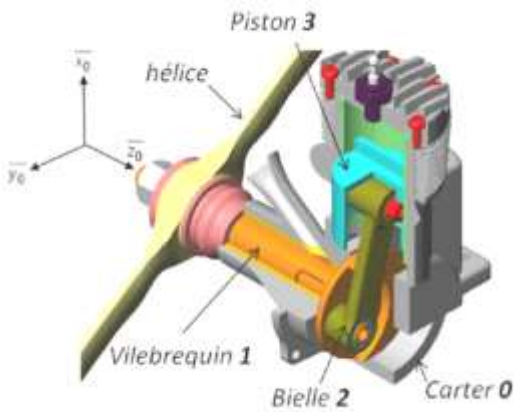


# DÉTERMINER LE COMPORTEMENT CINÉMATIQUE ET EN STATIQUE D'UN TRANSMETTEUR NON LINÉAIRE

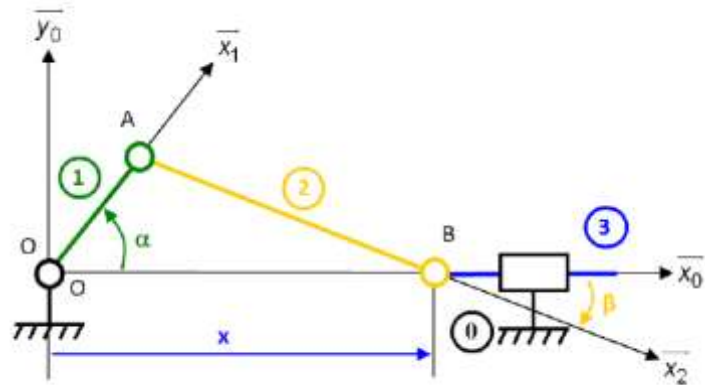
TD 1 : Déterminer les lois E/S par fermeture géométrique ..... 1  
 TD 2 : Déterminer les lois E/S par fermeture cinématique et produit scalaire ..... 6  
 Exercices supplémentaires ..... 12  
 Éléments de réponse ..... 18

## TD 1 : DÉTERMINER LES LOIS E/S PAR FERMETURE GÉOMÉTRIQUE

### Exercice 1.1 : MICROMOTEUR DE MODÉLISME



Le moteur étudié, qui permet de faire tourner une hélice, est destiné à être assemblé sur des avions de modélisme afin de les propulser. Comme la très grande majorité des moteurs thermiques, il utilise un dispositif « bielle-manivelle » pour transformer le mouvement de translation alternatif du piston (généré par la combustion du mélange air + carburant) en mouvement de rotation continu du vilebrequin.



- Ce dispositif est représenté ci-contre sous la forme d'un schéma cinématique avec :
- **carter 0**, repère associé  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , considéré comme fixe
  - **vilebrequin 1**,  $OA = e$
  - **bielle 2**,  $AB = L$ .
  - **piston 3**,  $\vec{OB} = x(t) \vec{x}_0$ .

Données :  $e = 11 \text{ mm}$ ,  $L = 40 \text{ mm}$  et  $\phi_{piston} = 24 \text{ mm}$  (diamètre)

**Q1 :** Identifier les paramètres de position d'entrée et de sortie du dispositif de transformation de mouvement et les DDL des liaisons associés. Identifier la fonction de cet ensemble dans une chaîne fonctionnelle.

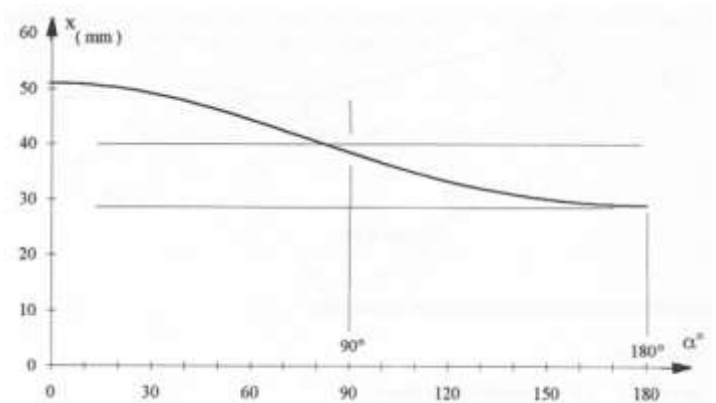
**Q2 :** Déterminer, à l'aide d'une fermeture géométrique et par projection, la loi entrée-sortie en position  $\alpha = g(x)$  et la relation  $x = f(\alpha)$  du mécanisme de transformation de mouvement.

**Q3 :** Déterminer ces mêmes relations à partir de la norme au carré de  $\vec{AB}$ .

Le graphique de cette fonction a l'allure suivante :

**Q4 :** Déterminer la cylindrée du micromoteur. La cylindrée d'un moteur correspond au volume balayé par le piston lorsqu'il passe de la position « point mort bas » (position extrême basse) au « point mort haut » (position extrême haute).

Si le moteur possède plusieurs cylindres, il faut multiplier ce volume par le nombre de cylindres.



**Q5 :** Déterminer, à l'aide du résultat de la question 2, la loi entrée-sortie en vitesse  $\dot{x} = f(\dot{\alpha}, \alpha)$ . En déduire le vecteur vitesse  $\overline{V_{B \in 3/0}}$  en fonction de  $\dot{\alpha}, \alpha, L$  et  $e$ .

**Q6 :** En déduire la relation entre le couple en sortie de moteur et la pression dans la chambre de combustion sous les hypothèses de régime quasi-statique, les liaisons étant supposées parfaites. Ces hypothèses vous paraissent-elles valables ?

**Exercice 1.2 : TUYÈRE À OUVERTURE VARIABLE**

Les propulseurs utilisés dans les applications militaires ou civiles subissent, avant leur mise en service, des tests de certification visant à contrôler leur bon fonctionnement et le respect des normes de sécurité.

Ces tests consistent à simuler au sol les conditions de vol subies par le propulseur et à observer les réactions de celui-ci consécutives à des commandes de pilotage.

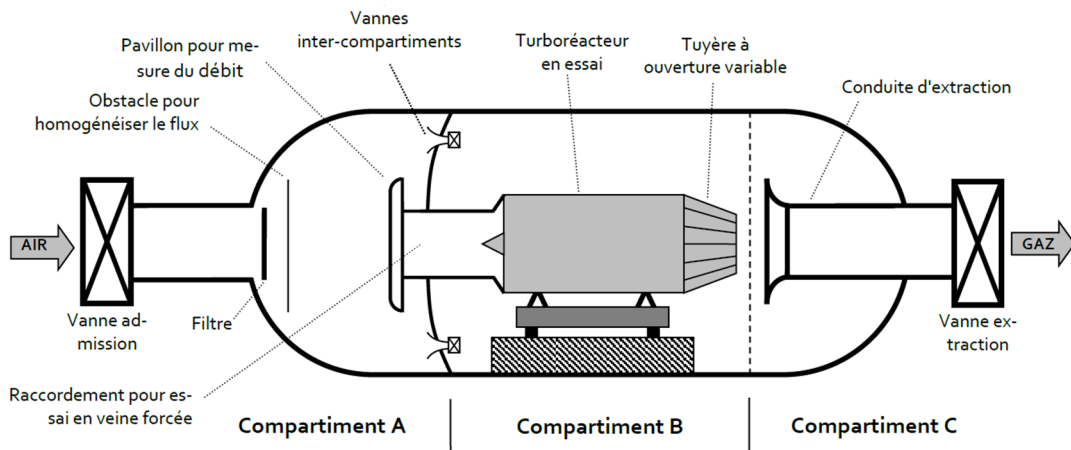
La **DGA** (Direction Générale de l'Armement) dispose dans son Centre d'Essais des Propulseurs (CEPr), situé à Saclay, de bancs d'essais dédiés à la certification et à la mise au point de différents types de propulseurs d'avions ou de missiles.



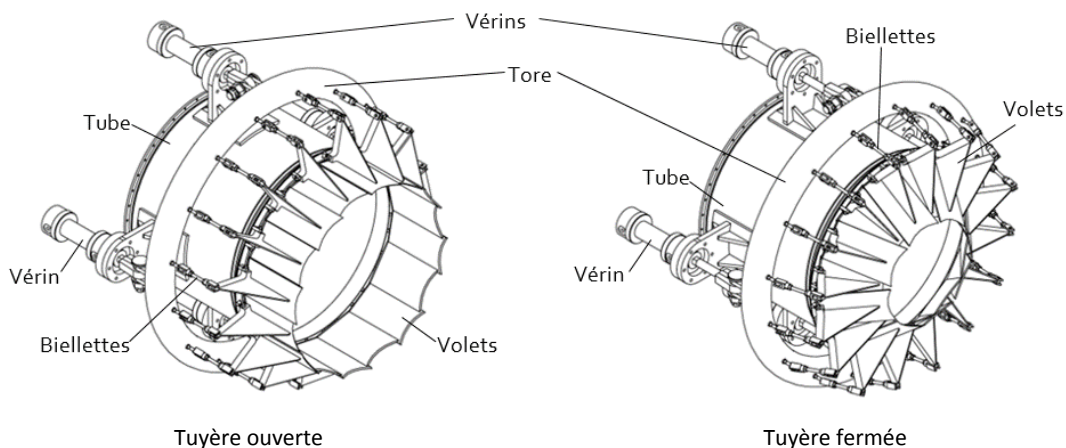
Rafale propulsé par deux moteurs Snecma M88

Le banc d'essais est constitué de trois compartiments.

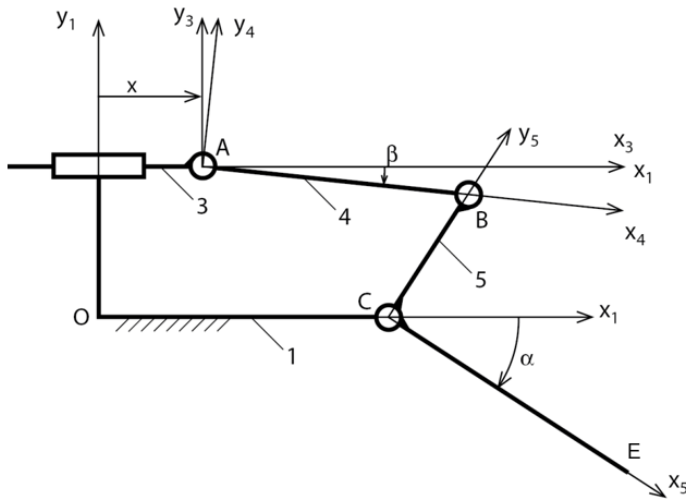
- le premier compartiment (A) est alimenté par une soufflerie et a pour fonction de conditionner le flux d'air en amont de la turbomachine testée ;
- le deuxième compartiment (B) contient le propulseur à tester ;
- le troisième compartiment (C) permet la collecte et l'évacuation des gaz produits lors de la combustion.



La tuyère à ouverture variable montée sur le tube, en aval de l'écoulement, fait varier la section de la veine de fluide en sortie de tube. La solution retenue consiste à disposer seize volets articulés sur la périphérie du tube qui permettent ainsi de réduire la section de passage du fluide. Ces volets sont mis en mouvement par seize biellettes toutes identiques reliées à un tore mis en translation à l'aide de quatre vérins hydrauliques répartis régulièrement autour du tube.



Le schéma cinématique ci-dessous modélise le mécanisme de transformation du déplacement  $x(t)$  d'un vérin en rotation d'un volet  $\alpha(t)$  :



Avec :

$$\vec{OA} = h \vec{y}_1 + x(t) \vec{x}_1$$

$$\vec{AB} = \ell \vec{x}_4$$

$$\vec{CB} = h \vec{y}_5$$

$$\vec{OC} = \ell \vec{x}_1$$

$$\vec{CE} = L \vec{x}_5$$

La position initiale, volet ouvert, est définie par  $x(0) = 0$  et  $\alpha(t) = 0$ .

