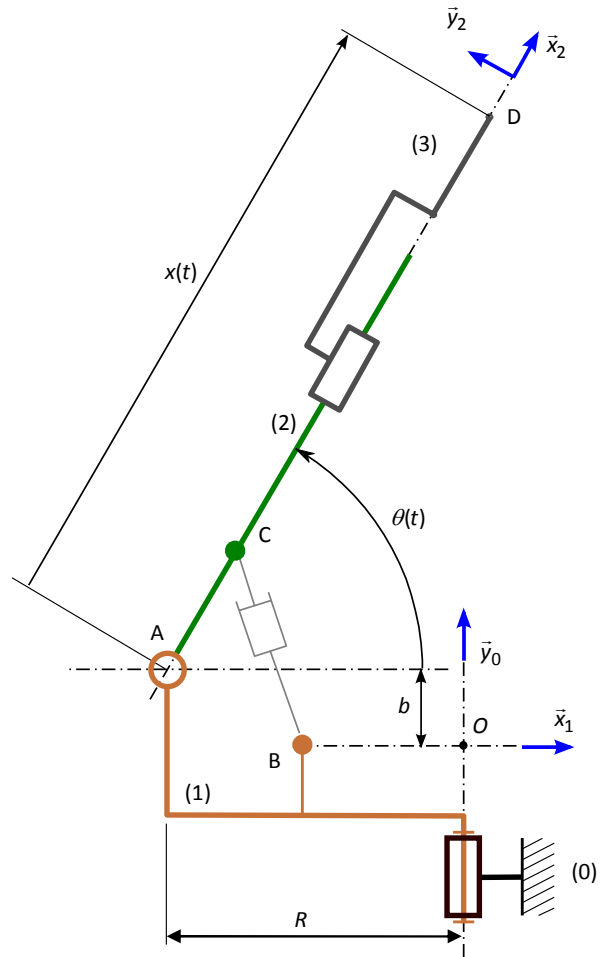
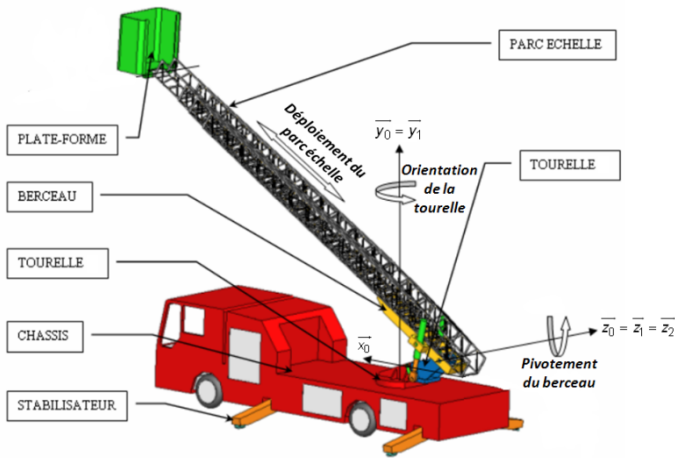


TD 1 : Interpréter un schéma cinématique.....	1
TD 2 : Contraindre une trajectoire.....	4
TD 3 : Contraindre une vitesse ou une accélération.....	7
TD 4 : Imposer un mouvement – torseur cinématique.....	11
TD 5 : Cinématique du contact ponctuel	16
Exercices supplémentaires	19
Éléments de réponse	26

TD 1 : INTERPRÉTER UN SCHÉMA CINÉMATIQUE

Exercice 1.1 : ÉCHELLE E.P.A.S

On s'intéresse à une Echelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle. Ce système conçu et commercialisé par la société CAMIVA est monté sur le châssis d'un camion de pompiers et permet de déplacer une plate-forme pouvant recevoir deux personnes et un brancard (charge maxi 270 kg) le plus rapidement possible et en toute sécurité.



Un schéma cinématique du modèle étudié est donné ci-contre, représenté dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_0)$ de l'échelle.

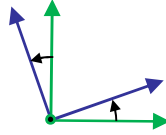
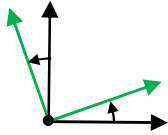
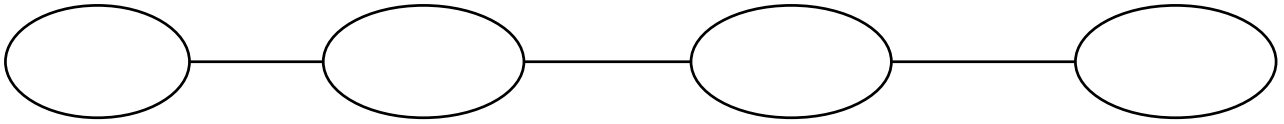
Ce modèle est constitué de 4 ensembles indéformables, listés ci-dessous :

- châssis 0, $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, avec \vec{x}_0 orientée vers l'avant du châssis du camion.
- tourelle 1, $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$
- berceau 2, $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
- échelle 3.

Le point D est caractéristique du haut de l'échelle. Un vérin, non modélisé mais représenté, permet de dresser le berceau.

Q1 : Repasser en couleur chaque ensemble indéformable sur le schéma cinématique, puis compléter le graphe des liaisons en partant du châssis 0 : les nœuds sont les solides, les arrêtes représentent les liaisons. Compléter avec les liaisons, les paramètres et les repères liés.

Q2 : Compléter les figures de changement de base.



Q3 : Identifier les points fixes de chaque ensemble.

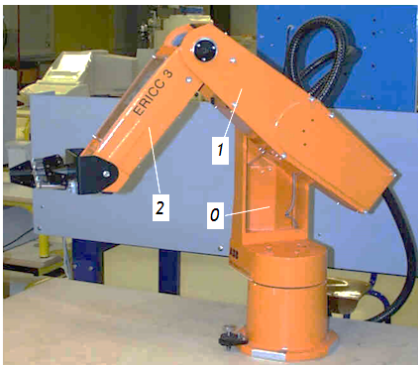
Q4 : Tracer les trajectoires $T_{C/1}$ et $T_{D/2}$. Quelle est la trajectoire $T_{D/1}$ si x est constant ?

Q5 : Déterminer un vecteur position de D dans (1).

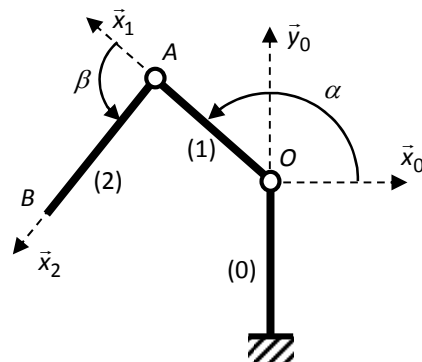
Q6 : Déterminer un vecteur position de D dans (0).

Q7 : Par changement de base, déterminer les coordonnées de D dans le repère R_0 , coordonnées dites opérationnelles.

Exercice 1.2 : ROBOT ERICC 3



On s'intéresse à deux axes (épaule et coude) d'un robot. Le modèle est défini ci-dessous :



Les ensembles définis et les repères liés sont :

- Bâti 0, $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
- Bras 1, $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- Avant-bras 2, $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.

Le vecteur \vec{z}_0 est commun à toutes les bases.

On pose $\overline{OA} = a \vec{x}_1$ et $\overline{AB} = b \vec{x}_2$. a et b sont des distances constantes.

B est un point représentatif de la position de la pince.

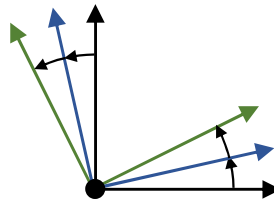
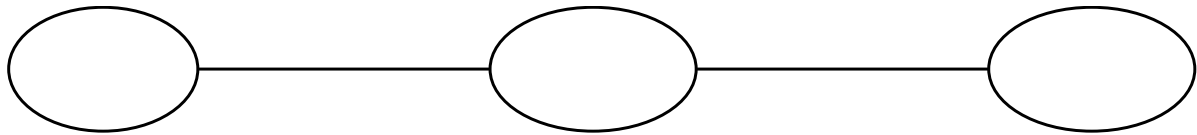
Q1 : Repasser en couleur chaque ensemble indéformable sur le schéma cinématique, puis identifier les points fixes de chaque solide.

Q2 : Compléter le graphe des liaisons du modèle (avec repères liés, liaisons et paramètres) en partant du bâti et en simplifiant les bases (si $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ alors \vec{x}_2 n'apparaît plus).

Q3 : Compléter la figure de changement de base.

Q4 : Définir un vecteur position de B dans R_0 .

Q5 : Exprimer ce vecteur dans la base $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. En déduire les coordonnées X et Y , dites opérationnelles, de B dans le repère R_0 . Vérifier l'homogénéité du résultat.

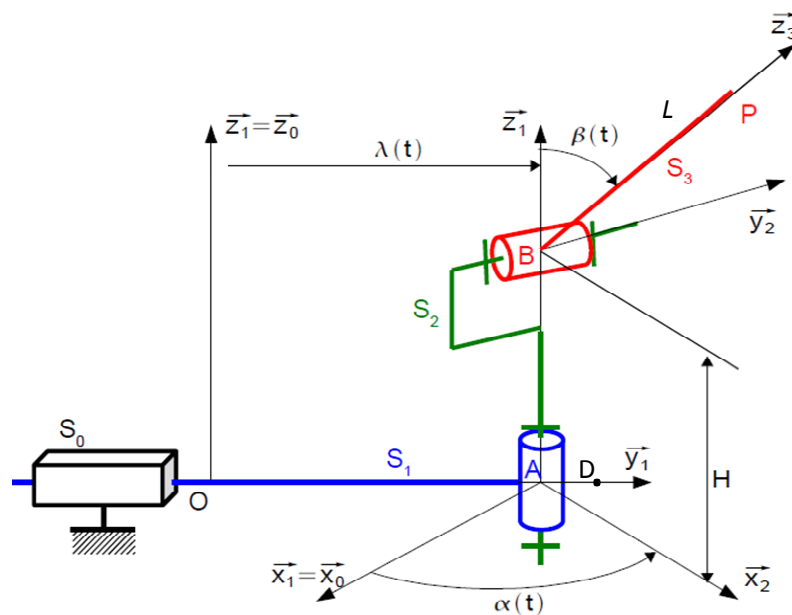


Exercice 1.3 : ROBOT DE PEINTURE

On étudie un robot de peinture de carrosserie de voiture.

La modélisation cinématique du robot comprend les ensembles :

- Bâti S_0 , repère lié $R_0(O_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$;
- Chariot S_1 , repère lié $R_1(A, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$;
- Corps S_2 , repère lié $R_2(A, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$;
- Bras S_3 , repère lié $R_2(B, \bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$.



Q1 : Repasser en couleur chaque ensemble du schéma cinématique puis représenter le modèle sous la forme d'un graphe des liaisons (avec liaisons, paramètres, repères liés « simplifiés »).

Q2 : Construire les figures planes de changement de base.

Q3 : Définir un vecteur position de P dans (0) .

