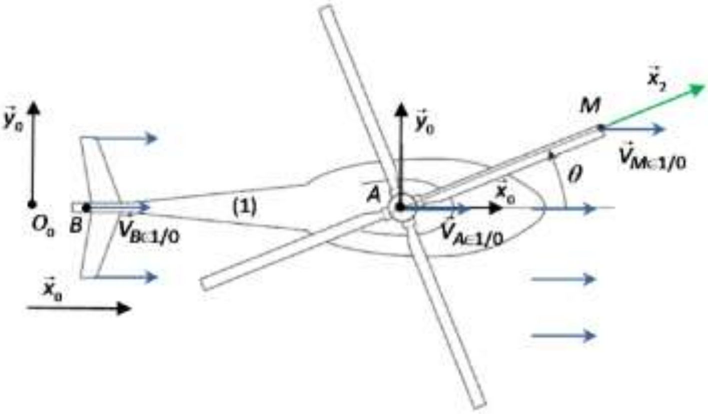
A18 - Déterminer le torseur cinématique de 1/0.

Translation de direction $\vec{x}_0$:

$\forall P, \{V_{1/0}\} =$

A19 - Déterminer $\vec{V}_{M\in 1/0}$ et $\vec{V}_{B\in 1/0}$.

Le champ étant uniforme :



V.4 Déterminer et contraindre le torseur cinématique d'un solide

Démarche pour déterminer $\{V_{3/0}\}$ **directement** :

si (3) est en **liaison pivot** ou **glissière** par rapport à (0), poser le résultat directement

sinon :

- déterminer le **vecteur vitesse angulaire par composition** :

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}$$

- **rechercher un point fixe** de (3), le « plus **proche** » possible de la **référence**. **Déterminer la vitesse en ce point** par **dérivée** de son **vecteur position**.

Soit un mouvement particulier défini par un torseur $\{V_{3/0\ \text{imposé}}\}$.

Soit $\{V_{3/0}\}$ déterminé en fonction des paramètres de position et de leurs dérivées.

La **contrainte** sur le mouvement d'un solide (3)/(0) s'écrit : $\{V_{3/0}\}=\{V_{3/0\ \text{imposé}}\}$

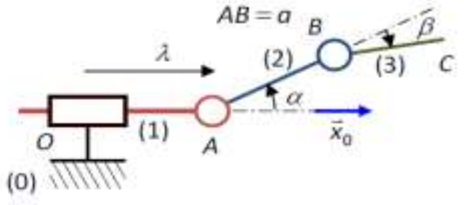
Cette équation donne **2 équations vectorielles** :

- égalité des vecteurs vitesse angulaire : $\vec{\Omega}_{3/0}=\vec{\Omega}_{3/0\ imposé}$
- égalité des vecteurs vitesse **en un même point**, à choisir : $\vec{V}_{B\in 3/0}=\vec{V}_{B\in 3/0\ imposé}$

Soit **6 équations scalaires** en tout.

Application : on considère le modèle ci-contre. Le vecteur commun est $\vec{z}_0$.

A20 - Déterminer directement les torseurs cinématiques de 1/0, 2/0 et 3/0 (sans tenir compte des résultats précédents).



1/0 :

2/0 :

D'où : $\{V_{2/0}\}=$

3/0 :

avec

A21 - On souhaite que le mouvement de (3)/(0) corresponde à $\{V_{3/0\ imposé}\}=\left\{\begin{matrix}\omega_{imposé}\,\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_O$. Écrire les équations vectorielles associées à cette contrainte (ne pas les projeter).

Le mouvement imposé est

On veut : $\{V_{3/0}\}=\{V_{3/0\ imposé}\}$

D'où les équations vectorielles :

Sur le vecteur vitesse angulaire : $\vec{\Omega}_{3/0}=$

Sur la vitesse en un point :

Si on choisit le point O : $\vec{V}_{O\in 3/0}=\vec{V}_{O\in 3/0\ imposée} \Leftrightarrow$

avec $\vec{V}_{O\in 3/0}=$

Si on choisit le point B : $\vec{V}_{B\in 3/0}=\vec{V}_{B\in 3/0\ imposée} \Leftrightarrow$

avec $\vec{V}_{B\in 3/0\ imposé}=$

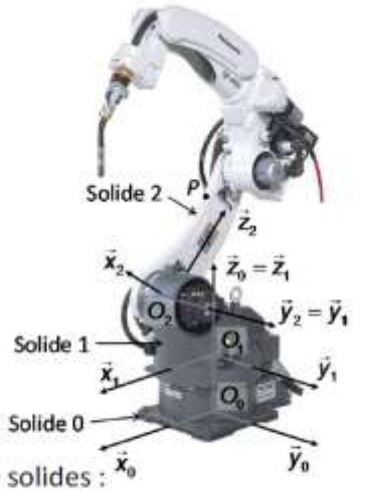
Dans cet exemple, il est un peu plus simple d'écrire l'équation en B.