Modèle cinématique limité à un vérin et un ensemble bielle-volet

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges associé à l'exigence étudiée.

| E1   | Critères                       | Niveau          |
|--|--------------------------------|-----------------|
| Faire varier le diamètre de la veine de fluide | Diamètre de la veine de fluide | de 400 à 600 mm |

**Objectif** : déterminer la course des vérins permettant de valider le critère du cahier des charges.

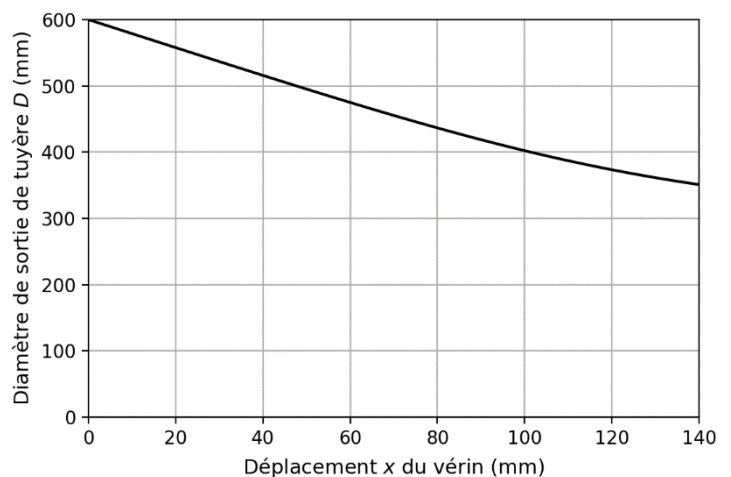
**Q1** : Exprimer l'angle  $\alpha$  en fonction de  $x$  sous la forme  $\alpha = -\arccos(f(x)) + \arctan(g(x))$  en précisant les fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$ .

**Q2** : Par observation du schéma cinématique, donner l'expression du diamètre  $D$  de la veine fluide en fonction de  $\alpha$  et de  $D_0$ , diamètre de la section pour  $\alpha = 0$ .

On donne ci-contre le tracé de la fonction  $D(x)$ .

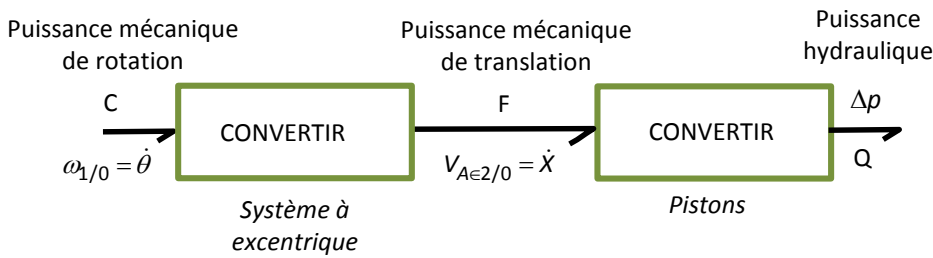
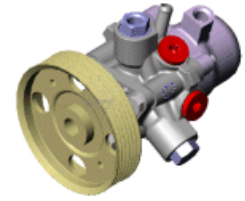
**Q3** : En déduire, à partir du cahier des charges relatif à l'exigence étudiée, la course nécessaire des vérins

**Q4** : Proposer une expression affine de  $D$  en fonction de  $x$ .

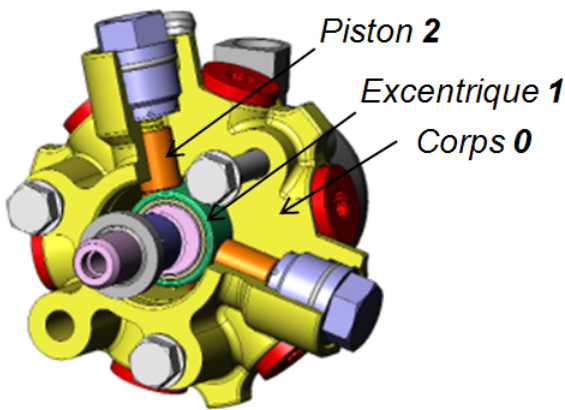


## Exercice 1.3 : POMPE HYDRAULIQUE À PISTONS RADIAUX

On s'intéresse au comportement cinématique d'une pompe à pistons radiaux, en particulier du dispositif de transformation de mouvement par excentrique. Celui-ci permet de d'obtenir, à partir d'un mouvement de rotation continu de l'arbre d'entrée sur lequel est fixé l'excentrique **1**, un mouvement de translation alternatif du piston **2**.



**Objectif :** déterminer la relation entre  $x$  et  $\theta$ , puis entre le débit volumique refoulé  $Q$  et  $\dot{\theta}$



Représentation 3D (corps 0 en coupe)

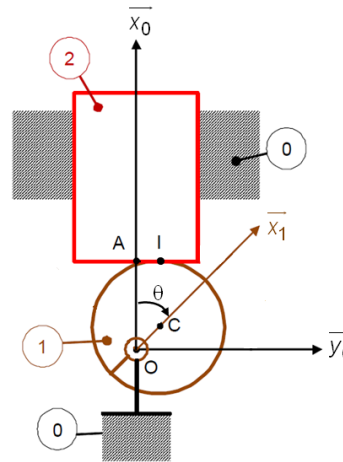


Schéma de fonctionnement

### Constituants et paramétrage :

- Le corps **0**, de repère lié  $R_0(O, \overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0)$ , est considéré comme fixe.
- L'excentrique **1**, de repère lié  $R_1(O, \overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{z}_0)$ , est en liaison pivot d'axe  $(O, \overline{z}_0)$  par rapport au corps **0** tel que  $\overline{z}_0 = \overline{z}_1$  et  $(\overline{x}_0, \overline{x}_1) = \theta$ . L'excentrique de rayon  $R$  et de centre  $C$  tel que  $\overline{OC} = e \overline{x}_1$ , est en contact avec le piston **2**. On note  $\overline{AI} = \lambda(t) \overline{y}_0$ .
- Le piston **2**, de repère lié  $R_2(A, \overline{x}_0, \overline{y}_2, \overline{z}_2)$ , est en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \overline{x}_0)$  par rapport au solide **0** tel que  $\overline{OA} = X(t) \overline{x}_0$ .  
La surface utile du piston est notée  $S$ .

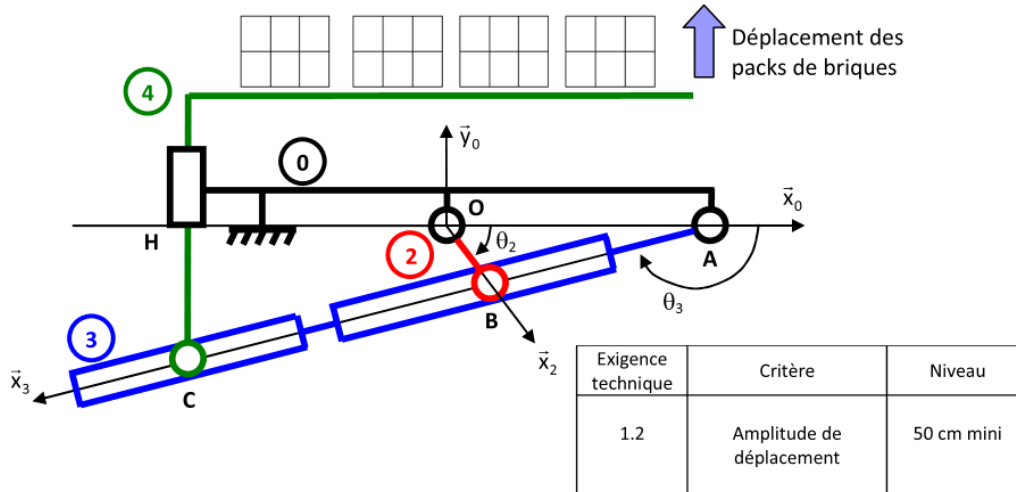
La pompe comprend 6 pistons fonctionnant en parallèle.

- Q1 :** Identifier le paramètre de position d'entrée et le paramètre de position de sortie.
- Q2 :** Déterminer, à l'aide d'une fermeture géométrique, la loi entrée-sortie en position du dispositif de transformation de mouvement.
- Q3 :** En déduire la relation cinématique d'entrée-sortie cinématique, puis la relation entre le débit refoulé par un piston et  $\dot{\theta}$ .

## Exercice 1.4 : PALÉTTISEUR POUR L'INDUSTRIE LAITIÈRE

Les briques de lait de 1L sont stockées par groupe de 6 et déposée sur des palettes afin de faciliter leur transport par camions. Dans une chaîne de conditionnement de briques de lait, on utilise souvent des pousseurs qui poussent tout un lot de 6 briques de lait. On se propose d'étudier un de ces pousseurs dont on donne le modèle cinématique ci-dessous ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel.

L'objectif d'étude est de vérifier si le système permet d'atteindre l'exigence demandée.



Le bâti 0 est fixe. Un motoréducteur anime en rotation la manivelle 2. Par l'intermédiaire de la liaison en B, la manivelle 2 déplace la tige 3 en rotation autour de l'axe  $(A, \vec{z}_0)$  qui déplace elle-même le poussoir 4 en translation suivant  $\vec{y}_0$ .

Données :  $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ ,  $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$ ,  $\overline{AB} = \mu \vec{x}_3$ ,  $\overline{AC} = \lambda \vec{x}_3$ ,  $\overline{CH} = y \vec{y}_0$ ,  $\overline{OB} = R \vec{x}_2$ ,  $\overline{HA} = L \vec{x}_0$  et  $\overline{OA} = L_1 \vec{x}_0$ .  $R = 0,15$  m ;  $L = 2L_1 = 0,5$  m.

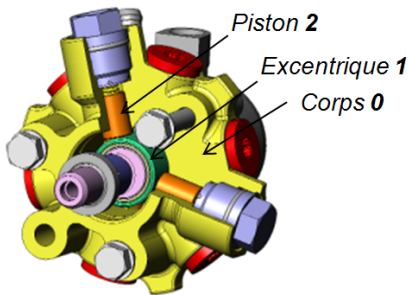
On se place en modèle plan. Les distances  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $y$  sont variables.

- Q1 :** Décrire le système dans une chaîne d'énergie. Déterminer les grandeurs d'entrée et de sortie.
- Q2 :** Représenter les figures de changement de base.
- Q3 :** Écrire les équations de fermeture géométrique (OAB) et (HAC) en projection dans la base 0 et en déduire la loi entrée sortie du système :  $y$  en fonction de  $\theta_2$ .
- Q4 :** Déterminer l'amplitude de déplacement du poussoir  $\Delta y = y_{\max} - y_{\min}$ .
- Q5 :** Conclure vis-à-vis du cahier des charges.
- Q6 :** Déterminer le couple en sortie du motoréducteur permettant de maintenir en position 4 packs.

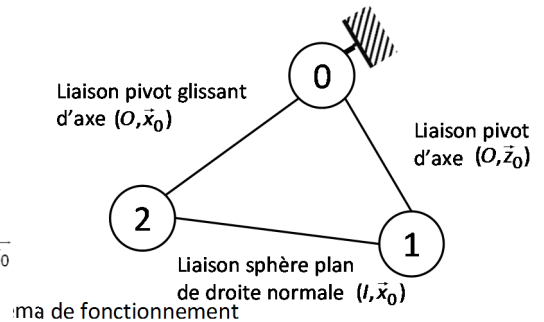
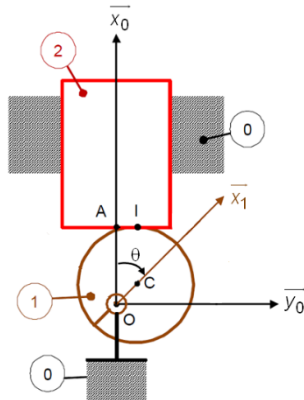
# TD 2 : DÉTERMINER LES LOIS E/S PAR FERMETURE CINÉMATIQUE ET PRODUIT SCALAIRE

## Exercice 2.1 : POMPE HYDRAULIQUE À PISTONS RADIAUX

On s'intéresse au comportement cinématique du dispositif de transformation de mouvement par excentrique qui permet de transformer le mouvement de rotation continu de l'arbre d'entrée, sur lequel est fixé l'excentrique **1**, en mouvement de translation alternative du piston **2**.