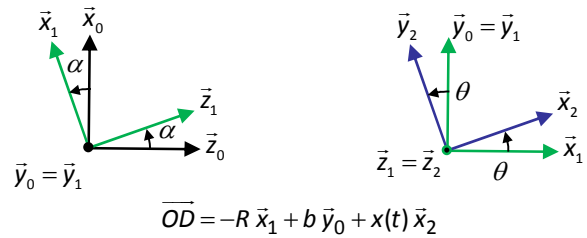
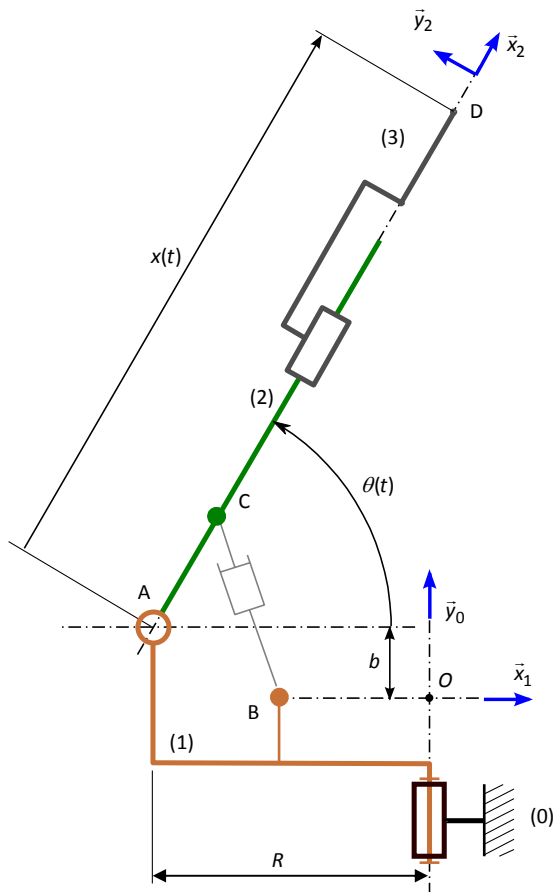
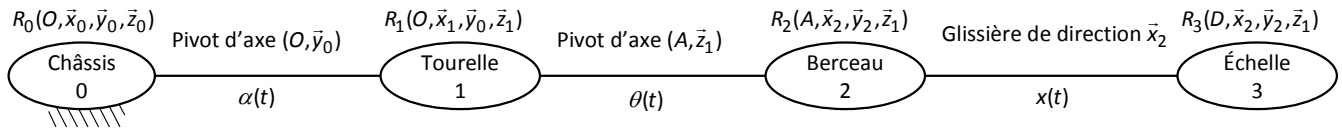
Q4 : Définir la trajectoire $T_{P/2}$.

Q5 : Dans quels ensembles, le point B est-il fixe ? Définir la trajectoire $T_{B/0}$.

TD 2 : CONTRAINDRE UNE TRAJECTOIRE

Exercice 2.1 : ÉCHELLE E.P.A.S.

On s'intéresse à l'Échelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle modélisée comme ci-dessous.



Objectif : contraindre la trajectoire de l'extrémité D de l'échelle.

On note X, Y et Z les coordonnées de l'extrémité D de l'échelle dans le repère lié au châssis : les distances sont mesurées par rapport au point O et aux directions du châssis.

On suppose X, Y, Z et θ strictement positifs.

Q1 : Par projection (produit scalaire) déterminer X, Y et Z en fonction des paramètres de position α, θ, x et des dimensions.

Q2 : La nacelle étant en position, déterminer les conditions entre les paramètres de position pour que la trajectoire de l'extrémité de la nacelle soit rectiligne verticale. Si nécessaire, on exprimera les paramètres en fonction de $\theta(t)$.

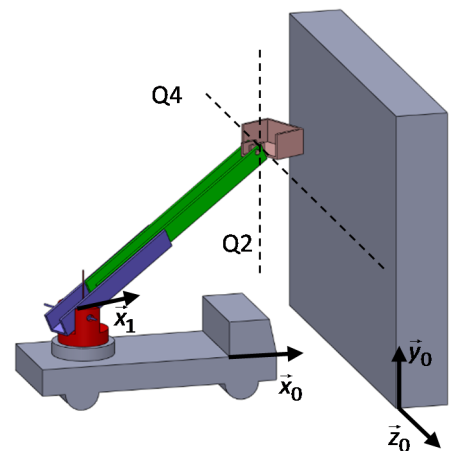
On pourra noter avec un indice 0, les valeurs initiales des coordonnées et des paramètres de position.

Le pilotage est réalisé par incrément de temps Δt suffisamment petit.

Q3 : Pour une variation d'élevation $\Delta\theta$, déterminer la variation de longueur de l'échelle Δx à imposer pour obtenir une trajectoire rectiligne verticale.

On pourra dériver l'expression précédente et faire les approximations

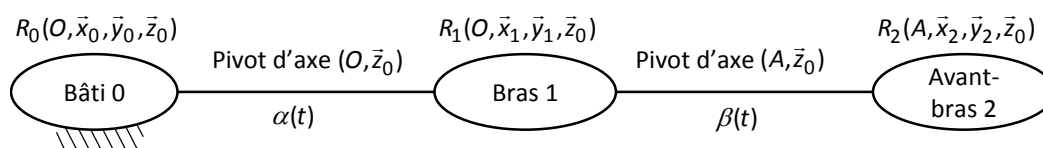
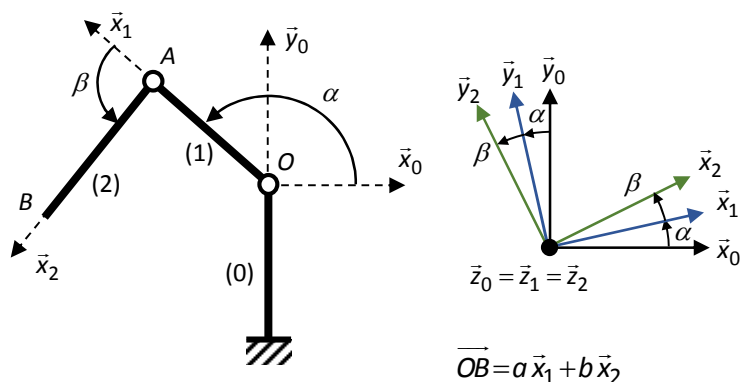
suivantes : $\dot{x} = \frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}$ et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \approx \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$.



Q4 : La nacelle étant en position, déterminer les conditions sur les paramètres de position pour que la trajectoire de l'extrémité de la nacelle soit rectiligne horizontale suivant \bar{z}_0 . Dans un but de résolution, on exprimera $\theta(t)$ en fonction de $\alpha(t)$, puis $x(t)$ en fonction de $\theta(t)$. On pourra, en résultat intermédiaire, exprimer $x \cos \theta$ et $x \sin \theta$.

Exercice 2.2 : ROBOT ERICC

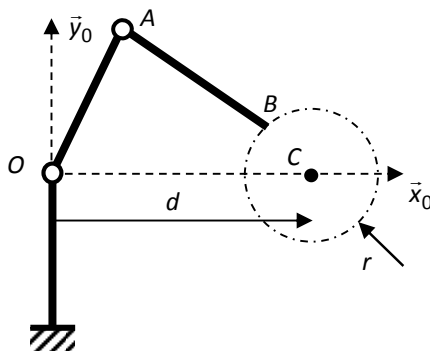
Considérons le robot dont le modèle est donné ci-après.



Afin d'assurer la sécurité de l'environnement, la commande impose que B ne doit pas être à une distance supérieure à R de l'origine O .

Q1 : Traduire cette contrainte sur les paramètres.

Q2 : Déterminer la condition pour que B soit sur un cercle de rayon r et de centre C tel que $\vec{OC} = d\vec{x}_0$. On suppose r et d suffisamment petits.



Exercice 2.3 : ROBOT DE MANUTENTION / TRANSLATION CIRCULAIRE

Le système étudié (voir photos ci-dessous) est un robot industriel destiné à la manutention de pièces lourdes. Ce robot a une structure en parallélogramme déformable qui lui permet de déplacer son poignet dans l'aire de travail.



On associe à chaque solide i une base orthonormée directe $\mathbf{B}_i(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z})$. \vec{y}_0 est vertical ascendant.

On pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$, $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ et $\overline{AB} = L \vec{x}_1$, $\overline{EA} = D \vec{x}_2$, $\overline{CB} = D \vec{x}_3$, $\overline{BJ} = H \vec{x}_3$, $\overline{EC} = L \vec{x}_4$.

Les mouvements du robot sont commandés par 2 moteurs :

- le solide (1) a son mouvement de rotation par rapport à (0) commandé par un moteur M_1 tel que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right]$
- le solide (2) a son mouvement de rotation par rapport à (0) commandé par un moteur M_2 tel que $\beta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$.



figure 1

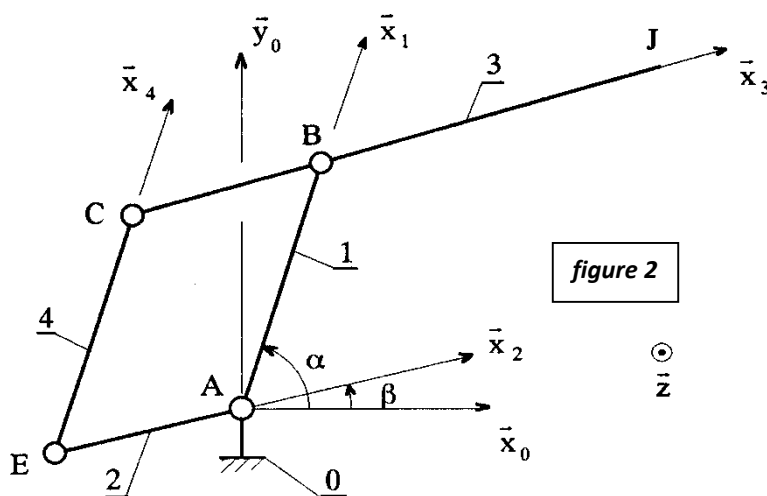


figure 2

- Q1 :** Mettre le schéma cinématique en couleur et identifier les points fixes des ensembles 0, 1, 2, 3 et 4.
- Q2 :** ABCE étant un parallélogramme, qu'en déduire sur les bases liées à 1, 2, 3 et 4. En déduire un repère lié « simplifié » pour le solide 3.
- Q3 :** Réaliser la ou les figures de changement de base.
- Q4 :** Lorsque le moteur M_1 est à l'arrêt, α est constant. Déterminer, dans ces conditions, le mouvement de 3/0 paramétré par β ainsi que les trajectoires $T_{J/0}$ et $T_{C/0}$.
- Q5 :** Lorsque le moteur M_2 est à l'arrêt, β est constant. Déterminer, dans ces conditions, le mouvement de 3/0 paramétré par α ainsi que les trajectoires $T_{J/0}$ et $T_{C/0}$.
- Q6 :** Déterminer un vecteur position de J dans (0).
- Q7 :** Déterminer les conditions sur α et β pour que le point J suive une trajectoire verticale à une distance d du point A .

TD 3 : CONTRAINDRE UNE VITESSE OU UNE ACCÉLÉRATION

Exercice 3.1 : CENTRIFUGEUSE

Les pilotes de chasse subissent lors de leurs missions des accélérations bien supérieures à celle subie du fait du seul champ de gravité terrestre. Un pilote en virage serré à grande vitesse ressentira jusqu'à 12 g (g : l'accélération de la pesanteur) contre 5 g pour un pilote de formule 1 (relevé dans le virage de l'Eau Rouge à Spa), et 1 g pour toute personne sur Terre au niveau de la mer.

Une personne normale s'évanouie entre 4 et 6 g.

Avec l'augmentation de l'accélération, les premiers effets ressentis sont visuels : perte de la vision des couleurs, suivie par la vision en tunnel (vision périphérique perdue), puis la perte complète de la vision tandis que la conscience demeure. Pour de plus grandes accélérations, la perte de conscience subite est due à un manque d'oxygénation du cerveau lorsque les effets d'inertie empêchent le sang de l'irriguer.

Afin de familiariser et de tester les pilotes à ces effets, les centres d'entraînement ont mis au point des systèmes expérimentaux au sol capables de les soumettre à de telles accélérations : les centrifugeuses.

La centrifugeuse étudiée est principalement constituée d'un bras d'entraînement (1) et d'une cabine (2) pour accueillir la personne subissant le test.