VI Composition cinématique et cinématique du contact ponctuel

VI.1 Composition des vitesses

Composition des champs des vecteurs vitesse

Soit un point P en mouvement par rapport à un solide 1 (repère lié $R_1(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$), lui-même en mouvement par rapport à un solide 0 (repère lié R_0).

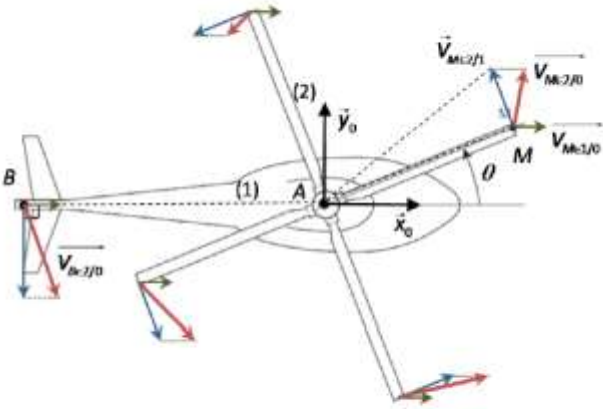


> Relation de **composition des vitesses en un même point :** $\vec{V}_{P\in 2/0}=\vec{V}_{P\in 2/1}+\vec{V}_{P\in 1/0}$
>
> Conséquence : $\boxed{\vec{V}_{P\in 2/1}=-\vec{V}_{P\in 1/2}}$

Cette relation de composition des vecteurs vitesse se généralise à ***n*** solides :

$$\overrightarrow{V_{P\in n/0}}=\overrightarrow{V_{P\in n/n-1}}+\cdots+\overrightarrow{V_{P\in 1/0}}$$

Exemple : Hélicoptère. On a préalablement obtenu les résultats suivants : $\vec{V}_{M\in 1/0}=V\,\vec{x}_0$ et $\vec{V}_{M\in 2/1}=L\omega_{2/1}\,\vec{y}_2$.



Q1 - Déterminer $\overrightarrow{V_{M\in 2/0}}$ et tracer ce vecteur.

Composition des vitesses en M :

$$\overrightarrow{V_{M\in 2/0}}=\underbrace{\overrightarrow{V_{M\in 2/1}}}_{\text{rotation }(A,\vec{z}_0)}+\underbrace{\overrightarrow{V_{M\in 1/0}}}_{\text{translation }\vec{x}_0}$$

$$=L\omega_{2/1}\,\vec{y}_2+x\,\vec{x}_0$$

On peut alors vérifier que la norme reste inférieure à la vitesse du son pour toute position de la pale.

Composition des vecteurs vitesse angulaire

La composition des vecteurs vitesse en un même point étant valable en tout point, on montre que les vecteurs vitesse angulaire vérifient : $\vec{\Omega}_{2/0}=\vec{\Omega}_{2/1}+\vec{\Omega}_{1/0}$ [(1)].

> Relation de **composition des vecteurs vitesse angulaire** généralisée à ***n*** solides :
>
> $$\overrightarrow{\Omega_{n/0}}=\overrightarrow{\Omega_{n/n-1}}+\cdots+\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$
>
> Conséquence : $\boxed{\overrightarrow{\Omega_{2/1}}=-\overrightarrow{\Omega_{1/2}}}$

Composition des torseurs cinématiques

La relation de composition des torseurs cinématiques se déduit directement des deux relations précédentes.

> Relation de **composition des torseurs cinématiques** dans le cas de ***n*** solides :
>
> $$\{V_{n/0}\}=\{V_{n/n-1}\}+\cdots+\{V_{1/0}\}$$
>
> **La résultante est la somme des résultantes et la vitesse est la somme des vitesses en un même point.**
>
> Conséquence : $\boxed{\{V_{2/1}\}=-\{V_{1/2}\}}$

Application : exemple de l'hélicoptère

A22 - déterminer le torseur cinématique de 2/0 à partir des torseurs cinématiques de 2/1 et de 1/0 exprimés en *A*.

« Exprimé en *A* » signifie que la vitesse est connue en *A*.