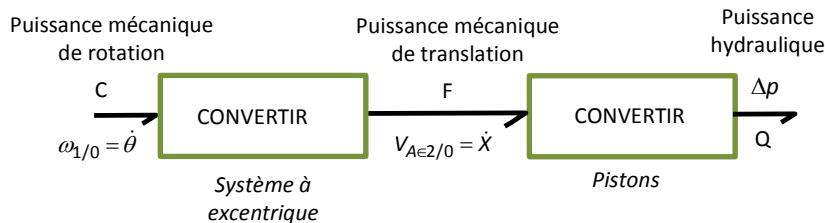
Représentation 3D (corps 0 en coupe)



### Constituants et paramétrage

- corps **0**, de repère lié  $R_0(O, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ , considéré comme fixe
- excentrique **1**, de repère lié  $R_1(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)$ , tel que  $(\bar{x}_0, \bar{x}_1) = \theta$ .  
L'excentrique de rayon  $R$  et de centre  $C$  tel que  $\overline{OC} = e \bar{x}_1$ , est en contact supposé ponctuel avec le piston **2**. On note  $\overline{AI} = \lambda(t) \bar{y}_0$
- piston **2**, de repère lié  $R_2(A, \bar{x}_0, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ , tel que  $\overline{OA} = x(t) \cdot \bar{x}_0$ . Le diamètre d'un piston est noté  $D$ .

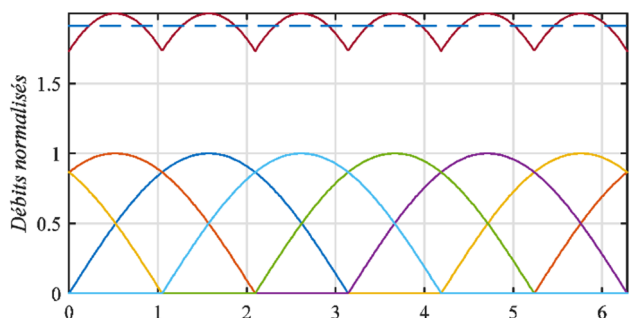
La pompe comprend 6 pistons fonctionnant en parallèle. La chaîne d'énergie pour un piston est la suivante :



Le débit sortant de la chambre d'un piston vers la canalisation de refoulement est :  $Q = \langle S \dot{x} \rangle_+$ , partie positive de  $S \dot{x}$ .

**Objectif :** déterminer le débit instantané de la pompe en fonction de la vitesse de rotation et de la position de l'arbre d'entrée.

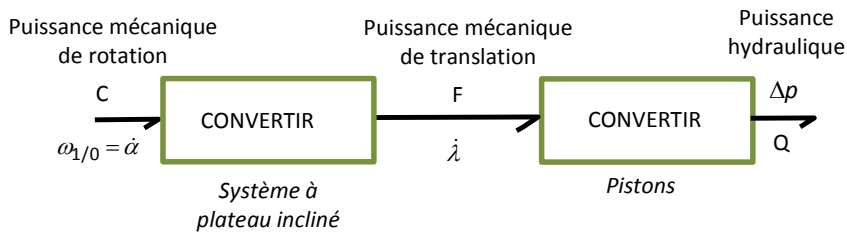
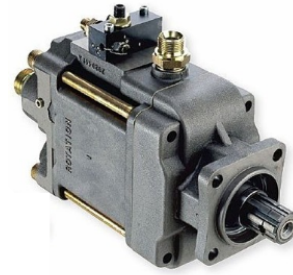
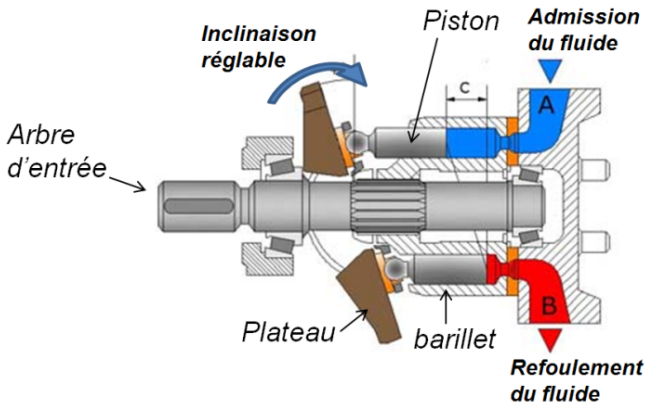
- Q1 :** Écrire la relation de fermeture sur les torseurs cinématiques.
- Q2 :** Écrire les torseurs cinématiques des liaisons. Identifier les paramètres d'entrée et de sortie sur les torseurs cinématiques. Déterminer l'équation scalaire à écrire.
- Q3 :** Déterminer la relation d'entrée-sortie en vitesse.
- Q4 :** Retrouver ce résultat à partir d'une fermeture géométrique.
- Q5 :** En déduire le débit instantané en sortie de pompe provenant de ce piston puis de l'ensemble des pistons.
- Q6 :** Conclure en vous aidant de la figure ci-contre.
- Q7 :** Retrouver la loi entrée-sortie en position à partir de la loi entrée-sortie en vitesse.



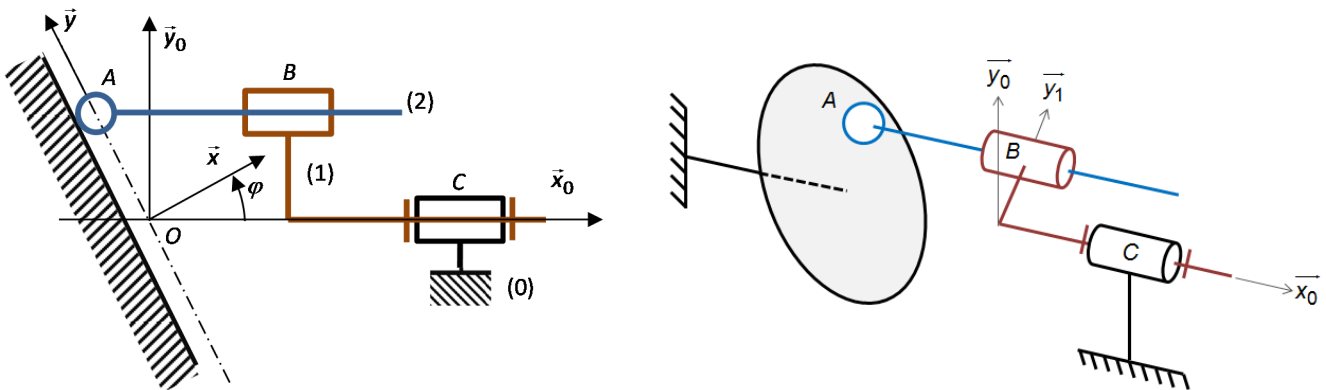
## Exercice 2.2 : POMPE HYDRAULIQUE À PISTONS AXIAUX ET À DÉBIT VARIABLE

Dans ce type de pompe, les pistons sont logés dans un barillet lié à l'arbre d'entrée.

Un système de réglage de l'inclinaison du plateau, qui est fixe pendant la phase d'utilisation de la pompe, permet de faire varier le débit du fluide en sortie de la pompe à vitesse de rotation de l'arbre d'entrée fixée.



Lorsque le débit de la pompe est réglé, c'est-à-dire lorsque l'inclinaison du plateau est fixée, on peut étudier le comportement cinématique de la pompe à partir du modèle représenté ci-dessous.



### Constituants et paramétrage

- $R_0(O, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$  et  $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_0)$  associés au corps **0**, tels que  $\overline{OC} = c \cdot \bar{x}_0$  et  $\varphi = (\bar{x}_0, \bar{x}) = cte$  ;
- $R_1(O, \bar{x}_0, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$  associé au barillet **1**, tel que  $\overline{CB} = b \bar{x}_0 + r \bar{y}_1$  et  $\alpha(t) = (\bar{y}_0, \bar{y}_1)$  ;
- $R_2(A, \bar{x}_0, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$  associé au piston **2** tel que  $\overline{BA} = \lambda(t) \bar{x}_0$ .

On pose aussi :  $\overline{OA} = y(t) \bar{y} + z(t) \bar{z}$ .

**Objectif** : déterminer une relation entre le débit instantané de la pompe et la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée.

**Q1** : Réaliser le graphe des liaisons de ce système.

**Q2** : Écrire la relation de fermeture sur les torseurs cinématiques.

**Q3** : Donner l'expression des torseurs cinématiques des liaisons en fonction des paramètres de mouvement.

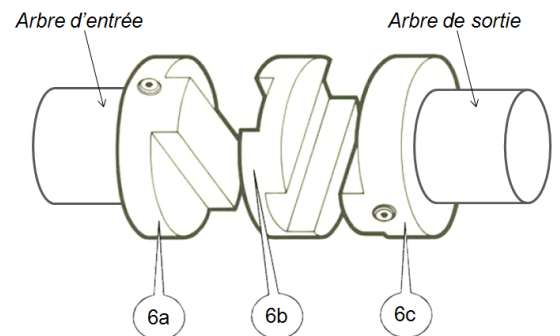
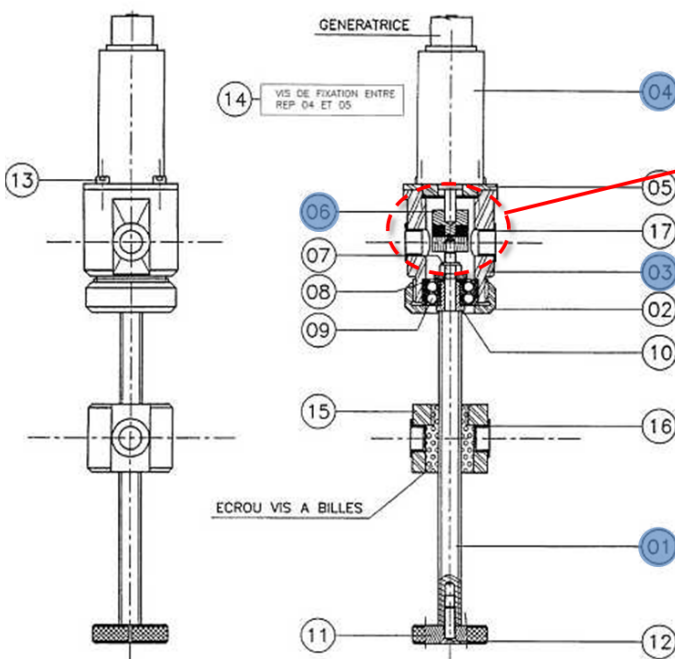
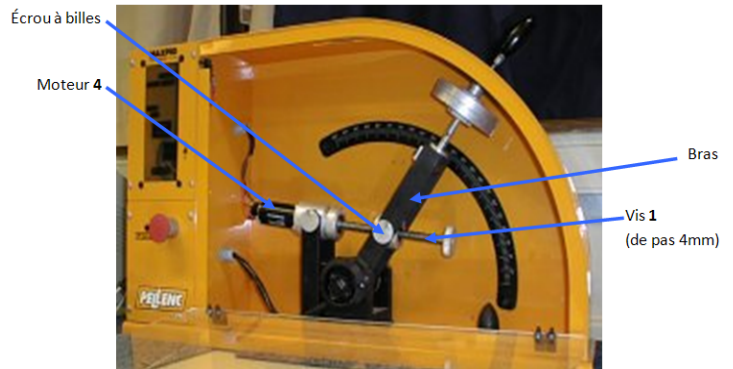
**Q4** : Déterminer l'équation à écrire afin d'obtenir la loi entrée-sortie en vitesse du système à plateau incliné  $\dot{\lambda} = f(\dot{\alpha}, \alpha)$ .

- Q5 : Déterminer la loi entrée-sortie en vitesse du système à plateau incliné  $\dot{\lambda} = f(\dot{\alpha}, \alpha)$ .
- Q6 : Retrouver cette relation par fermeture géométrique.
- Q7 : Donner la relation entre le débit instantané Q en sortie de la pompe (pour un seul piston), la surface S de la section du piston et  $\dot{\lambda}$ .
- Q8 : En déduire l'expression de ce débit instantané en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée.
- Q9 : Indiquer la façon dont il faut faire évoluer l'inclinaison du plateau pour diminuer le débit de la pompe.