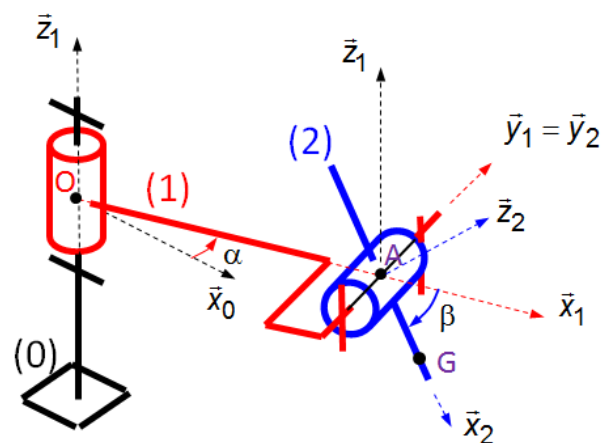
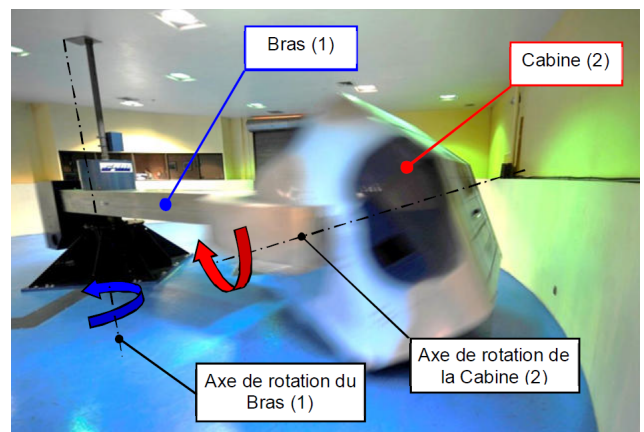
La position angulaire de la cabine (2) est asservie par rapport au bras (1) afin d'imposer à la personne subissant le test quatre positions principales : tête « en haut », tête « en bas », accélération de face ou de dos.

On donne le schéma cinématique ci-contre du modèle de cette centrifugeuse.

La direction $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ est verticale ascendante. On note G le centre de gravité de la cabine (2).

$$\vec{OA} = a \vec{x}_1 \quad \text{avec } a = 3\text{m}$$

$$\vec{AG} = b \vec{x}_2 \quad \text{avec } b = 1\text{m}$$



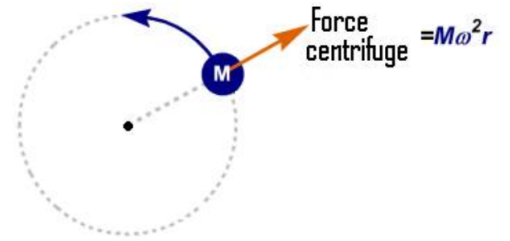
Q1 : Réaliser les figures d'analyses (représentation du modèle en graphe, figures planes de changement de base, définition des vecteurs vitesse angulaire).

Q2 : Déterminer les produits vectoriels suivants : $\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_0$, $\vec{x}_0 \wedge \vec{y}_2$, $\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_0$, $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_0$, $\vec{x}_2 \wedge \vec{z}_0$, $\vec{x}_0 \wedge \vec{x}_2$ et $\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_2$.

Q3 : Déterminer $\vec{V}_{G/0}$. Vérifier l'homogénéité.

Q4 : Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}_{G/0}$ dans le cas où β est constant.

L'expression force centrifuge, ou accélération centrifuge, est une force apparente qui s'explique par un effet de déportation d'un corps en rotation vers l'extérieur de la courbe. C'est ce même effet qui donne la sensation d'éjection latérale à un pilote dans une courbe.



Cette force s'écrit $\overline{F_{centrifuge}} = -M\overline{a_{G/0}}$ lorsque la vitesse angulaire est constante.

Dans notre cas, on bloque la cabine (2) dans sa position verticale par rapport au bras (1) ($\beta = 90^\circ$). La vitesse angulaire du bras (1) par rapport au socle (0) est constante.

Q5 : Calculer la vitesse angulaire en tour par minute du bras (1) pour une accélération équivalente à 9 g.

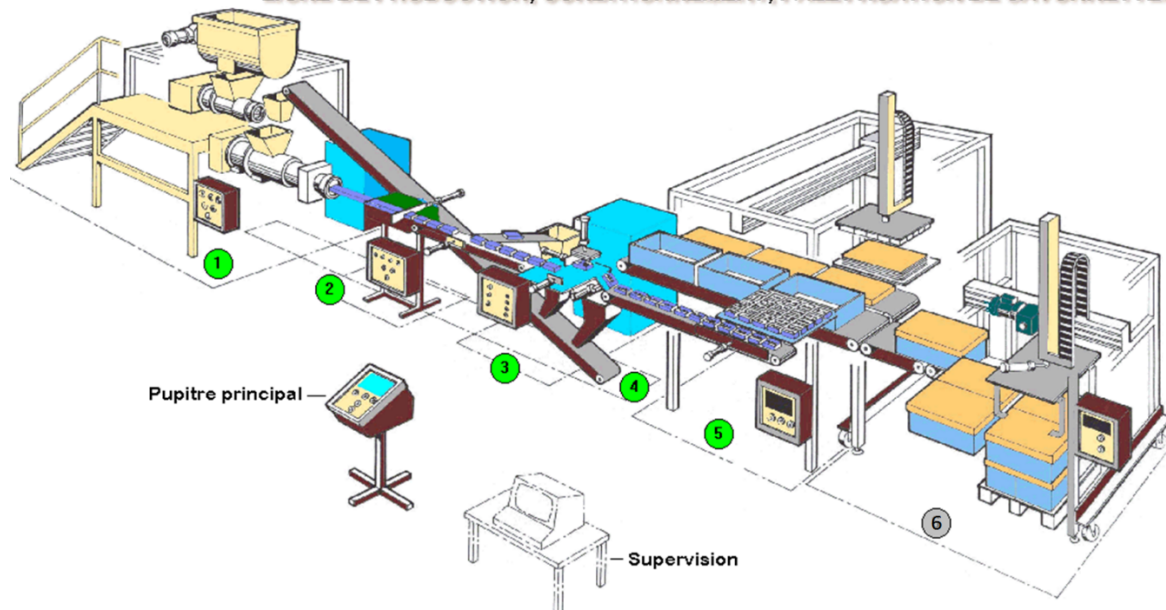
Exercice 3.2 : UNITÉ DE DÉCOUPE DE SAVONS

Le système étudié est un sous-ensemble d'une ligne de production de savon (zone 2 sur la figure ci-dessous).

Dans le processus de fabrication considéré :

1. les ingrédients sont mélangés, agglomérés puis dirigés vers une empreinte rectangulaire (unité d'extrusion). Il en résulte la réalisation d'un « boudin de savon » qui avance en continu sur un convoyeur ;
2. **ce boudin de savon est coupé, à la volée, afin d'obtenir des morceaux de savon à la taille souhaitée (objet de notre étude) ;**
3. les morceaux de savon sont façonnés par une presse afin d'obtenir leur forme finale (avec logo de la marque) ;
4. certains morceaux sont recyclés s'ils ne font pas le poids désiré ;
5. les savons corrects sont conditionnés (emballer en vue de leur présentation commerciale) ;
6. enfin ils sont palettisés.

LIGNE DE PRODUCTION, CONDITIONNEMENT, PALETTISATION DE SAVONNETTES



La partie de la ligne de production, qui découpe le savon pour en faire des parallélépipèdes rectangles, est étudiée dans cet exercice (voir schémas cinématiques page suivante). L'objectif de cette partie est de coordonner les mouvements de la lame 4 et du savon afin d'assurer une coupe droite.

Le mode opératoire de découpe des boudins de savon est le suivant :

- au départ, la **lame de coupe** 4 est en dehors du boudin de savon (la pièce 4 est complètement sortie) et les bras 1 et 2 sont verticaux, de direction \vec{z}_0 ;
- le vérin de coupe, non représenté sur le schéma cinématique plan, est alimenté en air comprimé ce qui provoque la descente de la lame 4 par rapport à 3 et son engagement dans le boudin de savon (paramètre $\mu(t)$) ;
- dès le début de cet engagement, la lame 4 est entraînée horizontalement par le boudin, ce qui provoque la déformation du quadrilatère ABCD (paramètre $\alpha(t)$) ;
- lorsque la lame 4 a traversé le boudin de savon, le vérin de coupe est alimenté pour provoquer la remontée de sa tige et donc de la lame 4 ;
- lorsque la lame 4 est en dehors de la matière, un vérin rotatif placé au niveau de l'articulation en A entre 0 et 1 est alimenté pour ramener l'ensemble dans sa position de départ.

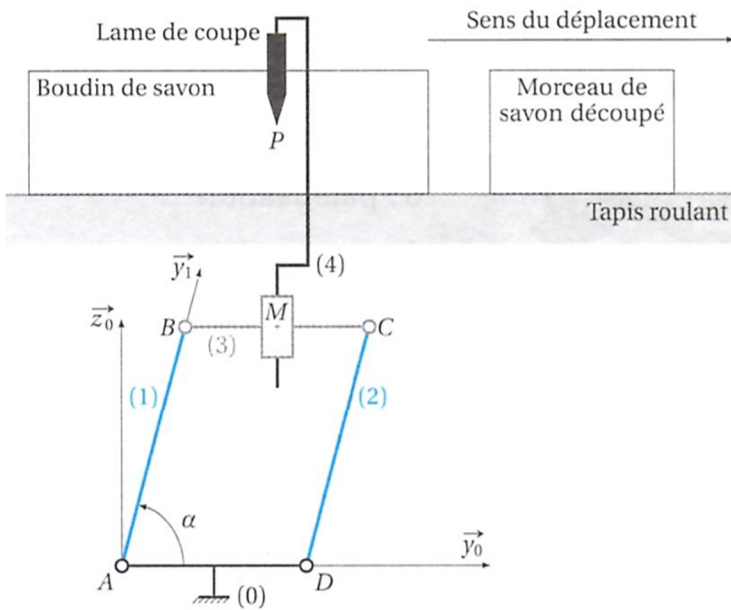


Schéma cinématique plan

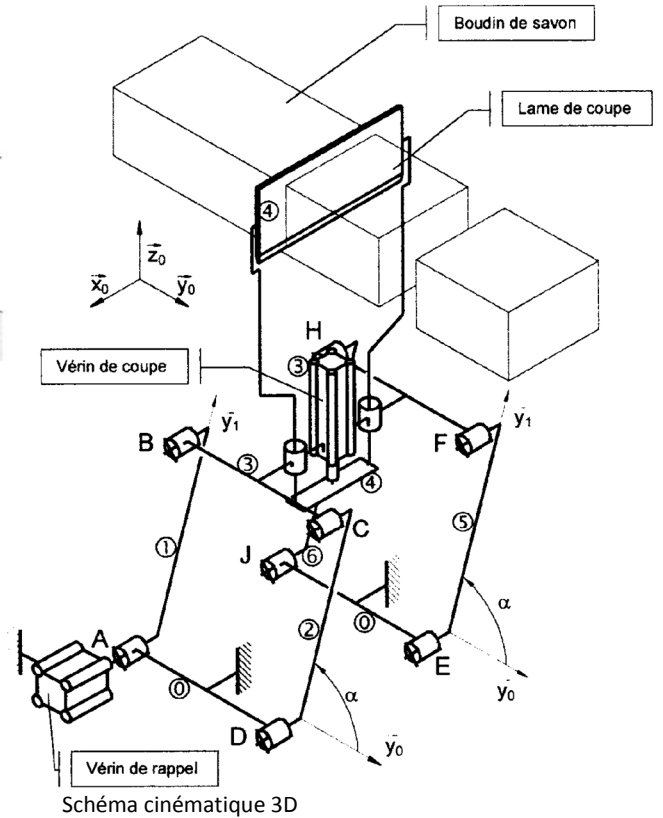


Schéma cinématique 3D

$$\overline{AB} = \overline{DC} = L \vec{y}_1 \quad \overline{BM} = b \vec{y}_0 \quad \overline{MP} = \mu(t) \vec{z}_0 \quad (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \alpha(t)$$

On considère uniquement le **modèle cinématique « plan »**. \vec{x}_0 est un vecteur commun à toute les bases.