Nous avons :

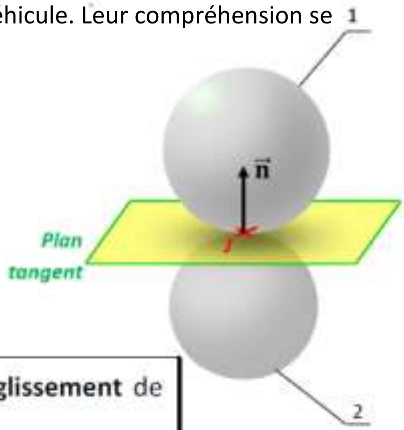
D'où, en *A* :

A23 - En déduire $\vec{V}_{M,2/0}$

Par la relation de Varignon :

VI.2 Cinématique du contact ponctuel

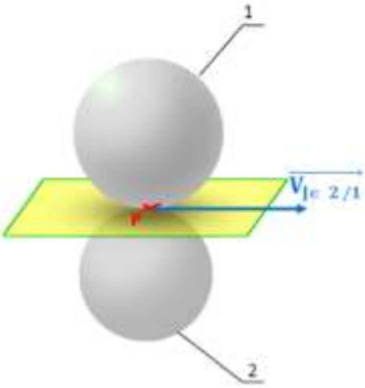
Les contacts localisés, dit ponctuels, sont à l'origine du comportement de nombreux systèmes, dont le système roue-sol transformant la rotation d'une roue en translation d'un véhicule. Leur compréhension se base sur la composition des vitesses.



Contact ponctuel et vecteur glissement

Soient **deux solides 1 et 2 en contact en un point** *J*. On peut définir :

- des **surfaces de contact**,
- un **plan tangent commun** aux deux surfaces en contact en *J*,
- une direction **normale au contact** $\vec{n}$.



$\overrightarrow{V_{J\in 2/1}}$ est le **vecteur vitesse de glissement** de 2/1.

La condition de **non pénétration** et de **maintien du contact** s'écrit $\overrightarrow{V_{J\in 2/1}}\cdot\vec{n}=0$.

Le vecteur glissement est donc **parallèle au plan tangent commun**.

Pour calculer le **vecteur vitesse de glissement**, on utilise la composition des vitesses :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{J\in 2/1}}&=\overrightarrow{V_{J\in 2/0}}+\overrightarrow{V_{J\in 0/1}}\\&=\overrightarrow{V_{J\in 2/0}}-\overrightarrow{V_{J\in 1/0}}\end{aligned}$$

Roulement sans glissement : RSG.

On dira que (2) **roule sans glisser** sur (1) en *J* si la vitesse de glissement est nulle :

$$\overrightarrow{V_{J\in 2/1}}=\vec{0}\,.$$

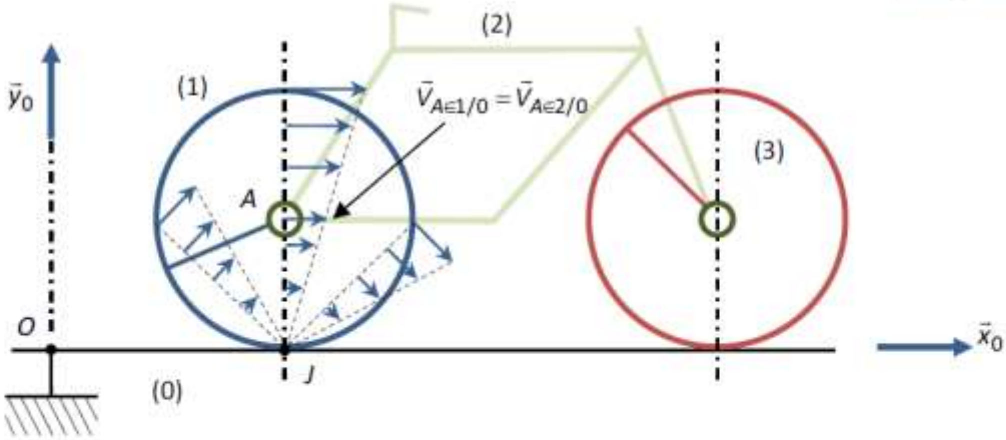
En projection sur le plan tangent commun, cette relation donne deux relations scalaires.

Système roue-sol

Application : considérons le cas d'un vélo dont le cadre (2) suit un mouvement de translation à trajectoire rectiligne de direction $\vec{x}_0$ à la vitesse V.

Le rayon de la roue (1) est notée R et sa vitesse angulaire par rapport au cadre (2) $-\omega$.

On suppose que la roue (1) roule sans glisser sur le sol (0).