### Exercice 2.3 : TRANSMISSION PAR JOINT D'OLDHAM SUR LE SYSTÈME MAXPID

Sur le système Maxpid présent dans le laboratoire de SII, l'axe de sortie du moteur 4 n'est pas parfaitement aligné avec l'axe de la vis 1 qu'il doit entraîner en rotation.

Pour transmettre le mouvement de rotation, le concepteur a choisi d'utiliser un accouplement entre l'axe moteur et la vis de type **joint d'Oldham**.

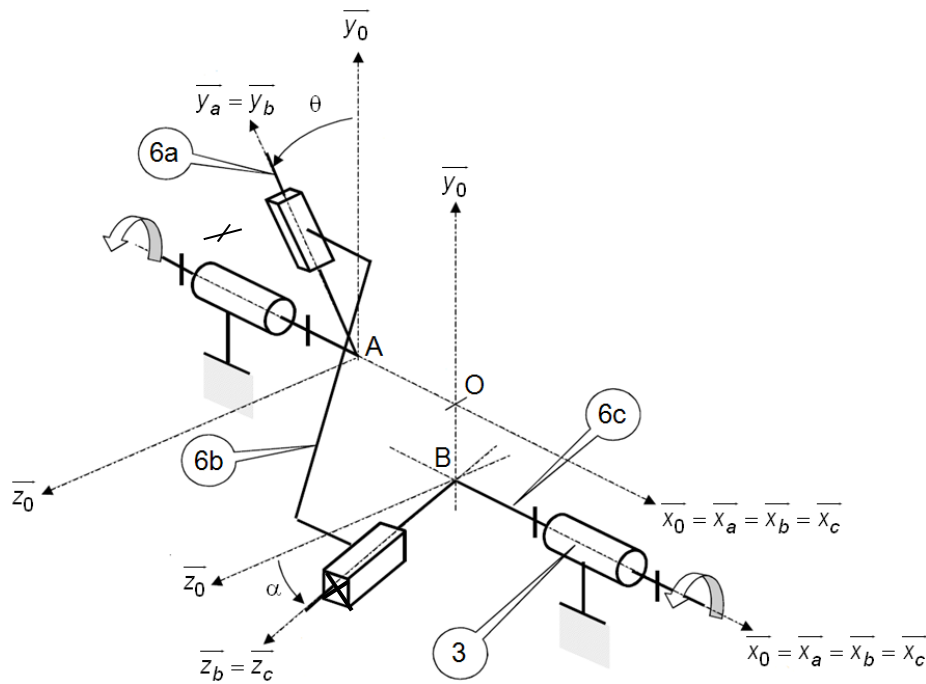


Cette solution technique qui permet de transmettre un mouvement de rotation entre deux axes parallèles non coaxiaux, est constituée :

- d'un plateau 6a, lié à l'arbre d'entrée (axe du moteur 4),
- d'un plateau 6c, lié à l'arbre de sortie (vis 1),
- d'un élément intermédiaire 6b.

Un modèle cinématique de cette transmission par joint d'Oldham est représenté ci-dessous.





### Constituants et paramétrage

- Le solide **3**, de repère associé  $R_0(O, \overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{z_0})$ , est considéré comme fixe.
  - Le solide **6a**, de repère associé  $R_a(A, \overline{x_a}, \overline{y_a}, \overline{z_a})$ , est en mouvement de rotation d'axe  $(A, \overline{x_a})$  par rapport au solide **3** tel que  $\overline{x_0} = \overline{x_a}$  et  $(\overline{y_0}, \overline{y_a}) = \theta$ .
  - Le solide **6c**, de repère associé  $R_b(B, \overline{x_b}, \overline{y_b}, \overline{z_b})$ , est en mouvement de rotation d'axe  $(B, \overline{x_b})$  par rapport au solide **3** tel que  $\overline{x_0} = \overline{x_b}$  et  $(\overline{z_0}, \overline{z_b}) = \alpha$ .
- On définit  $\overline{OA} = e \cdot \overline{x_0}$  et  $\overline{OB} = -f \cdot \overline{y_0}$

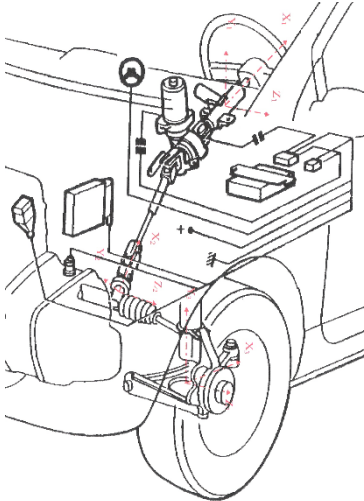
**Objectif :** S'assurer que la vitesse de rotation de la vis est la même que la vitesse de rotation de l'axe du moteur (transmission homocinétique).

- Q1 :** Repasser en couleur les différents solides sur le schéma cinématique.
- Q2 :** Dessiner le graphe des liaisons du joint d'Oldham et identifier le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du joint d'Oldham.
- Q3 :** Écrire la relation de fermeture cinématique et donner l'expression, en fonction des paramètres de mouvement, des torseurs cinématiques de chacune des liaisons.
- Q4 :** Déterminer l'équation scalaire à écrire afin d'obtenir, par fermeture cinématique, la loi entrée-sortie en vitesse  $\dot{\theta} = f(\dot{\alpha})$  du système.
- Q5 :** Déterminer la loi entrée-sortie en vitesse du système.
- Q6 :** Conclure sur le caractère homocinétique (vitesse d'entrée = vitesse de sortie) de cette transmission de mouvement.

### Questions supplémentaires :

- Q7 :** Déterminer l'expression de la vitesse de translation de 6a/6b en fonction de  $\dot{\theta}$  et  $\theta$  ( $\overline{V_{P \in 6a/6b}} \cdot \overline{y_b} = \dot{\lambda}$ ).
- Q8 :** Déterminer l'expression de la vitesse de translation de 6b/6c en fonction de  $\dot{\alpha}$  et  $\alpha$  ( $\overline{V_{P \in 6b/6c}} \cdot \overline{z_b} = \dot{\mu}$ ).

## Exercice 2.4 : JOINT DE CARDAN



Le dessin en perspective ci-contre montre l'implantation d'une **direction à assistance électrique (DAE)** dans le véhicule automobile Twingo de Renault.

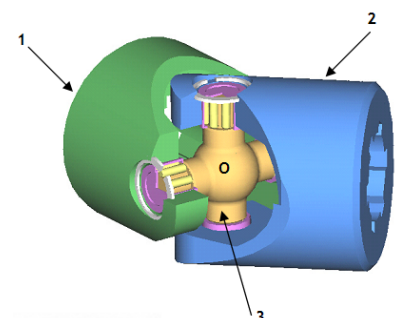
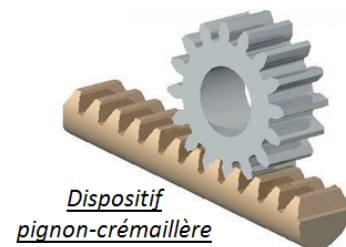
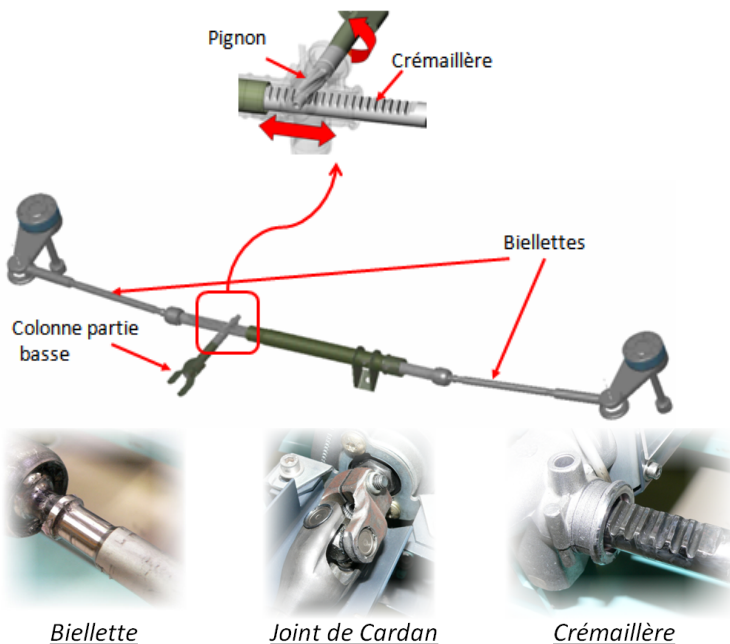
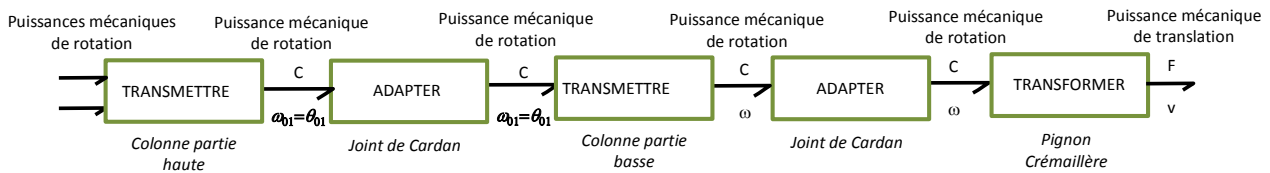
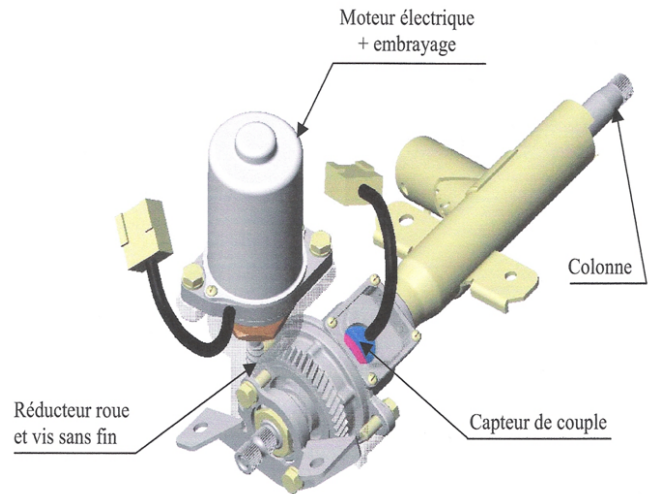
Un calculateur permet, à partir de paramètres mesurés sur le véhicule dont le **couple exercé par le conducteur** sur le volant, de mettre en action un **moteur électrique** pour l'assister.

Le mouvement du volant, combiné avec l'assistance, est transmis à la partie basse de la colonne de direction par l'intermédiaire d'un **accouplement** de type **joint de Cardan**. Ce composant permet

d'adapter la puissance mécanique de rotation en permettant un changement de l'axe de la rotation.

Le mouvement de rotation de la colonne est ensuite transformé en mouvement de translation de la crémaillère grâce à un dispositif pignon-crémaillère.

C'est le mouvement de translation de la crémaillère qui permet de faire pivoter les roues grâce aux biellettes de direction situées à chacune de ses extrémités.