Q1 : Préciser le mouvement de 3/0.

Q2 : Déterminer l'expression littérale de $\vec{v}_{P/0}$. Vérifier l'homogénéité du résultat ($m \cdot s^{-1}$).

Le boudin de savon se déplace, sur un convoyeur, en translation de direction \vec{y}_0 par rapport au bâti 0 avec une vitesse V_s , $V_s > 0$. Lorsque la lame 4 s'engage dans le savon, elle est immédiatement entraînée par le boudin.

Q3 : Sous quelle condition la coupe du savon sera droite ? Exprimer la condition sur la vitesse de $P/0$ et en déduire une condition sur α .

Q4 : Déterminer $\alpha(t)$, sachant qu'à l'instant initial $t=0$ où la lame 4 entre en contact avec le savon, $\alpha(0) = 90^\circ$.

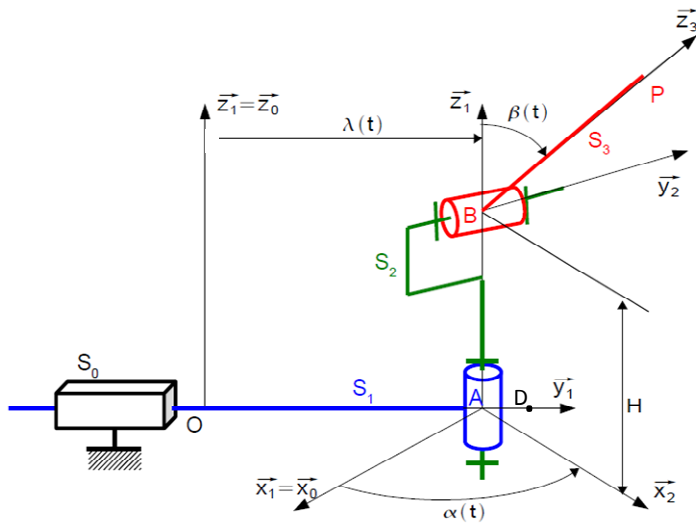
Exercice 3.3 : ROBOT DE PEINTURE

On étudie un robot de peinture de carrosserie de voiture.

L'objectif est de déterminer une loi de pilotage permettant au pistolet à peinture de balayer horizontalement la carrosserie tout en vérifiant le critère de déplacement relatif. Dans le modèle proposé, le point P correspond à la position du pistolet.

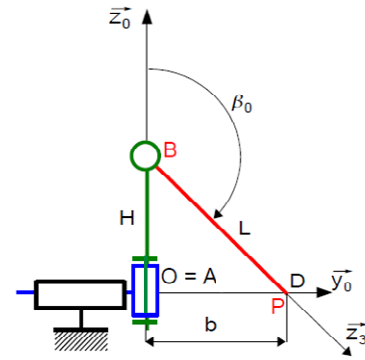


Exigences techniques	Critère	Niveau
1.7	Vitesse de déplacement relatif	Vitesse constante



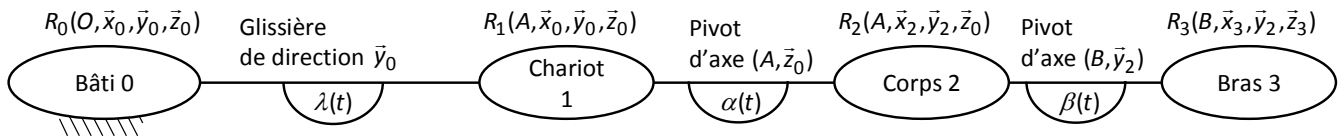
Shéma cinématique du robot

Modèle (a) en configuration générale

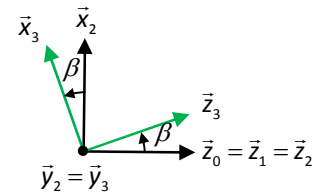
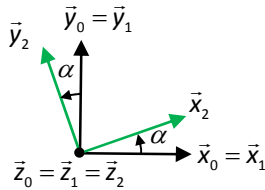


Position médiane (P est en D)
(et A en O)

(b) en position médiane ($\alpha = \pi / 2$)



$$\vec{OP} = \lambda(t) \vec{y}_0 + H \vec{z}_0 + L \vec{z}_3$$



Q1 : Exprimer les vecteurs vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{1/0}$, $\vec{\Omega}_{2/1}$ et $\vec{\Omega}_{3/2}$. En déduire $\vec{\Omega}_{2/0}$ et $\vec{\Omega}_{3/0}$.

Q2 : Déterminer $\vec{V}_{P/0}$.

Q3 : Exprimer la relation vectorielle associée à la condition « P se déplace à une vitesse V suivant \vec{x}_0 ». Par projection sur \vec{z}_0 , en déduire $\dot{\beta}$.

Q4 : Projeter la contrainte vectorielle de la question précédente sur \vec{x}_0 et \vec{y}_0 pour obtenir les 2 autres contraintes scalaires.

Q5 : Exprimer alors $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de L, V, α et β_0 .

En notant que $\sin(\pi - \beta_0) = \sin(\beta_0) = \frac{b}{L}$, les expressions déterminées permettent d'obtenir les deux équations : $\dot{\lambda} = \frac{V}{\tan \alpha}$ et

$$\dot{\alpha} = -\frac{V}{b \sin \alpha}.$$

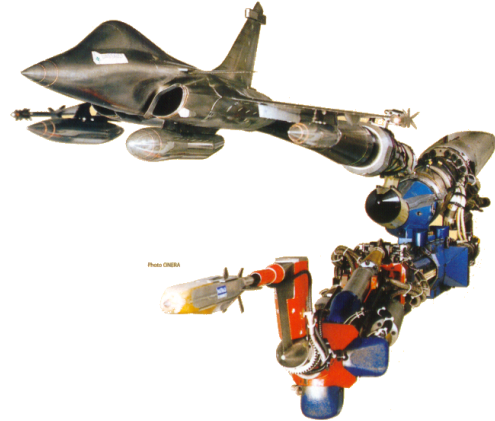
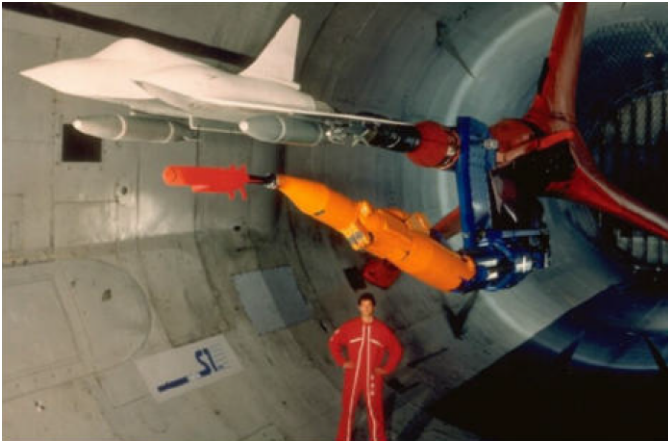
Elles s'intègrent facilement numériquement pour obtenir les lois de pilotage du robot.

TD 4 : IMPOSER UN MOUVEMENT – TORSEUR CINÉMATIQUE

Exercice 4.1 : MAQUETTE EN SOUFFLERIE

Lors du largage d'un missile par un avion porteur, la trajectoire réelle de celui-ci s'écarte parfois considérablement de la trajectoire souhaitée. Du fait des phénomènes fortement non-linéaires qui caractérisent les écoulements aérodynamiques, il se peut que le missile largué soit pris dans les turbulences engendrées par l'avion et revienne percuter celui-ci.

Pour étudier ces phénomènes, l'O.N.E.R.A. (Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales) a réalisé un **système de trajectographie captive**. Celui-ci consiste en une maquette d'avion à l'échelle 1/6, larguant une maquette du missile. L'ensemble est porté par un bras articulé, doté de nombreux degrés de liberté et pouvant reproduire tous les mouvements tridimensionnels des objets portés (cf. photos ci-dessous).

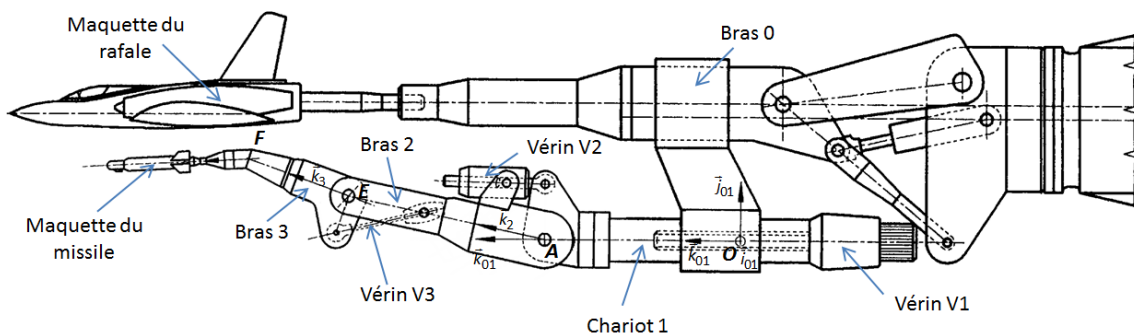


Photos 1 et 2 : Installation de trajectographie captive. Essai de largage d'un missile Exocet AM39 sous maquette de Rafale dans la grande soufflerie S2MA de l'ONERA à Modane.

Les efforts extérieurs que subissent l'avion et le missile sont le poids et les efforts d'origine aérodynamique. Les phénomènes de mécanique des fluides obéissent à des similitudes : à partir des grandeurs physiques observées à une certaine échelle, on peut déduire la valeur de ces mêmes grandeurs à une autre échelle. Le respect des règles de similitude conduit à une échelle de maquette proche de l'avion réel expliquant l'importance des moyens matériels en jeu : la partie centrale de la soufflerie a huit mètres de diamètre sur une longueur de quatorze mètres.

La fonction du système de trajectographie est d'observer une trajectoire représentative de la trajectoire réelle du missile largué par rapport à l'avion en vol.

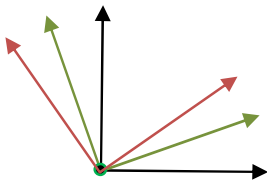
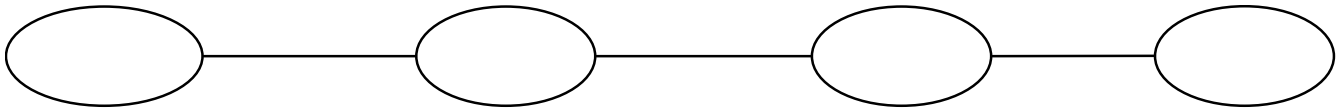
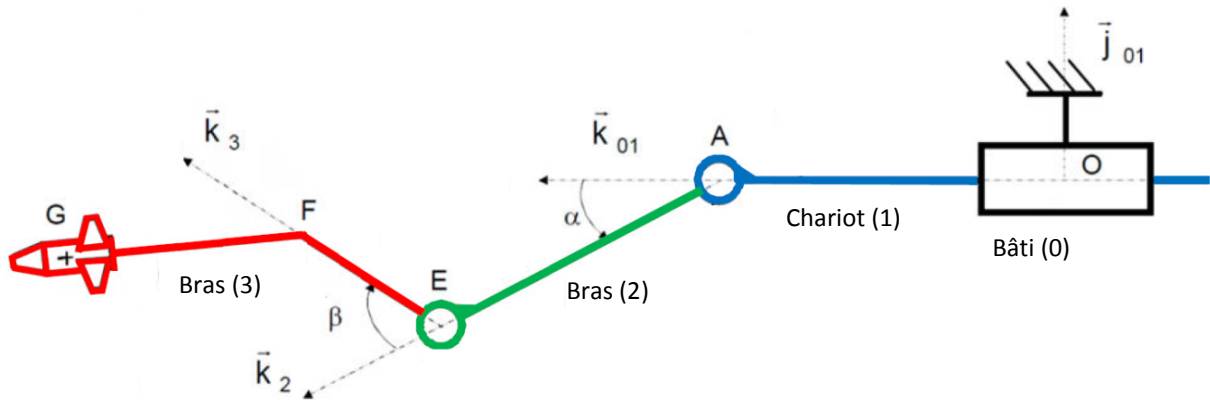
Le système sert de moyen de mesure, mais également de commande. L'avion et le missile sont placés par les bras en positions initiales. Les efforts aérodynamiques sur le missile sont mesurés et, par application des lois de Newton, le contrôleur détermine la position du missile après un incrément de temps. On commande alors le déplacement jusqu'à cette nouvelle position et on itère.