A24 - Écrire le torseur cinématique de 2/0. En déduire $\vec{V}_{A\in 2/0}$.

Mouvement de translation : $\forall M, \{V_{2/0}\}=$

A25 - Caractériser le contact entre (1) et (0)

A26 - Écrire le torseur cinématique de 1/0. En déduire le mouvement de la roue par rapport au sol.

Par composition du vecteur vitesse angulaire :

D'où : $\{V_{1/0}\}=$

A27 - En déduire $\vec{V}_{A\in 1/0}$ puis une relation entre V et ω.

Relation de Varignon :

Quelques démonstrations

Relation de Varignon

Soient A et B deux points matériels de (2). (2) étant supposé indéformable, $\overrightarrow{AB}$ est constant dans (2), d'où la condition : $\left[\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_2 = \vec{0}$

Soit O l'origine de (1) : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

On dérive cette expression dans (1) : $\left[\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_1 = \underbrace{\left[\dfrac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_1}_{\vec{V}_{B/1}=\vec{V}_{B\in 2/1}} - \underbrace{\left[\dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_1}_{\vec{V}_{A/1}=\vec{V}_{A\in 2/1}} = \vec{V}_{B\in 2/1} - \vec{V}_{A\in 2/1}$

La suite de la démonstration s'appuie sur la formule de Bour (changement de la base de dérivation) :

$$\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{u}$$

Elle permet d'obtenir la relation : $\left[\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_1 = \underbrace{\left[\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_2}_{\vec{0}\text{ car (2) indéformable}} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{AB}$

D'où : $\vec{V}_{B\in 2/1} - \vec{V}_{A\in 2/1} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_1 = \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{2/1}$.

Ce qui permet de conclure.

Composition des vitesses d'un point

$\overrightarrow{V_{P/0}} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_0P}}{dt}\right]_0 = \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_0O_1}}{dt}\right]_0 + \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right]_0$ avec $\overrightarrow{O_0P} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1P}$ et O_0 , O_1 respectivement origines de R_0 et R_1 .

Par définition des vecteurs vitesse, cette relation s'écrit : $\overrightarrow{V_{P/0}} = \overrightarrow{V_{O_1/0}} + \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right]_0$.

La suite de la démonstration utilise la formule de Bour : $\left[\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right]_0 = \left[\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right]_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{u}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_{P/0}} &= \overrightarrow{V_{O_1/0}} + \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right]_1}_{\vec{V}_{P/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1P} = \underbrace{\overrightarrow{V_{O_1/0}} + \overrightarrow{PO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}}_{\vec{V}_{P\in 1/0}} + \vec{V}_{P/1} \\
&= \vec{V}_{P\in 1/0} + \vec{V}_{P/1} \\
&\Rightarrow \vec{V}_{P\in 1/0} = \vec{V}_{P/0} - \vec{V}_{P/1} .
\end{aligned}$$

On retrouve la condition de passage de la cinématique du solide à la cinématique du point : $\vec{V}_{P\in 1/0} = \vec{V}_{P/0}$ si $\vec{V}_{P/1} = \vec{0}$, c'est-à-dire, si P fixe dans (1).

Savoirs

Je connais :

- les particularités du mouvement et du champ des vitesses associés à une translation
- les particularités d’un mouvement de translation circulaire
- les particularités du mouvement et du champ des vitesses associés à une rotation
- la relation de Varignon
- la formule de Bour
- les relations de composition des vecteurs vitesse et vecteurs vitesse angulaire
- la relation de composition des torseurs cinématiques
- les démarches de calcul des vitesses et de détermination des torseurs cinématiques

Savoir-faire

Je sais :

- réaliser le graphe des liaisons d’un schéma cinématique
- donner la nature du mouvement d'un solide
- définir un repère lié et repérer un solide
- réaliser une figure de changement de base
- déterminer les relations de changement de base
- réaliser le produit scalaire entre deux vecteurs unitaires
- calculer la projection orthogonale ou les coordonnées d’un vecteur
- calculer une norme d’un vecteur
- réaliser le produit vectoriel entre deux vecteurs unitaires
- exprimer un vecteur vitesse angulaire
- calculer la dérivée d’un vecteur unitaire
- déterminer le vecteur vitesse ou accélération d’un point
- déterminer le vecteur vitesse en un point d'un solide en rotation ou en translation par rapport à un autre
- déterminer le torseur cinématique d'un solide en rotation ou translation
- déterminer les relations scalaires associées à une contrainte sur une trajectoire, une vitesse ou un mouvement
- identifier les caractéristiques d’un contact ponctuel
- exprimer une condition de non glissement en un contact ponctuel