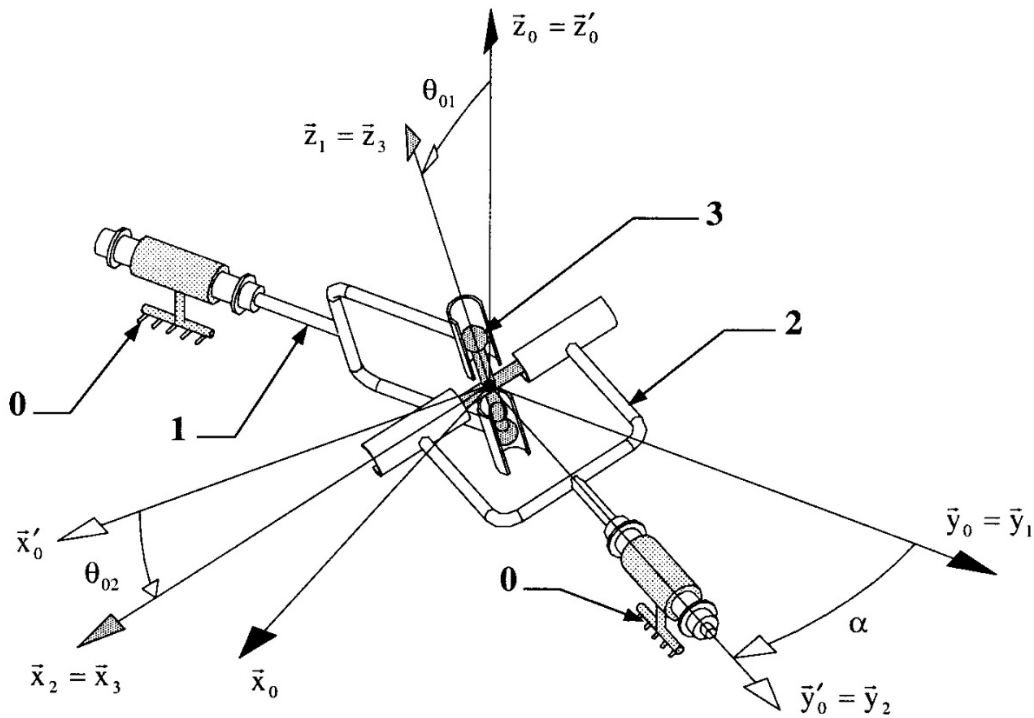


On s'intéresse dans la suite au joint de cardan qui permet de **transmettre une puissance mécanique de rotation entre deux arbres concourants non coaxiaux**.

Il est constitué :

- d'une fourche **1**, liée par une liaison encastrement à l'arbre d'entrée (colonne partie haute),
- d'une fourche **2**, liée par une liaison encastrement à l'arbre de sortie (colonne partie basse),

- d'un croisillon **3**.



- $R_0(O, \overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{z_0})$  et  $R'_0(O, \overline{x'_0}, \overline{y'_0}, \overline{z'_0})$  au bâti 0, tel que  $\alpha = (\overline{x_0}, \overline{x'_0}) = (\overline{y_0}, \overline{y'_0})$
- $R_1(O, \overline{x_1}, \overline{y_1}, \overline{z_1})$  à l'arbre d'entrée 1, tel que  $\theta_{01} = (\overline{x_0}, \overline{x_1}) = (\overline{z_0}, \overline{z_1})$
- $R_2(O, \overline{x_2}, \overline{y_2}, \overline{z_2})$  à l'arbre de sortie 2 tel que  $\theta_{02} = (\overline{x'_0}, \overline{x_2}) = (\overline{z_0}, \overline{z_2})$
- $R_3(O, \overline{x_3}, \overline{y_3}, \overline{z_3})$  au croisillon 3 tel que  $\overline{x_2} = \overline{x_3}$  et  $\overline{z_1} = \overline{z_3}$

L'arbre d'entrée 1 et l'arbre de sortie 2 sont concourants en O.

L'angle  $\alpha$  (constant) entre l'arbre d'entrée 1 et l'arbre de sortie 2 est appelé angle de brisure.

**Objectif :** S'assurer que la vitesse de rotation du pignon qui entraîne la crémaillère est la même que la vitesse de rotation de la partie haute de la colonne entraînée par le volant et le moto-réducteur d'assistance (transmission homocinétique) en caractérisant le comportement cinématique du joint de cardan.

- Q1 :** Déterminer, sans calcul, la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle entre 3 et 1. En déduire un graphe des liaisons simplifié du joint de Cardan.
- Q2 :** Représenter les figures planes de changement de base relatives aux angles  $\theta_{01}$ ,  $\alpha$  et  $\theta_{02}$ .
- Q3 :** Donner le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du système.
- Q4 :** Déterminer, à partir de la particularité géométrique angulaire des axes du croisillon **3**, la loi entrée-sortie en position joint de Cardan.
- Q5 :** En déduire la loi entrée-sortie en vitesse  $\omega_2 = f(\omega_1, \theta_{01})$  du joint de Cardan. On notera  $\omega_1 = \dot{\theta}_{01}$  et  $\omega_2 = \dot{\theta}_{02}$ .
- Q6 :** Conclure sur le caractère homocinétique de la transmission par le joint de Cardan.
- Q7 :** Expliquer, à l'aide de vos observations sur la première figure, la solution utilisée par le concepteur de la direction assistée pour réaliser une transmission homocinétique entre la partie haute de la colonne entraînée par le volant (assisté du moto-réducteur) et le pignon qui met en mouvement la crémaillère.

# EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

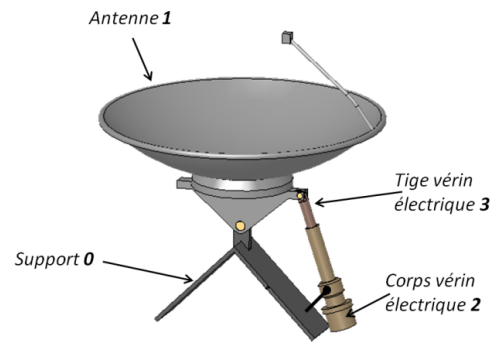
Corrigé des exercices supplémentaires en ligne : <http://www.s2i-chateaubriand-joliotcurie.net>

## 1.1 SYSTÈME D'ORIENTATION D'ANTENNE

Le système d'orientation d'antenne ci-contre permet, grâce à une commande à distance, de régler l'orientation de la parabole afin d'optimiser la réception des informations.

Pour cela, le vérin électrique est alimenté en énergie électrique par le pré-actionneur, de façon à faire rentrer ou sortir la tige et obtenir ainsi la position de l'antenne désirée.

**Objectif :** déterminer la durée d'alimentation en énergie électrique du système d'orientation pour un changement de position de l'antenne donné.



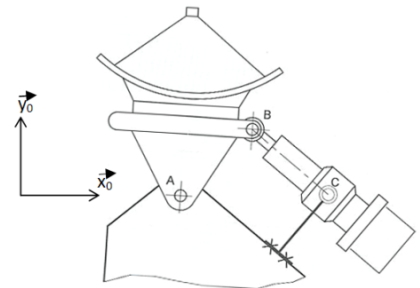
Une représentation 2D du système d'orientation d'antenne est donnée ci-dessous.

Données :  $\overline{AC} = L_0 \cdot \overline{X}_0$  et  $\overline{AB} = L_1 \cdot \overline{x}_1$

$\alpha_1(t)$  : paramètre de mouvement de l'antenne 1 par rapport au support 0.

$\alpha_2(t)$  : paramètre de mouvement du corps 2 par rapport au support 0.

$d(t)$  : paramètre de mouvement de la tige 3 par rapport au corps 2.



**Q1 :** Réaliser, en s'inspirant de la figure ci-dessus, le schéma cinématique du système d'orientation d'antenne dans le plan  $(O, \overline{x}_0, \overline{y}_0)$ . Paramétrer ce schéma cinématique.

**Q2 :** Donner le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du système.

**Q3 :** Déterminer, à l'aide d'une fermeture géométrique, la loi entrée-sortie en position  $d = f(\alpha_1)$  du système d'orientation d'antenne.

Le vérin électrique utilisé est constitué :

- d'un moteur électrique ;
- d'un réducteur à engrenage (rapport de réduction  $k = \frac{1}{5}$ ) ;
- d'un dispositif de transformation de mouvement de type vis-écrou (pas  $p = 2 \text{ mm}$ ).

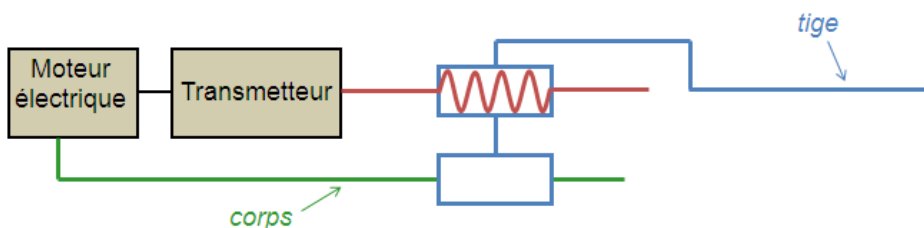
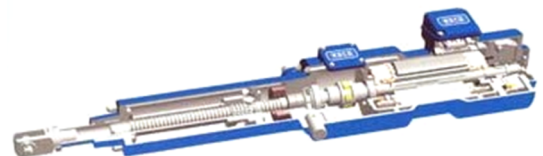


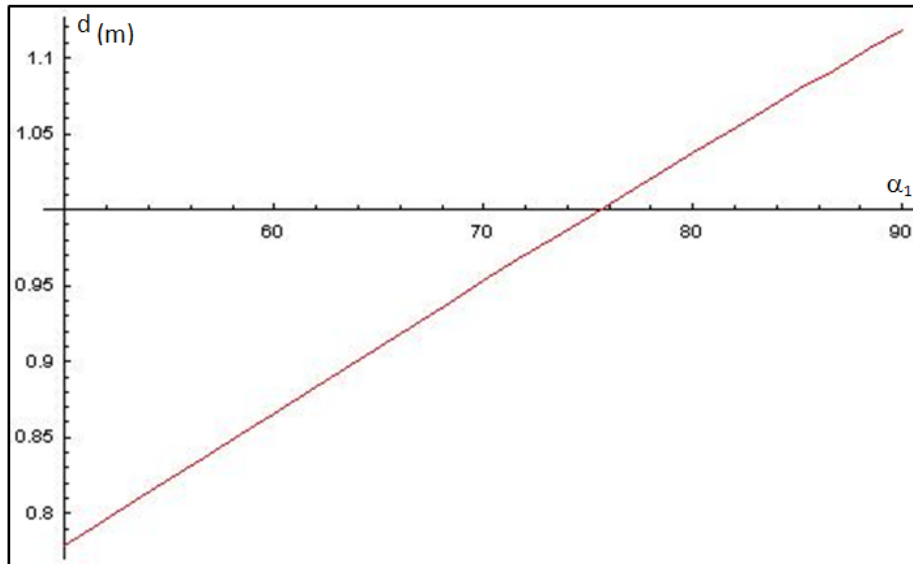
Schéma technologique du vérin électrique

On suppose que le moteur électrique tourne à la vitesse constante de 6000 tr/min.

**Q4 :** Déterminer la vitesse de sortie de la tige par rapport au corps.

On souhaite faire passer l'antenne d'une position initiale  $\alpha_1 = 58^\circ$  à une position finale  $\alpha_1 = 82^\circ$ .

**Q5 :** Déterminer, à l'aide de la courbe de la loi entrée-sortie donnée ci-dessous, la durée d'alimentation du vérin électrique permettant ce changement de position.



## 1.2 STABILISATEUR CARDIAQUE

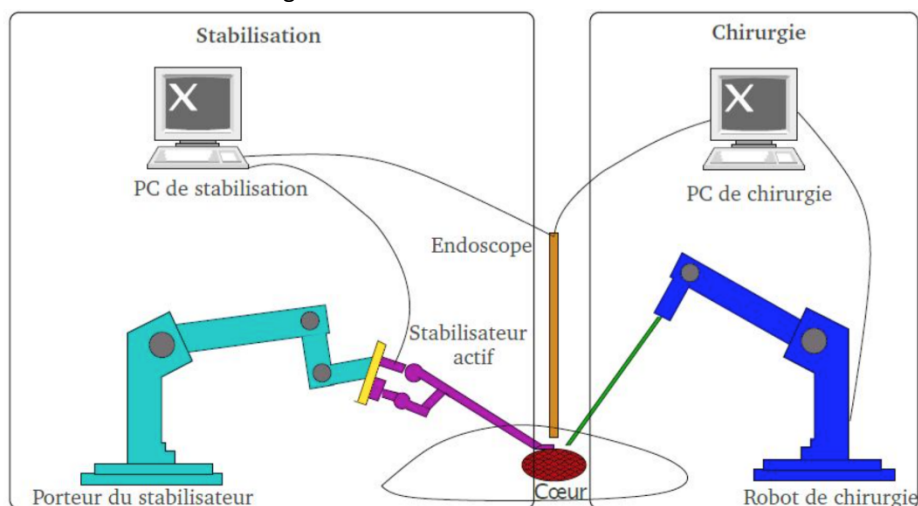
Les pathologies cardiaques, en particulier les rétrécissements des artères qui alimentent le myocarde (muscle cardiaque), sont en constante augmentation. La chirurgie à cœur battant se substitue progressivement à celle impliquant un arrêt du cœur et la mise en place d'une circulation extracorporelle. L'avantage essentiel de cette chirurgie à cœur battant est de limiter les complications induites par l'intervention.