Dans l'étude suivante, on s'intéressera au système automatisé de déplacement du missile par rapport à l'avion.

Objectif : Déterminer les relations entre les paramètres cinématiques (position et vitesse) permettant d'imposer un mouvement à la maquette du missile par rapport à la maquette de l'avion.

Un schéma cinématique est donné ci-dessous. Les vérins qui contrôlent les mouvements entre les différents bras et le chariot ne sont pas modélisés. Les bases utilisent les **vecteurs unitaires** $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ (i_0 commun à toutes les bases).



$$\begin{aligned} \vec{OA} &= \lambda(t) \vec{k}_{01} \\ \vec{AE} &= l_2 \vec{k}_2 \quad \text{avec } l_2 = 1,38 \text{ m} \\ \vec{EF} &= l_3 \vec{k}_3 \quad \text{avec } l_3 = 72 \text{ cm} \end{aligned}$$

Q1 : Compléter le graphe des liaisons (repères liés, liaisons, paramètres de position) et la figure de changement de base (vecteurs et vecteurs vitesse angulaire) et mettre en couleur le schéma cinématique.

Applications : déterminer des torseurs cinématiques

Rappel : les étapes sont

- 1) Identifier le mouvement étudié : rotation, translation à trajectoire rectiligne ou circulaire, combiné.
- 2) déterminer le vecteur vitesse angulaire ;
- 3) choisir un point fixe dans l'ensemble en mouvement relatif ;
- 4) calculer son vecteur vitesse, vérifier l'homogénéité ;
- 5) écrire le torseur.

Q2 : Écrire les torseurs cinématiques $\{V_{1/0}\}$, $\{V_{2/1}\}$ et $\{V_{3/2}\}$.

Q3 : Écrire le torseur cinématique $\{V_{2/0}\}$.

Torseur cinématique de l'ensemble à contrôler

Q4 : Déterminer le torseur cinématique du missile par rapport au bâti $\{V_{3/0}\}$.

1^{er} mouvement de chute

Dans le repère R_0 de l'avion, le mouvement de largage le plus simple est une chute du missile, celui-ci restant parallèle à l'avion et sous celui-ci. La vitesse d'éloignement du missile à l'avion est notée V , négative. **Les questions suivantes font référence à cette configuration.**

- Q5 :** Quel est le mouvement du missile 3 par rapport à 0. En déduire $\{V_{3/0}\}_{imposé}$ pour ce mouvement.
- Q6 :** Déterminer les 2 relations vectorielles reliant les paramètres de position et leurs dérivées avec les paramètres du mouvement imposé.
- Q7 :** En déduire 3 relations scalaires non triviales entre les paramètres de position, leurs dérivées et les paramètres du mouvement imposé.
- Q8 :** Intégrer ces résultats afin d'obtenir un système de 3 équations sur les paramètres de position. On notera A , B et C les constantes d'intégration.

2nd mouvement de chute

Un autre mouvement de chute est défini par le torseur $\{V_{3/0}\}_{imposé} = \begin{cases} \omega_{imp} \vec{i}_0 \\ V \vec{j}_{01} \end{cases}$ avec V une constante négative et ω_{imp} une constante positive.

- Q9 :** Exprimer $\{V_{3/0}\}$ en F en utilisant la relation de Varignon.
- Q10 :** Déterminer 3 relations scalaires non triviales entre les paramètres de position, leurs dérivées et les paramètres du 2nd mouvement imposé.

Question complémentaire : réutiliser un résultat

- Q11 :** Déterminer successivement les torseurs cinématiques $\{V_{1/0}\}$, $\{V_{2/0}\}$ et $\{V_{3/0}\}$, exprimés respectivement en A , A et E en utilisant, à chaque fois, le torseur déterminé précédemment.

Exercice 4.2 : ROBOT SOUDEUR

On s'intéresse à un robot soudeur « 4 axes » dont le schéma cinématique, pour cette étude, est proposé sur **la figure 1**.

Sur ce schéma, les « flèches » sur les vecteurs unitaires ne sont pas représentées.

Le robot est supposé constitué de quatre ensembles articulés entre eux. Chaque « axe » possède son propre actionneur, le mouvement qui lui est associé peut donc être réalisé indépendamment des autres.

Les repères liés à chaque ensemble ainsi que le paramétrage associé sont définis ainsi :

- **Base S0**, fixée au sol de l'atelier, de repère lié $R_0(O_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$;
- **Fût S1**, en liaison pivot avec S0. Le mouvement est assuré par un moteur M1 non représenté. Repère lié $R_1(O_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ tel que $\overline{O_0O_1} = L_0 \bar{z}_0$ et $\theta_1 = (\bar{x}_0, \bar{x}_1) = (\bar{y}_0, \bar{y}_1)$;
- **Bras S2**, en pivot avec S1. Le mouvement est assuré par un moteur M2 non représenté. Repère lié $R_2(O_2, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ tel que $\overline{O_1O_2} = L_1 \bar{y}_1$ et $\theta_2 = (\bar{y}_1, \bar{y}_2) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$;
- **Avant-bras S3**, en pivot avec S2. Le mouvement est assuré par un moteur M3 non représenté. Repère lié $R_3(O_3, \bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$ tel que $\overline{O_2O_3} = L_2 \bar{y}_2$ et $\theta_3 = (\bar{y}_2, \bar{y}_3) = (\bar{z}_2, \bar{z}_3)$;
- **Organe terminal S4**, en glissière avec l'avant-bras S3. Le mouvement de translation est assuré par un vérin linéaire V4 non représenté. Repère lié $R_4(O_4, \bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)$ tel que $\overline{O_3O_4} = \lambda \bar{z}_3$.

Les mouvements du robot sont étudiés dans le repère $R_0(O_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ lié à la base et supposé galiléen.

\bar{z}_0 est vertical ascendant.

Objectif : déterminer lois de pilotage des « axes » lors de la réalisation d'un cordon de soudure.

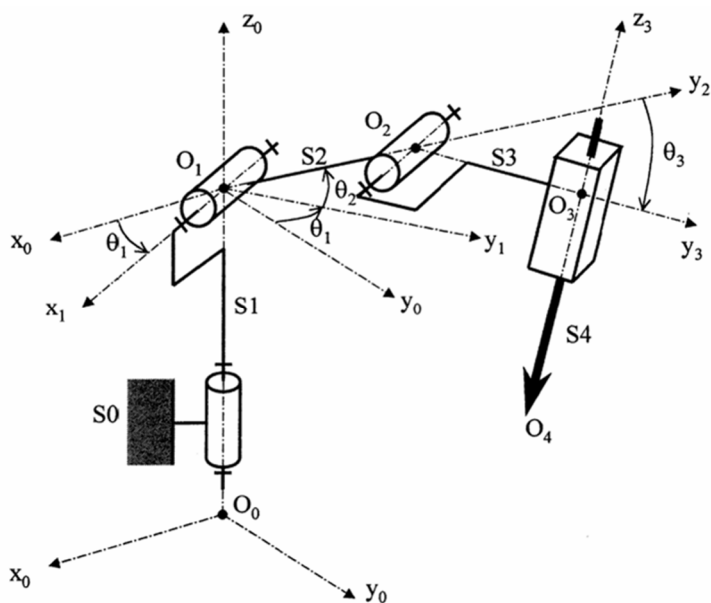


figure 1 : schéma cinématique



Q1 : Mettre en couleur le schéma et réaliser le graphe des liaisons (repères liés, liaisons, paramètres de position, figures de changement de base, vecteurs vitesse angulaire).

Applications : déterminer des torseurs cinématiques

Q2 : Écrire les torseurs cinématiques $\{V_{1/0}\}$, $\{V_{2/1}\}$, $\{V_{3/2}\}$ et $\{V_{4/3}\}$.

Q3 : Écrire le torseur cinématique $\{V_{2/0}\}$.

Détermination des lois de pilotage

- Q4 :** Déterminer le torseur cinématique de 3/0 en fonction des paramètres de position et de leurs dérivées.
- Q5 :** En admettant la relation de composition des vitesses $\vec{V}_{O_2 \in 4/0} = \vec{V}_{O_2 \in 4/3} + \vec{V}_{O_2 \in 3/0}$, exprimer le torseur cinématique de 4/0 en O_2 à partir des résultats précédents.

On souhaite réaliser un cordon de soudure rectiligne de direction \vec{y}_0 à vitesse constante telle que $\vec{V}_{O_4/0} = V \vec{y}_0$ avec $V = C^{ste}$. Cette condition impose $\theta_1 = 0$ (Moteur M1 bloqué).

D'autre part, pour que le cordon de soudure soit correctement réalisé, l'orientation de l'organe terminal doit être constante. Le mouvement de 4/0 doit être une translation.

- Q6 :** Définir le torseur $\{V_{4/0}\}_S$ du mouvement imposé.
- Q7 :** En tenant compte de la condition $\theta_1 = 0$, déterminer les relations vectorielles, puis scalaires (non triviales), que doivent vérifier les paramètres de mouvement et leurs dérivées.

Questions complémentaires

Réutiliser des résultats

- Q8 :** Déterminer les torseurs cinématiques $\{V_{1/0}\}$, $\{V_{2/0}\}$ et $\{V_{3/0}\}$ des différents solides par rapport au bâti (0), en commençant par $\{V_{1/0}\}$ exprimé en O_1 et en utilisant les résultats précédents à chaque fois.
- Q9 :** ** Sachant que $\vec{V}_{O_2 \in 4/0} = \dot{\lambda} \vec{z}_3 - L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + L_1 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2$, déterminer $\vec{V}_{O_4 \in 4/0}$.

Calculer un vecteur vitesse

- Q10 :** ** Sans utiliser les résultats précédents, déterminer directement $\vec{V}_{O_4 \in 4/0}$.