Cette technique opératoire se différencie du pontage classique par la conservation du battement cardiaque durant l'intervention ; la principale difficulté réside alors dans la nécessité d'immobiliser la partie du cœur à opérer.

Pour intervenir précisément sur la zone concernée, il est nécessaire de faire appel à un stabilisateur mécanique qui immobilise cette « zone cible ».

Actuellement, les stabilisateurs mécaniques passifs laissent subsister pour cette zone un déplacement de l'ordre du millimètre, appelé par la suite déplacement résiduel, alors que la valeur souhaitée est plutôt de 0,1 mm. De plus, cette valeur n'est pas satisfaisante en vue d'une utilisation endoscopique, technique d'intervention dont le développement va croissant.

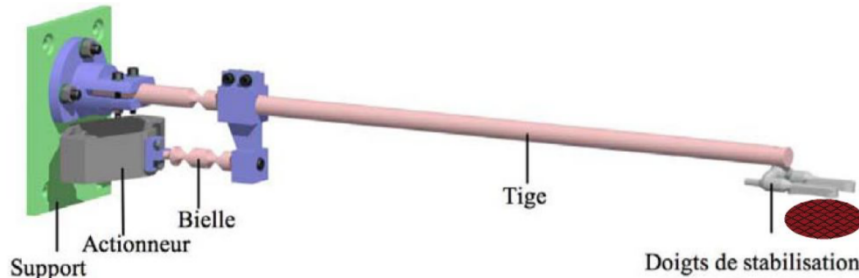
La solution proposée pour remédier à ces insuffisances est constituée par un stabilisateur cardiaque actif, c'est-à-dire commandé en position. Dans le cas de cette étude, il s'agit du système Cardiolock1 développé principalement au laboratoire LSIT de l'Université de Strasbourg.



## Présentation du Cardiolock1

Les faibles amplitudes des mouvements considérés et la recherche de guidages sans jeu justifient l'emploi d'un mécanisme constitué de « guidages en rotation élastiques ». Ceux-ci sont obtenus en combinant l'élasticité du matériau et la géométrie des pièces (amincissements localisés) de façon à favoriser une déformation locale qui donne le comportement d'un guidage en rotation sans jeu.

Le mouvement de la paroi cardiaque se manifeste par un déplacement de l'extrémité de la tige (5). L'actionneur piézoélectrique permet le rattrapage de ce déplacement résiduel par déformation des liaisons pivot\* et de la tige (5). Il garantit aussi une dynamique importante.



Le Cardiolock1 comporte les éléments suivants :

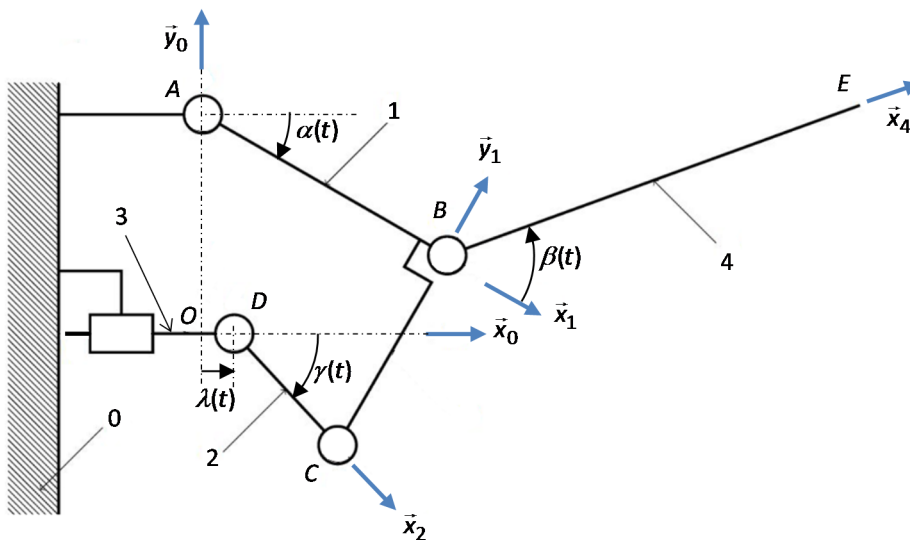
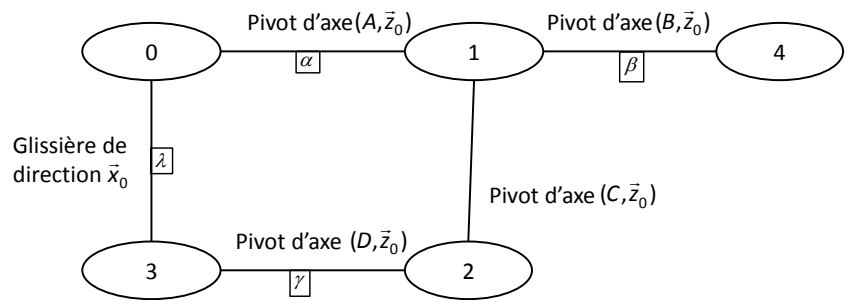
- une tige flexible de diamètre compatible avec la chirurgie mini-invasive comportant à son extrémité une fixation par succion sur la paroi cardiaque ;
- un dispositif bielle-manivelle constitué de guidages en rotation élastiques ;
- un actionneur linéaire piézoélectrique d'amplitude 130  $\mu\text{m}$ .

La tige est stérilisable par autoclave, quant au reste du Cardiolock1 il peut être protégé par un sac stérile.

## Modèle cinématique

Un modèle cinématique du stabilisateur actif est défini par les figures données ci-contre et ci-dessous. Dans toute l'étude, on retient les hypothèses et notations suivantes :

- modélisation plane (les projections sur  $\vec{z}_0$  sont triviales) ;
- repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au bâti (0) ;
- base  $B_i(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_0)$  liée à chaque solide (i) ;



$$\overline{OD} = \lambda(t) \vec{x}_0 \quad \overline{AB} = L_1 \vec{x}_1 \quad \overline{BE} = L_4 \vec{x}_4 \quad \overline{CB} = d_1 \vec{y}_1 \quad \overline{DC} = L_2 \vec{x}_2 \quad \overline{OA} = d_1 \vec{y}_0$$

$$L_1 = 21 \text{ mm} \quad d_1 = 30 \text{ mm} \quad L_2 = 18 \text{ mm} \quad L_4 = 300 \text{ mm}$$

**On pose :**  $y(t) = \overline{AE} \cdot \vec{y}_0$

**Objectif** : déterminer l'amplitude de déplacement  $y(t)$  du point E dû à l'actionneur piézoélectrique.

Pour déterminer le déplacement dû uniquement à l'actionneur, on **néglige la flexion de la tige** :  $\beta(t) = 0$ .

**Q1** : Identifier les paramètres de position d'entrée et de de sortie du système de transformation de mouvement translation / rotation.

**Q2** : Par fermeture géométrique, déterminer le système d'équations liant  $\lambda$ ,  $\alpha$ , et  $\gamma$  aux paramètres géométriques.

**Q3** : En déduire l'expression de  $\lambda$  en fonction de  $\alpha$  et des caractéristiques géométriques du système. Exprimer la valeur  $\lambda_0$  prise par  $\lambda$  dans la configuration de repos ( $\alpha = 0$ ).

Les déplacements envisagés sont de petits déplacements et les angles restent proches de 0. Les expressions peuvent être linéarisées. On confond dans la suite, au voisinage de 0, le sinus de l'angle avec sa mesure exprimée en radian et le cosinus de l'angle avec 1.

**Q4** : Linéariser le système d'équations obtenu question 2 et exprimer  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  et  $\gamma$  en fonction de  $\alpha$ .

**Q5** : Déterminer  $y(t)$  en fonction de  $\alpha$ , puis, après linéarisation, en fonction de  $\Delta\lambda$  et des caractéristiques géométriques du système.

**Q6** : Déterminer  $\Delta\lambda$  pour obtenir un déplacement  $y$  de 0,1 mm. Conclure sur l'hypothèse de petit déplacement.

**Q7** : Déterminer l'effort fourni par l'actionneur piézoélectrique afin de générer un effort de 100 N sur le cœur.

### 1.3 POMPE À PALETTES

Le dessin ci-contre représente une pompe à palettes.

Les trois palettes **3**, entraînées par le barillet **2**, sont plaquées, par effet centrifuge, sur le corps **1** et permettent ainsi de pousser le fluide depuis l'orifice d'admission vers l'orifice de refoulement.

Le repère  $R_1(O_1, \overline{x_1}, \overline{y_1}, \overline{z_1})$  est associé au corps **1**,  $R_2(O_2, \overline{x_2}, \overline{y_2}, \overline{z_1})$  au barillet **2** et  $R_3(E, \overline{x_2}, \overline{y_2}, \overline{z_1})$  à la palette **3**.

Le barillet **2** a un mouvement de rotation d'axe  $(O_2, \overline{z_1})$  par rapport au corps **1**.

On note  $\alpha = (\overline{x_1}, \overline{x_2})$ .

Le rayon intérieur du corps **1** est noté R.

Le centre  $O_2$  est excentré par rapport au corps **1**, avec pour excentration  $\overline{O_1O_2} = -e.\overline{x_1}$  et  $e = 4,5$  mm.

Le point E de contact avec le corps **1** est supposé dans le plan de symétrie de la palette.

$\overline{O_2D} = d.\overline{y_2}$  et  $d = 7,5$  mm,  $\overline{DE} = \lambda.\overline{x_2}$ .

**Q1** : Dessiner le graphe des liaisons de ce système.

**Q2** : Donner le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du système.

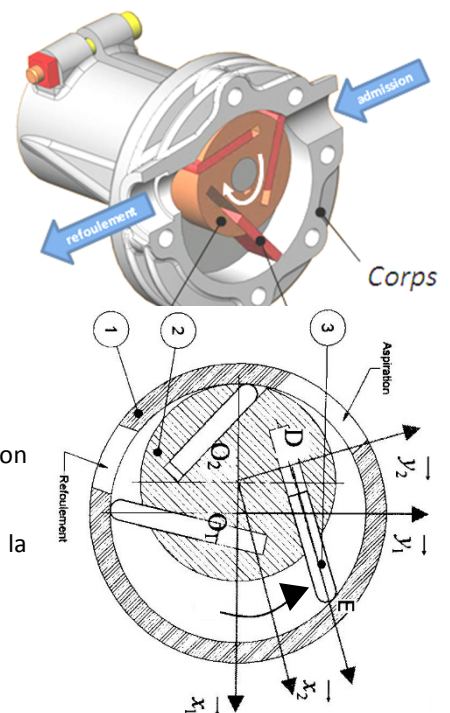
**Q3** : Déterminer, à l'aide d'une fermeture géométrique, la loi entrée-sortie en position  $\lambda = f(\alpha)$  de la pompe à palettes.

**Q4** : Déterminer l'expression des vecteurs rotation  $\overline{\Omega_{2/1}}$ ,  $\overline{\Omega_{3/2}}$  et  $\overline{\Omega_{3/1}}$ .

Pour dimensionner le système afin de s'assurer que les effets dynamiques (« force centrifuge ») plaqueront correctement les palettes sur la surface interne du corps **1**, il est nécessaire de connaître le vecteur accélération du centre de gravité  $G_j$  des palettes.

On donne :  $\overline{G_3E} = b.\overline{x_2}$

**Q5** : Déterminer le vecteur vitesse  $\overline{V_{G_3 \in 3/1}}$ . En déduire le vecteur accélération  $\overline{\Gamma_{G_3 \in 3/1}}$ .