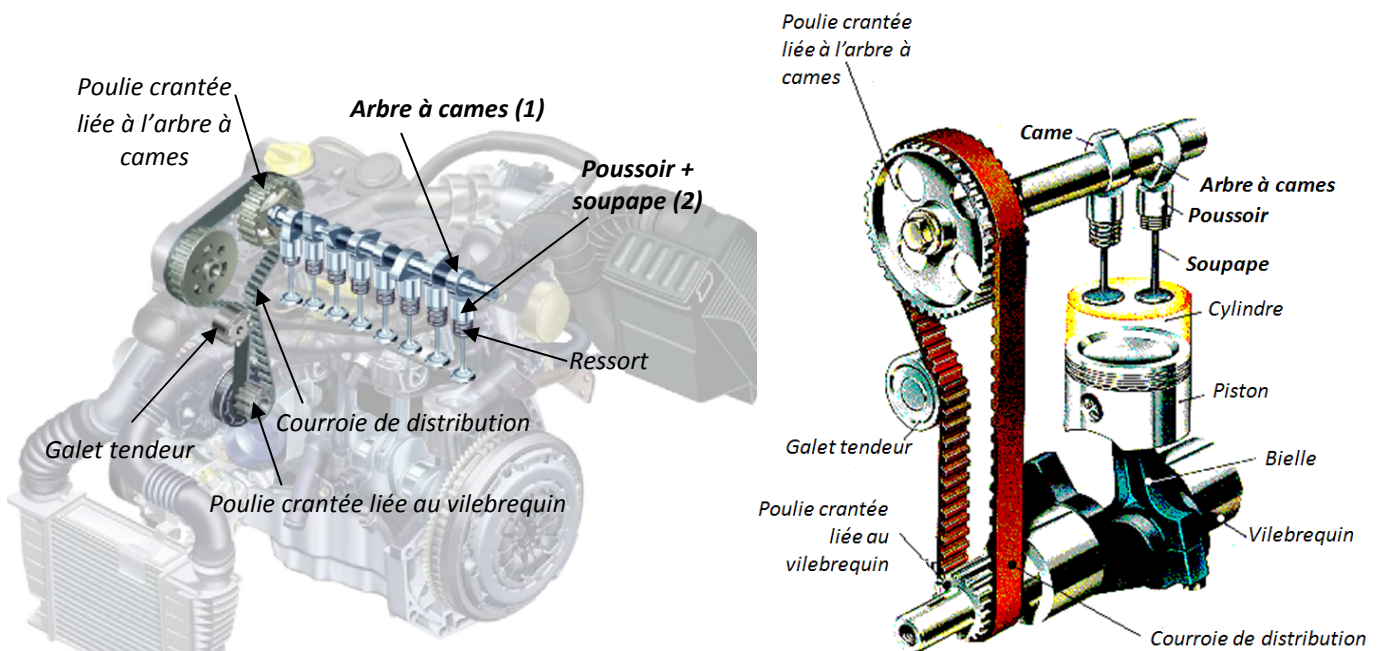
** Questions plus calculatoires, intéressantes pour s'entraîner.

TD 5 : CINÉMATIQUE DU CONTACT PONCTUEL

Exercice 5.1 : SYSTÈME DE DISTRIBUTION D'UN MOTEUR 4 TEMPS

Le système de distribution automobile permet l'admission du mélange (air + carburant) et le refoulement des gaz d'échappement lors du cycle 4 temps d'un moteur thermique.

Le vilebrequin (arbre moteur) entraîne en rotation l'arbre à cames par l'intermédiaire d'une transmission poulie/courroie crantée (courroie de distribution). Le mouvement de rotation continue de l'arbre à cames 1 est ensuite transformé en un mouvement de translation alternative de l'ensemble poussoir+soupape 2.



On s'intéresse dans la suite, au comportement cinématique de ce dispositif de transformation de mouvement par came. Pour simplifier l'étude, on l'assimilera à un dispositif de transformation de mouvement par excentrique (came ronde excentrée).

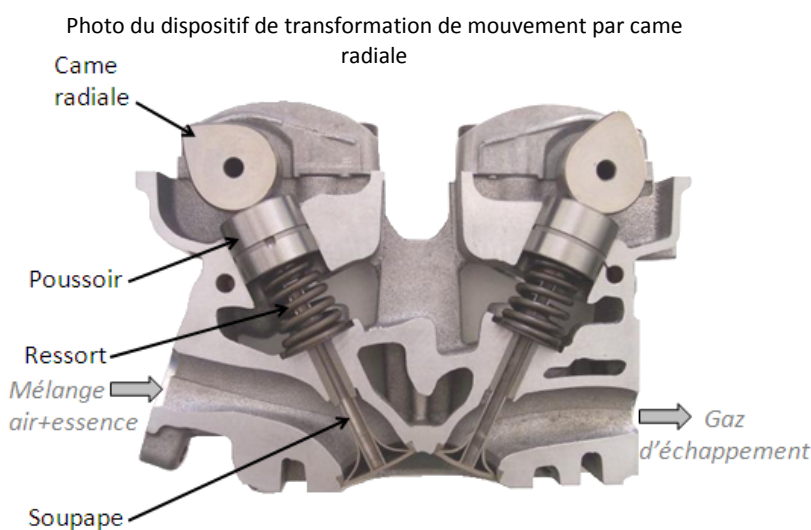
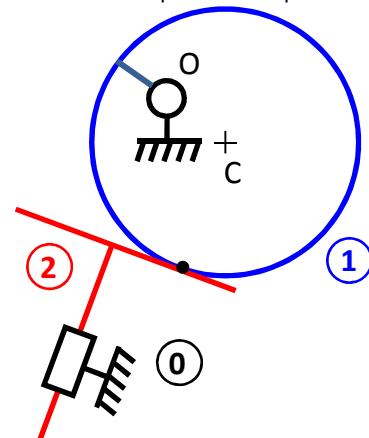
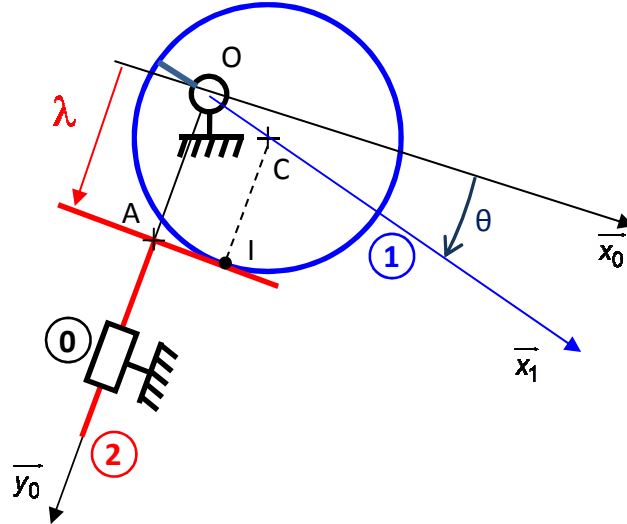


Schéma cinématique du dispositif de transformation de mouvement par excentrique



Constituants et paramétrage :

- le carter **0**, de repère associé $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, est considéré comme fixe
- l'arbre à came **1**, de repère associé $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, est en mouvement de rotation d'axe (O, \vec{z}_0) par rapport au carter **0** tel que $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta(t)$. La came, représentée par un disque de rayon R et de centre C tel que $\vec{OC} = e \cdot \vec{x}_1$, est en contact ponctuel en I avec l'ensemble poussoir+soupape **2**
- l'ensemble poussoir+soupape **2** $R_2(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est en mouvement de translation à trajectoire rectiligne de direction \vec{y}_0 par rapport au carter **0** tel que $\vec{OA} = \lambda(t) \vec{y}_0$.



Objectif : déterminer le vecteur vitesse de glissement au contact came/poussoir afin d'évaluer, par la suite, les actions mécaniques au niveau de ce contact.

On donne $\|\vec{\Omega}_{1/0}\| = 1500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$, $e = 14 \text{ mm}$ et $R = 25 \text{ mm}$.

Étude cinématique graphique

- Q1 :** Définir le vecteur vitesse de glissement de ce système, la normale au contact et le plan tangent commun. Écrire la relation de composition des vecteurs vitesses au point de contact I.
- Q2 :** Déterminer le « rayon » $\|\vec{OI}\|$ en fonction de e , θ et R . En déduire $\|\vec{V}_{I \in 1/0}\|$. Faire l'application numérique pour la position du schéma cinématique ($\theta = 20^\circ$) puis dessiner ce vecteur vitesse (échelle des vitesses $1 \text{ cm} \leftrightarrow 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$)
- Q3 :** Déterminer graphiquement, dans la position du système décrite sur le schéma cinématique ($\theta = 20^\circ$), le vecteur vitesse de glissement (échelle des vitesses $1 \text{ cm} \leftrightarrow 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Étude cinématique analytique

- Q4 :** Déterminer analytiquement le vecteur vitesse de glissement et le projeter dans la base locale au contact.
- Q5 :** Exprimer la condition de non pénétration et en déduire une relation entre $\dot{\lambda}$ et $\dot{\theta}$.
- Q6 :** En déduire une expression du vecteur glissement en fonction de $\dot{\theta}$ et des paramètres de position. Faire l'application numérique et comparer ce résultat avec celui obtenu graphiquement.

Question complémentaire : étude géométrique

- Q7 :** Déterminer les trajectoires $T_{I/1}$, $T_{I/2}$ et $T_{I/0}$ à partir du vecteur position dans le repère de référence.

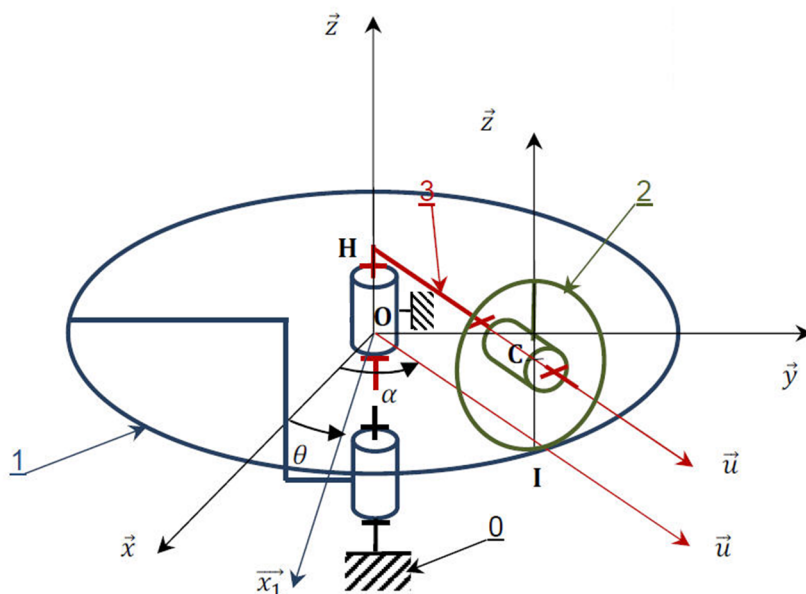
Exercice 5.2 : BANC DE TESTS DE PNEUMATIQUES

Un **banc de tests d'usure de pneumatiques** est représenté ci-contre.

Un ensemble pneu + jante **2**, entraîné en rotation par rapport au bras **3** à l'aide d'un moto-réducteur, roule sur un plateau tournant **1**.

Le bras **3** et le plateau tournant **1** sont entraînés en rotation par rapport aux bâti **0** à l'aide de deux autres moto-réducteurs.

Le système est représenté sous la forme du schéma cinématique ci-dessous :



Constituants et paramétrage :

- le bâti **0**, de repère associé $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, est considéré comme fixe
- le plateau tournant **1** est en mouvement de rotation d'axe (O, \vec{z}) par rapport au bâti **0** tel que et $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1)$
- le bras **3** est en mouvement de rotation d'axe $(O, \vec{z}) = (H, \vec{z})$ par rapport au bâti **0** tel que $\alpha = (\vec{x}, \vec{u}) = (\vec{x}, \vec{v})$
- l'ensemble pneu + jante **2** est en mouvement de rotation d'axe (C, \vec{u}) par rapport au bras **3** tel que $\beta = (\vec{z}, \vec{z}_2)$. On pose $\overline{HC} = d \vec{u}$ ($d = \text{constante}$). Le pneu, de rayon r , est en contact au point I avec le plateau **1**.

Objectif : déterminer la relation entre les vitesses de rotation des 3 actionneurs permettant de reproduire des conditions de roulement sans glissement d'un pneumatique sur une route.

- Q1 :** Réaliser les figures de changement de base en indiquant sous chacune d'entre elles le vecteur vitesse angulaire correspondant.
- Q2 :** Déterminer le vecteur vitesse de glissement au point de contact I .
- Q3 :** En déduire la relation entre $\dot{\theta}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et les dimensions du système.