## 2.1 PONCEUSE À VIBRATIONS ROTATIVES

Le système étudié est une ponceuse oscillante, utilisée par les professionnels du bâtiment.

Le moteur entraîne **S1**, qui est guidée en rotation par rapport au bâti **S0**.

La rotation continue de **S1** est transformée en rotation alternative (de faible débattement) du balancier **S3** par l'intermédiaire de la noix **S2**.

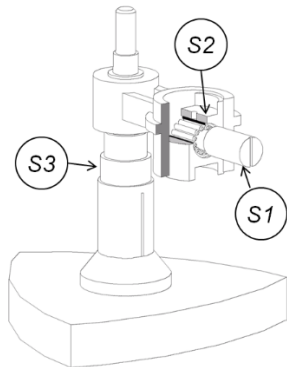
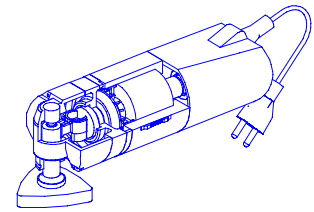


Figure 1

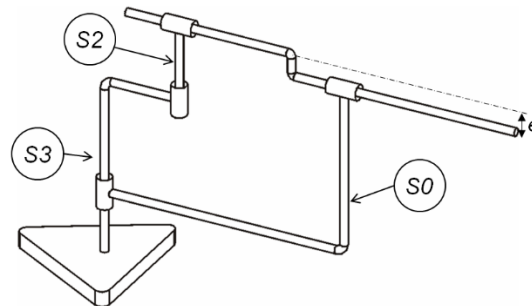


Figure 2

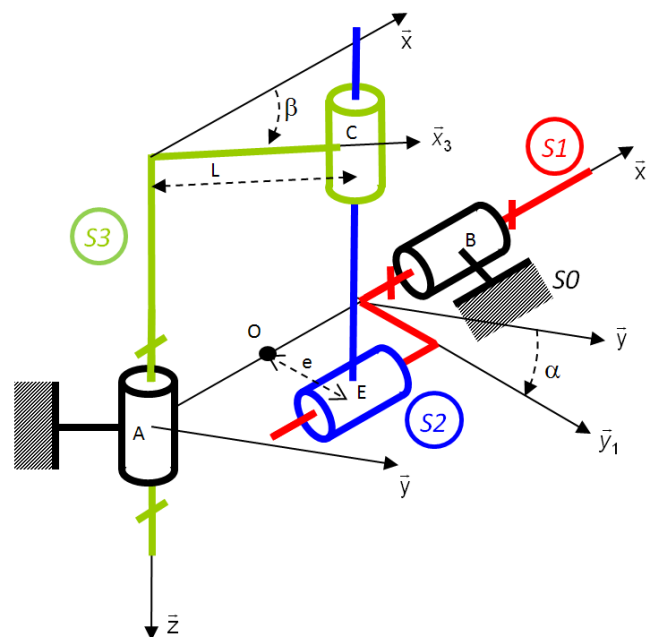
Cette transformation de mouvement est représentée, ci-contre, sous forme de schéma cinématique.

O est le projeté orthogonal de E sur l'axe  $(A, \vec{x})$ .

### Constituants et paramétrage :

- Le solide **S0**, de repère associé  $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , est considéré comme fixe.
- Le solide **S1**, de repère associé  $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , est en mouvement de rotation d'axe  $(O, \vec{x})$  par rapport au solide **S0** tel que  $\vec{x}_0 = \vec{x}_1$  et  $(\vec{y}, \vec{y}_1) = \alpha$ .
- Le solide **S3**, de repère associé  $R_3(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})$ , est en mouvement de rotation d'axe  $(A, \vec{z})$  par rapport au solide **S0** tel que  $\vec{z} = \vec{z}_3$  et  $(\vec{x}, \vec{x}_3) = \beta$ .

On définit  $\vec{BO} = \lambda(t) \cdot \vec{x}$  et  $\vec{CE} = \mu(t) \cdot \vec{z}$



Les distances nécessaires aux calculs sont indiquées sur le schéma cinématique.

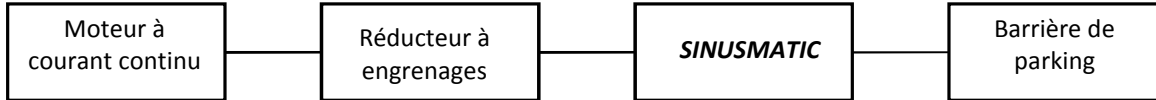
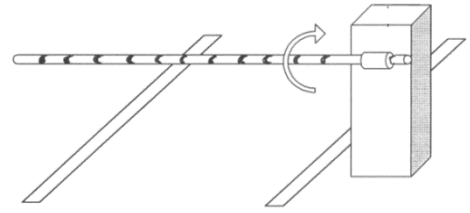
**Objectif :** déterminer une relation entre la vitesse de rotation du moteur de la ponceuse et la vitesse de rotation de **S3**. C'est cette vitesse qui conditionne la qualité du ponçage.

- Q1 :** Repasser en couleur les différents solides sur la figure 2 et sur le schéma cinématique.
- Q2 :** Dessiner le graphe des liaisons de ce système de transformation de mouvement.
- Q3 :** Donner le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du système de transformation de mouvement.
- Q4 :** Déterminer, à l'aide d'une fermeture géométrique, la relation d'entrée sortie en vitesse.
- Q5 :** Déterminer, à l'aide d'une fermeture cinématique, une relation entre  $\dot{\beta}$ ,  $\beta$ ,  $\dot{\alpha}$  et  $\alpha$ .
- Q6 :** En déduire la loi entrée-sortie en vitesse  $\dot{\beta} = f(\dot{\alpha}, \alpha)$  du système de transformation de mouvement.



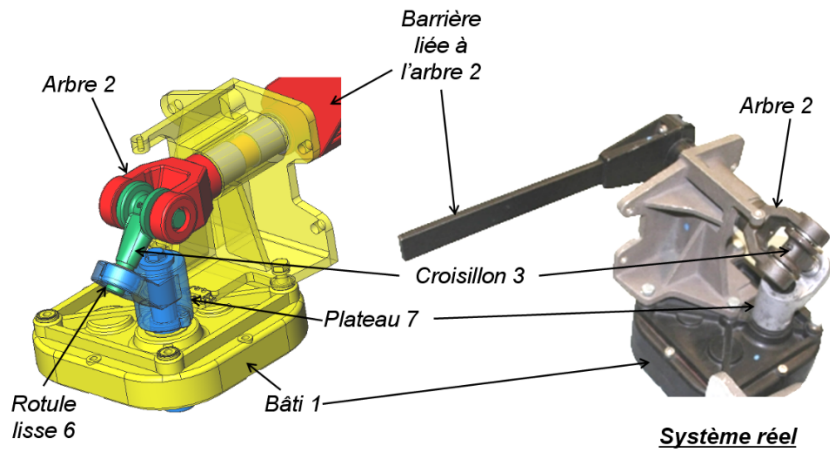
## 2.2 LÈVE BARRIÈRE SINUSMATIC

La système "SINUSMATIC" (conçu par la société ELLIPSE INDUSTRIE) est un système automatisé permettant la fermeture et l'ouverture d'une barrière de type péage d'autoroute, parking, etc...

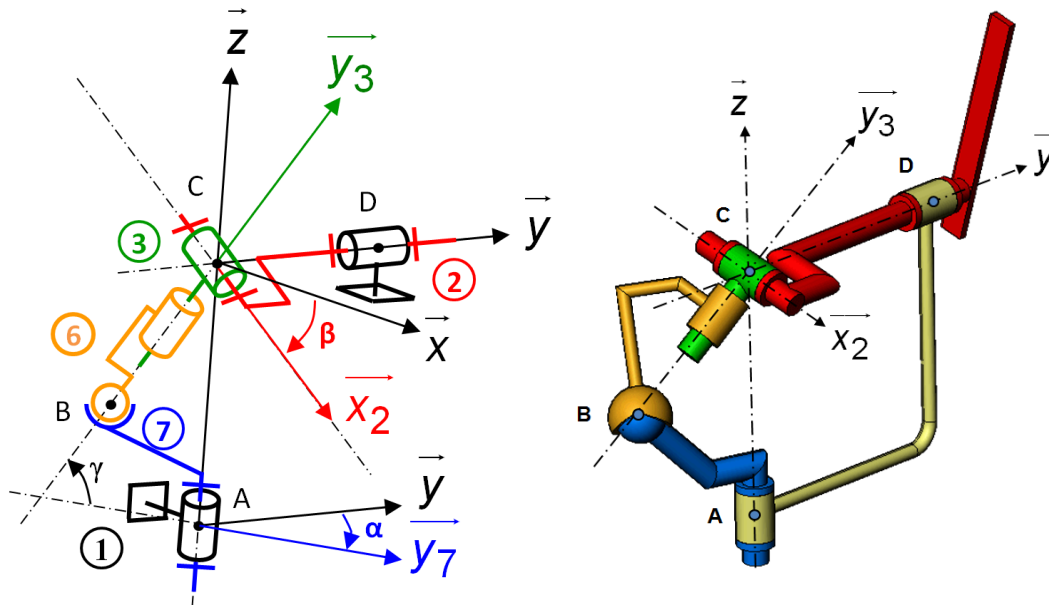


Sa particularité résulte de la cinématique de son renvoi d'angle **irréversible** qui transforme le mouvement de rotation continu du plateau **7** lié à l'axe du motoréducteur en mouvement de rotation alternatif (1/4 de tour) de la barrière liée à l'arbre de sortie **2** du mécanisme.

A chaque demi-tour du plateau **7** correspond une position haute ou basse de la barrière.



Ce système Sinusmatic est représenté sous la forme des schémas cinématiques ci-après.



### Constituants et paramétrage

- $R_1(A, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$  est associé au bâti **1** considéré comme fixe,
- $R_7(A, \bar{x}_7, \bar{y}_7, \bar{z}_7)$  est associé au plateau **7**, tel que  $\alpha = (\bar{y}_1, \bar{y}_7)$ ,
- $R_3(C, \bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$  est associé au croisillon **3**, tel que  $\gamma = (\bar{y}_7, \bar{y}_3) = Cte = 45^\circ$ ,
- $R_2(C, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$  est associé à l'arbre **2**, tel que  $\beta = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ .

## Critère

| Exigence                           | Critère                         | Niveau    |
|------------------------------------|---------------------------------|-----------|
| Autoriser le passage des véhicules | Course angulaire de la barrière | 90° +- 5° |

**Objectif :** Vérifier le critère de course angulaire.

- Q1 :** Donner le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du système.
- Q2 :** Dessiner le graphe des liaisons de ce système.
- Q3 :** Déterminer, la liaison équivalente  $L_{eq}$  aux deux liaisons en série entre 7 et 3.
- Q4 :** Dessiner, dans le plan  $(A, \vec{y}, \vec{z})$ , le schéma cinématique simplifié du système dans la position particulière où  $\alpha = 0$ .
- Q5 :** Représenter les figures planes de changement de base relatives aux angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .
- Q6 :** Déterminer à partir de la particularité géométrique  $\vec{y}_3 \perp \vec{x}_2$ , la loi entrée-sortie en position du système.
- Q7 :** Conclure quant au respect du critère du critère.