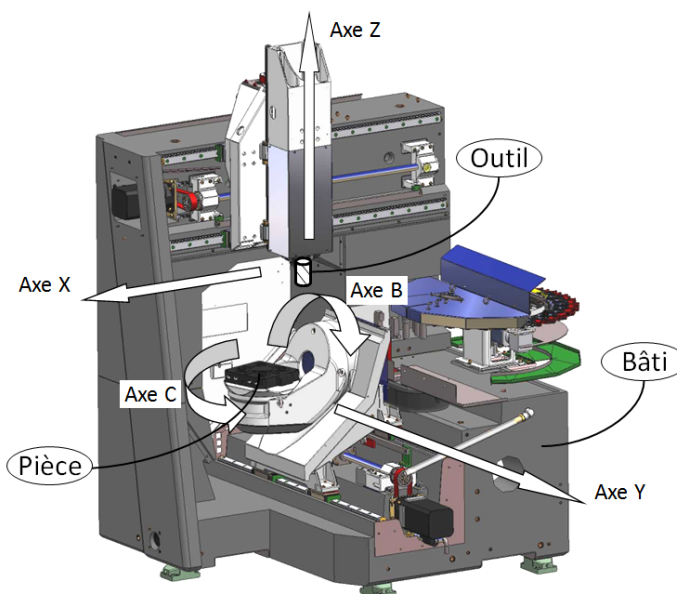
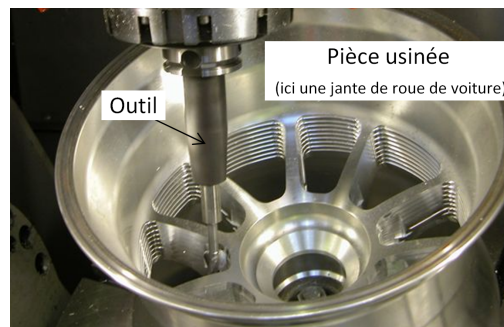
EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

2.1 CENTRE D'USINAGE 5 AXES

L'usinage est une opération de **transformation d'un produit par enlèvement de matière**. Cette opération est à la base de la fabrication de pièces dans les industries mécaniques. La génération d'une surface par enlèvement de matière est obtenue grâce à un outil muni d'au moins une arête coupante. Les différentes formes de pièces sont obtenues par des translations et des rotations de l'outil par rapport à la pièce.

(voir photo ci-contre de l'usinage d'une jante de roue de voiture)

On appelle le moyen de production associé à une opération d'usinage une machine-outil ou un centre d'usinage (voir photo ci-dessous de la machine HSM 600U de la société Mikron).



La machine étudiée possède 3 translations (X, Y et Z) et deux rotations (B et C). Une telle machine est appelée machine 5 axes (un axe est un ensemble qui gère un des mouvements élémentaires, translation ou rotation).

Sur cette machine, 2 axes sont utilisés pour mettre en mouvement l'outil par rapport au bâti (ce sont les translations X et Z) et 3 axes sont utilisés pour mettre en mouvement la pièce par rapport au bâti (ce sont la translation Y et les deux rotations B et C).

Le schéma cinématique de la machine d'usinage est donné ci-après.

Objectif : on se propose de déterminer les relations entre les valeurs instantanées des paramètres de mouvement qui traduisent le fait qu'il y a contact permanent entre l'outil et la surface de la pièce lors de l'opération d'usinage.

- Q1 :** Sur le schéma cinématique, repasser chaque solide d'une couleur différente.
- Q2 :** Réaliser le graphe des liaisons pour la chaîne ouverte 0-1-2-3. Lorsqu'il est défini, préciser le paramètre de mouvement associé à chaque liaison.
- Q3 :** Indiquer les égalités de bases ou de vecteurs.
- Q4 :** Réaliser les figures de changement de base.
- Q5 :** Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{O_0M}$.

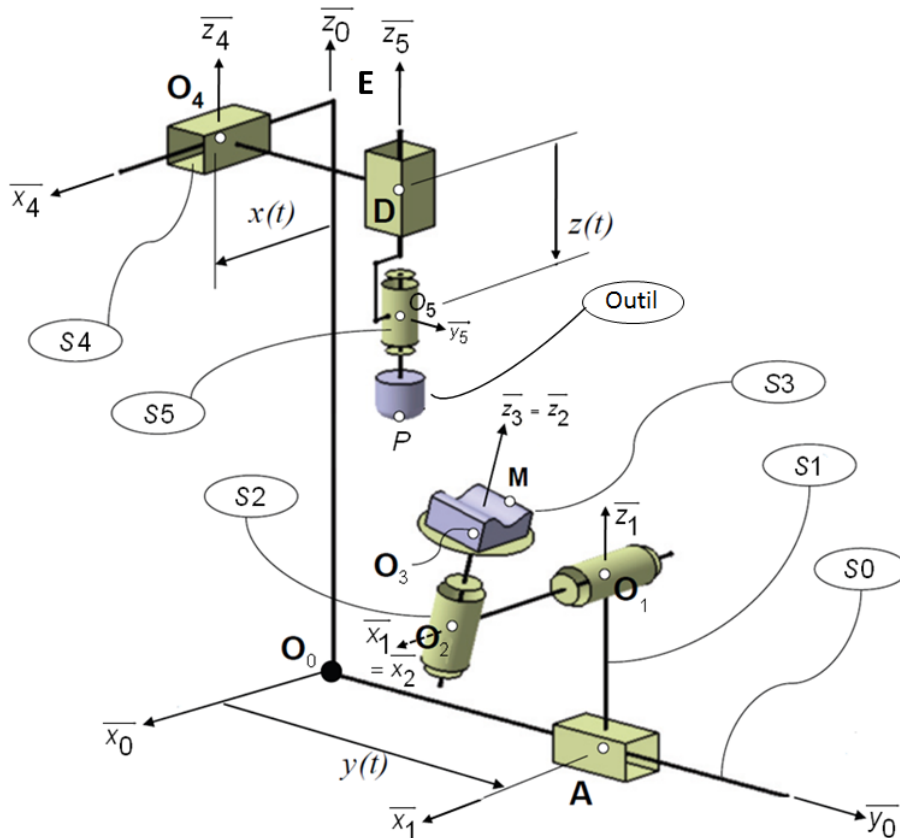
Q6 : Réaliser le graphe des liaisons pour la chaîne ouverte 0-4-5-outil. Lorsqu'il est défini, préciser le paramètre de mouvement associé à chaque liaison.

Q7 : Indiquer les égalités de bases.

Q8 : Donner l'expression du vecteur position $\overline{O_0P}$.

Lors de l'usinage, le point P doit se déplacer sur la surface usinée définie comme le lieu des points M . Autrement dit, P doit être confondu en permanence avec M .

Q9 : Par projection dans la base (0), En déduire trois équations qui traduisent cette condition.



	Repère associé
Solide S3 (pièce usinée et son support)	$R_3 = (O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$
Solide S2	$R_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
Solide S1	$R_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
Solide S0 (le bâti de la machine)	$R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
Solide S4	$R_4 = (O_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$
Solide S5	$R_5 = (O_5, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$

$$\overline{O_0E} = d \vec{z}_0 \quad \overline{EO_4} = x(t) \vec{x}_0 \quad \overline{O_4D} = e \vec{y}_4 \quad \overline{DO_5} = z(t) \vec{z}_5 \quad \overline{O_5P} = f \vec{z}_5$$

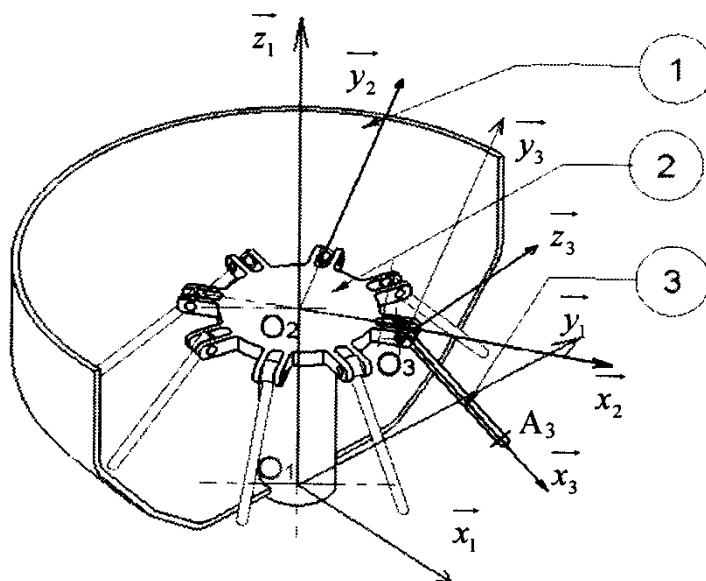
$$\overline{O_0A} = y(t) \vec{y}_0 \quad \overline{AO_1} = a \vec{z}_1 \quad \overline{O_1O_2} = b \vec{x}_2 \quad \overline{O_2O_3} = c \vec{z}_3$$

$$(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \alpha(t) \quad \text{et} \quad (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = \beta(t)$$

a, b, c, d, e et f sont des paramètres caractéristiques liés à l'architecture de la machine.

La surface usinée est définie comme un ensemble de points M de coordonnées (x_M, y_M, z_M) dans le repère R_3 , c'est-à-dire $\overline{O_3M} = x_M \vec{x}_3 + y_M \vec{y}_3 + z_M \vec{z}_3$.

3.1 PRODUIT VECTORIEL - CENTRIFUGEUSE DE LABORATOIRE



Une centrifugeuse de laboratoire est constituée d'un carter 1 en forme de bol, d'un rotor 2 auquel sont fixées des éprouvettes 3.

Les éprouvettes contiennent chacune deux liquides de masse volumique différente.

Sous l'effet centrifuge dû à la rotation du rotor 2, les éprouvettes 3 s'inclinent et le liquide dont la masse volumique est la plus grande est rejeté vers le fond des éprouvettes, ce qui réalise la séparation des deux liquides.

Le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est associé au carter 1.

Le rotor 2 a un mouvement de rotation d'axe (O_1, \vec{z}_1) par rapport au carter 1.

On pose $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le repère associé au rotor 2, $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ et $\vec{O}_1\vec{O}_2 = h.\vec{z}_1$.

L'éprouvette 3 a un mouvement de rotation d'axe (O_3, \vec{y}_2) par rapport au rotor 2.

On pose $R_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ le repère associé à l'éprouvette 3, $\beta = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$, $\vec{O}_2\vec{O}_3 = R.\vec{x}_2$ et $\vec{O}_3\vec{A}_3 = \ell.\vec{x}_3$.

Q1 : Réaliser les figures planes illustrant les 2 paramètres d'orientation α et β .

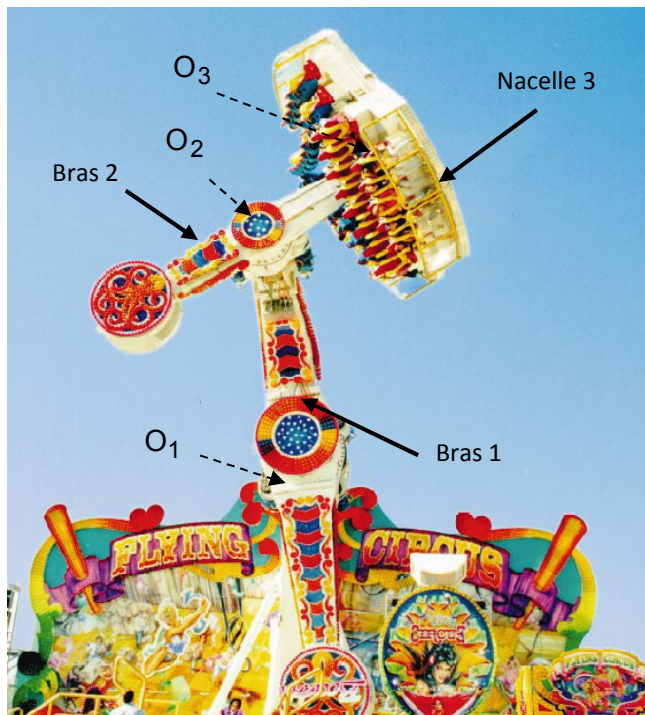
Q2 : Déterminer le vecteur $\vec{O}_1\vec{A}_3$.