## ÉLÉMENTS DE RÉPONSE

### TD1

#### 1.1 Micromoteur de modélisme

Q2 : en développant,  $\alpha = -\arccos \frac{x^2 + e^2 - L^2}{2Xe}$

sans développer,  $x = e \cos \alpha + \sqrt{L^2 - e^2 \sin^2 \alpha}$

Q4 : Cylindre = course x section du piston = 9,95 cm<sup>3</sup>

Q5 :  $\vec{V}_{B \in 3/0} = -\dot{\alpha} \left( e \sin \alpha + \frac{e^2 2 \cos \alpha \sin \alpha}{2\sqrt{L^2 - e^2 \sin^2 \alpha}} \right) \vec{x}_0$

#### 1.2 Tuyère à ouverture variable

Q1 : En éliminant l'angle  $\beta$  dans les équations scalaire de fermeture géométrique, puis en développant partiellement (garder  $(\ell - x)$  comme un seul terme), on obtient :  $\ell^2 = (\ell - x)^2 - 2(\ell - x)h \sin \alpha + 2h^2 - 2h^2 \cos \alpha$

Soit :  $h \cos \alpha + (\ell - x) \sin \alpha = \frac{2h^2 + x^2 - 2\ell x}{2h}$

En appliquant la démarche, on trouve :  $\alpha(x) = \pm \arccos \left( \frac{2h^2 + x^2 - 2\ell x}{2h\sqrt{(\ell - x)^2 + h^2}} \right) [2\pi] + \arctan \left( \frac{\ell - x}{h} \right) [\pi]$

La solution est celle proposée :  $\alpha = -\arccos(f(x)) + \arctan(g(x))$  avec  $f(x) = \frac{2h^2 + x^2 - 2\ell x}{2h\sqrt{(\ell - x)^2 + h^2}}$  et  $g(x) = \frac{\ell - x}{h}$ .

Q2 : partir de  $\frac{D}{2} = \ell \sin \alpha + \frac{D(\alpha=0)}{2}$

Q3 : C = 100 mm

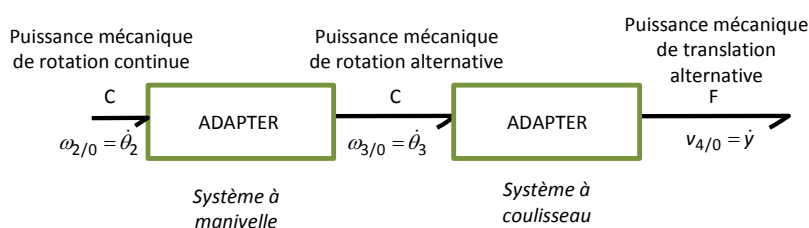
Q4 :  $D = -2x + D_0$  avec  $D_0 = 600$  mm

#### 1.3 Pompe hydraulique à pistons radiaux

Q2 :  $X = e \cos \theta + R$

Q3 :  $Q = S \dot{X} = -eS \dot{\theta} \sin \theta$

#### 1.4 Palettiseur pour l'industrie laitière



Q1 :

Q3 : dans OAB,  $\tan\theta_3 = \frac{R \sin\theta_2}{R \cos\theta_2 - L_1}$

dans HAC,  $\tan\theta_3 = \frac{y}{L}$

d'où :  $y = L \frac{R \sin\theta_2}{R \cos\theta_2 - L_1}$

Q4 :  $\Delta y \approx 2R \frac{L}{L_1}$

Q5 :  $\Delta y = 0,6 \text{ cm}$

$C_e = F_s L \frac{R^2 - RL_1 \cos\theta_2}{(R \cos\theta_2 - L_1)^2} \approx 235 \text{ N}$

## TD2

### 2.1 Pompe hydraulique à pistons radiaux

Q2 : fermeture cinématique en vitesse en C et en projection sur  $\vec{x}_0$

Q3 :  $\dot{X} = -e \dot{\theta} \sin\theta$

Q5 :  $Q = -Se \dot{\theta} \sin\theta$

Q7 :  $X = e \cos\theta + R$

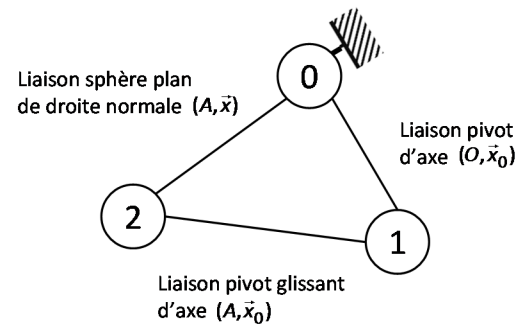
### 2.2 Pompe hydraulique à pistons axiaux et à débit variable

Q1 :

Q4 : fermeture cinématique en vitesse en A en projection sur  $\vec{x}$

Q5 :  $\dot{\lambda} = r \dot{\alpha} \tan\phi \sin\alpha$

Q6 : écrire  $\vec{OC} + \vec{CB} + \vec{BA} + \vec{AO} = \vec{0}$



### 2.3 Transmission par joint d'Oldham sur le système Maxpid

Q2 :

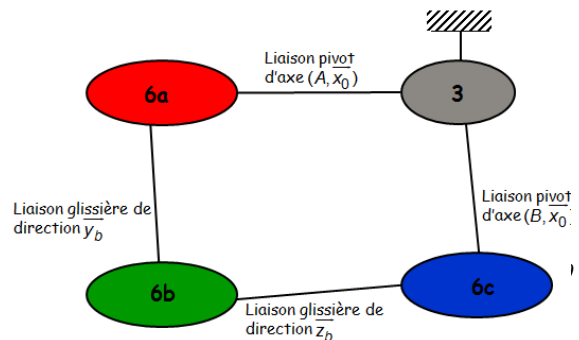
Q4 : fermeture cinématique sur le vecteur vitesse angulaire, en projection sur  $\vec{x}_0$

Q5 :  $\dot{\theta} = \dot{\alpha}$

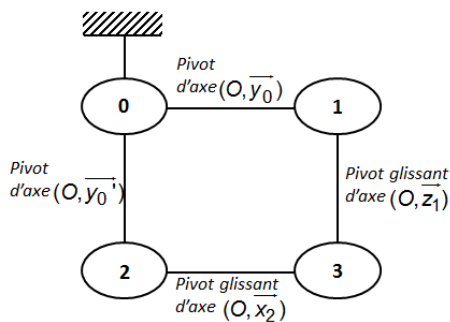
Q6 : donc homocinétique

Q7 : fermeture cinématique en vitesse, en B, en projection sur  $\vec{y}_b$

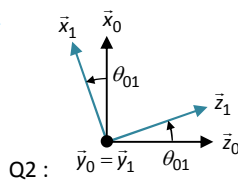
Q8 : fermeture cinématique en vitesse, en O, en projection sur  $\vec{z}_b$



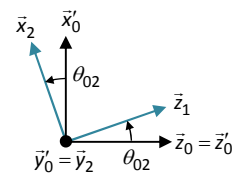
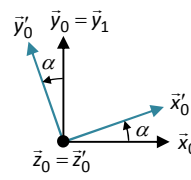
### 2.4 Joint de cardan



Q1 :



Q2 :



Q3 : entrée  $\theta_{01}$ , sortie  $\theta_{02}$

Q4 :  $\vec{x}_2 \cdot \vec{z}_1 = 0 \Rightarrow \tan\theta_{02} = \cos\alpha \tan\theta_{01}$

Q4 :  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \cos\alpha \frac{1 + \tan^2(\theta_{01})}{1 + \tan^2(\theta_{02})} = \cos\alpha \frac{1 + \tan^2(\theta_{01})}{1 + \cos^2(\alpha) \tan^2(\theta_{01})}$

Q5 : donc non homocinétique

## Exercices supplémentaires

### 1.1 Système d'orientation d'antenne

Q1 :

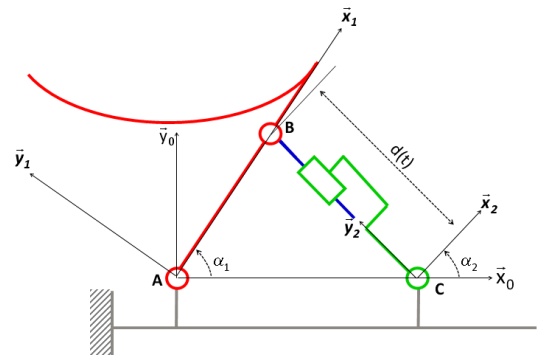
Q2 : entrée  $d(t)$ , sortie  $\alpha_1(t)$

Q3 : dans ABC,  $L_1 \vec{x}_1 - d \vec{y}_2 - L_0 \vec{x}_0 = \vec{0}$ , ce qui donne

$$d = \sqrt{L_0^2 - 2L_0 L_1 \cos \alpha_1 + L_1^2}$$

Q4 :  $v_{tige/corps} = \omega_{tige/corps} \frac{\rho}{2\pi} = \frac{1}{5} \frac{N_{axe\ moteur/corps} P}{60} = 40 \text{ mm/s}$

$\Delta t = 5,1 \text{ s}$



### 1.2 Stabilisateur cardiaque

Q1 : entrée  $\lambda(t)$ , sortie  $\alpha(t)$

Q2 : dans ODCBA,  $\begin{cases} \lambda = -L_2 \cos \gamma + d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha \\ d_1 = L_2 \sin \gamma + d_1 \cos \alpha - L_1 \sin \alpha \end{cases}$

Q3 :  $\lambda = d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha - \sqrt{L_2^2 - (d_1 - d_1 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha)^2}$ , soit pour  $\alpha = 0$ ,  $\lambda_0 = L_1 - \sqrt{L_2^2 - (d_1 - d_1)^2} = L_1 - L_2$

Q4 :  $\Delta \lambda = d_1 \alpha$

Q5 :  $y(t) = \frac{L_1 + L_4}{d_1} \Delta \lambda$

Q6 : avec  $\beta = 0$ ,  $\Delta \lambda = \frac{d_1}{L_1 + L_4} y = 9,3 \mu\text{m}$  et  $\alpha = \frac{\Delta \lambda}{d_1} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$

Q7 :  $\dot{y} = \frac{L_1 + L_4}{d_1} \dot{\lambda}$  soit  $F_e = F_s \frac{L_1 + L_4}{d_1} = -1070 \text{ N}$

### 1.3 Pompe à palettes

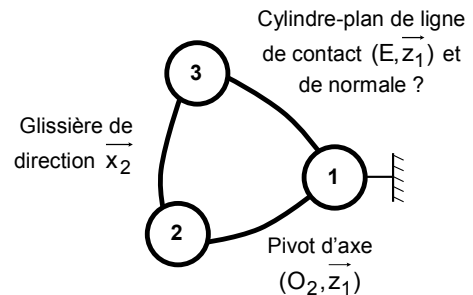
Q1 :

Q3 : dans  $O_1 O_2 D E$ ,  $\lambda = e \cos \alpha + \sqrt{R^2 - (e \sin \alpha + d)^2}$

Q4 :  $\overline{\Omega_{2/1}} = \dot{\alpha} \vec{z}_1$ ,  $\overline{\Omega_{3/2}} = \vec{0}$  et  $\overline{\Omega_{3/1}} = \dot{\alpha} \vec{z}_1$

Q5 :  $\overline{V_{G_3 \in 3/1}} = (\dot{\lambda} - d \dot{\alpha}) \vec{x}_2 + (\lambda - b) \dot{\alpha} \vec{y}_2$

$\overline{\Gamma_{G_3 \in 3/1}} = ((\ddot{\lambda} - d \ddot{\alpha}) - (\lambda - b) \dot{\alpha}^2) \vec{x}_2 + (2 \dot{\lambda} \dot{\alpha} - d \dot{\alpha}^2 + (\lambda - b) \ddot{\alpha}) \vec{y}_2$



### 2.1 Ponceuse à vibrations rotatives

Q2 :

Q3 : entrée  $\alpha(t)$ , sortir  $\beta(t)$

Q4 : dans ACEOBA,  $\begin{cases} / \vec{x} : L \cos \beta - \lambda - a = 0 \\ / \vec{y} : L \sin \beta - e \cos \alpha = 0 \\ / \vec{z} : -h - \mu - e \sin \alpha = 0 \end{cases}$

soit  $\beta = (-1)^n \arcsin\left(\frac{e}{L} \cos \alpha\right) + \pi n$  avec  $n$  entier.

La position pour  $\alpha = 0$  donne  $\beta = \arcsin\left(\frac{e}{L} \cos \alpha\right)$ , d'où :  $\dot{\beta} = \dot{\alpha} \left( \frac{-e \sin \alpha}{\sqrt{L^2 - (e \cos \alpha)^2}} \right)$

Q5 : fermeture cinématique en vitesse, au point d'intersection des domaines de validité des liaisons intermédiaire, soit en  $E$ , en projection sur  $\vec{y}$ . D'où :  $L \dot{\beta} \cos \beta = -e \dot{\alpha} \sin \alpha$ .