Q3 : Déterminer les produits vectoriels suivants : $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_1$, $\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2$, $\vec{x}_2 \wedge \vec{z}_1$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_1$, $\vec{z}_3 \wedge \vec{z}_1$, $\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_3$ et $\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_3$.

Q4 : Déterminer $\vec{V}_{A_3/1}$.

3.2 MAGIC ARMS

(D'après concours E3A, filière PSI)



Le « magic arms » est un manège fabriqué par la société WAAGNER-BIRO. Ses mouvements simultanés autour de trois axes, désorientent les 39 passagers embarqués qui ne savent plus reconnaître le dessus du dessous pendant quelques minutes.

La structure métallique d'environ 12 m de haut est composée de deux bras mobiles et d'une nacelle.

Les passagers assis dans la nacelle 3, sont parfaitement maintenus par un harnais. Pendant les 9 premières secondes du cycle, le bras principal 1 et le bras 2, sont liés l'un à l'autre, et commencent à tourner par rapport à la structure 0. En même temps, la nacelle 3 tourne autour de son axe. Après ces 9 secondes, le maximum de hauteur est atteint et les deux bras se désindexent et se mettent à tourner indépendamment l'un de l'autre. Tous les mouvements sont pilotés par un ordinateur.

Cette installation permet une combinaison de mouvements complexe qui assure des sensations fortes chez les utilisateurs.

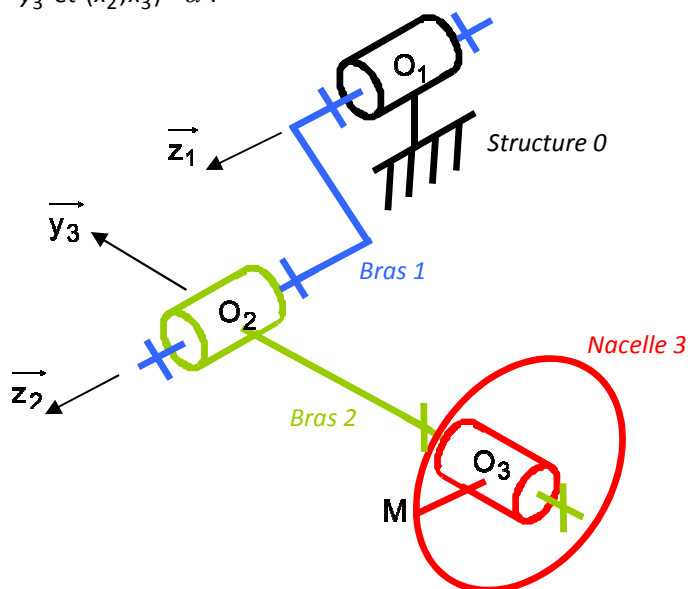
Le paramétrage adopté est le suivant :

Soit $R_0(O_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct lié à la structure fixe 0.

Soit $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère orthonormé direct lié au bras 1, en mouvement de rotation d'axe (O_1, \vec{z}_0) par rapport au bâti 0 tel que $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \psi$.

Soit $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère orthonormé direct lié au bras 2, en mouvement de rotation d'axe (O_2, \vec{z}_1) par rapport au bras 1 tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ et $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \theta$.

Soit $R_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ un repère orthonormé direct lié à la nacelle 3, en mouvement de rotation d'axe (O_3, \vec{y}_2) par rapport au bras 2 tel que $\vec{y}_2 = \vec{y}_3$ et $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = \alpha$.



$$\begin{aligned} \overline{O_1 O_2} &= -a \cdot \vec{y}_1 + b \cdot \vec{z}_0 \\ \overline{O_2 O_3} &= -c \cdot \vec{y}_2 \\ \overline{O_3 M} &= -R \cdot \vec{z}_3 \end{aligned}$$

Les résultats seront donnés dans l'ordre croissant des bases, puis dans l'ordre croissant de vecteurs, exemple :

$$\overrightarrow{V_{A \in 2/1}} = ? \cdot \overrightarrow{x_1} + ? \cdot \overrightarrow{y_1} + ? \cdot \overrightarrow{z_1} + ? \cdot \overrightarrow{x_2} + ? \cdot \overrightarrow{y_2} + \dots$$

Q1 : Réaliser 3 figures planes illustrant les 3 paramètres d'orientation ψ , θ et α , puis en déduire le vecteur vitesse angulaire associé à chaque figure.

Q2 : Déterminer les expressions de la vitesse et de l'accélération du passager situé en M : $\overrightarrow{V_{M/0}}$, puis de $\overrightarrow{\Gamma_{M/0}}$.

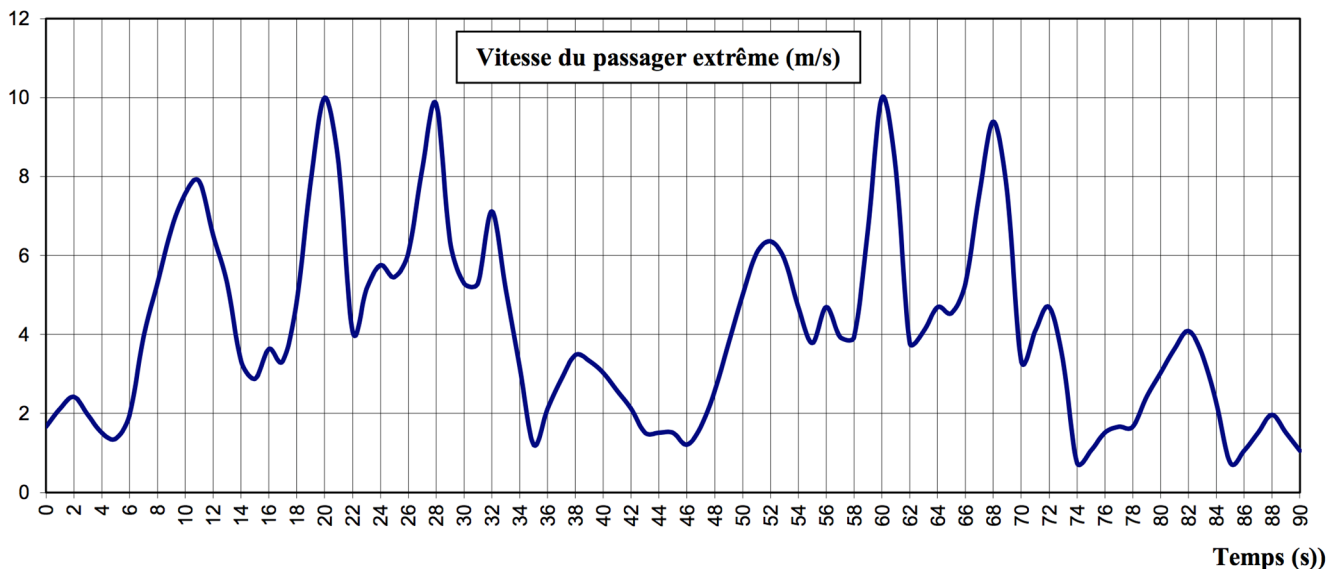
On se place à un instant particulier $t = 19,8$ s, où $\psi = 0,28$ rad, $\theta = 0,1$ rad et $\alpha = 0,13$ rad,

ce qui implique $\begin{cases} \cos \theta = \cos \alpha = 1 \\ \sin \theta = \theta \\ \sin \alpha = \alpha \end{cases}$.

Q3 : À l'aide des simplifications ci-dessus, exprimer les vecteurs $\overrightarrow{x_2}$, puis $\overrightarrow{x_1}$ dans la base B_3 . En déduire, l'expression littérale de $\overrightarrow{V_{M/0}}$ dans la base B_3 à cet instant.

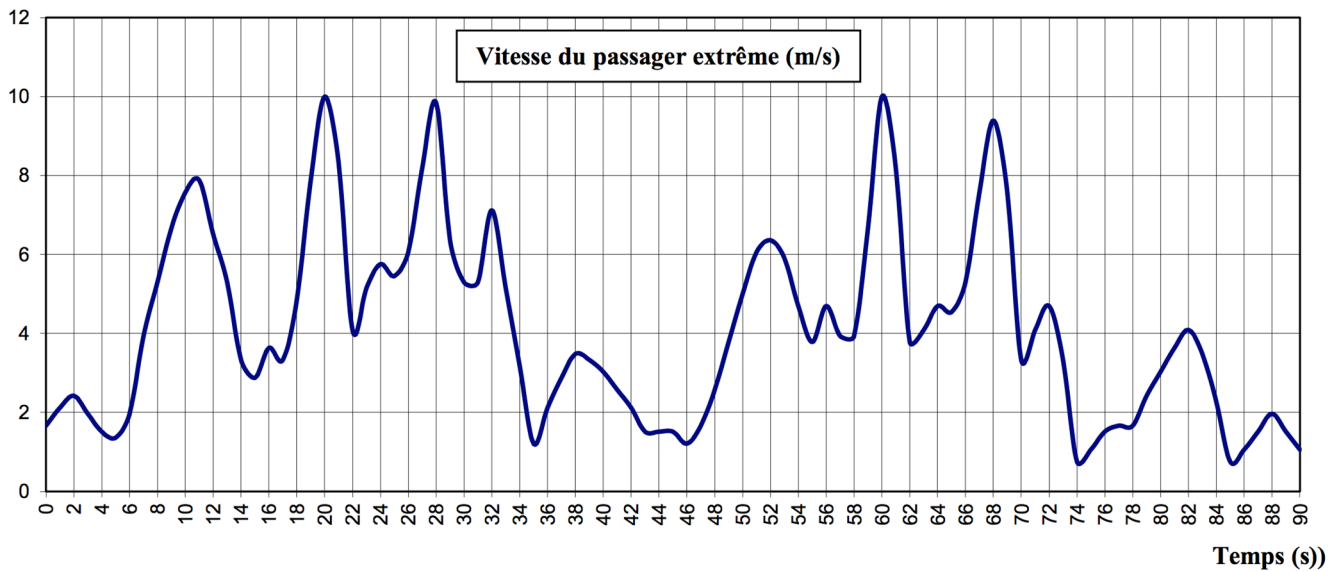
Q4 : Sachant que $a = 3,9$ m, $c = 2,87$ m et $R = 2,61$ m, et que pendant la plage [17 s ; 27 s] les vitesses angulaires sont constantes et valent $\dot{\psi} = 0,84$ rad.s⁻¹, $\dot{\theta} = 0,94$ rad.s⁻¹ et $\dot{\alpha} = -0,628$ rad.s⁻¹, déterminer les valeurs numériques des composantes de $\overrightarrow{V_{M/0}}$ dans la base B_3 . En déduire $\|\overrightarrow{V_{M/0}}\|$.

Q5 : Valider cette valeur à partir du graphique ci-dessous.



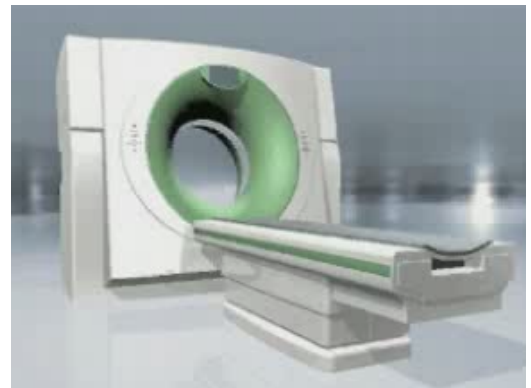
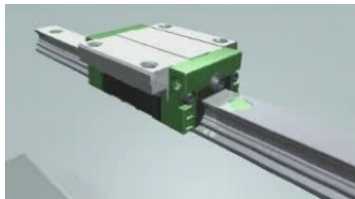
Q6 : Donner $\|\overrightarrow{V_{M/0}}\|$ en km/h. Qu'en pensez-vous ?

Q7 : Déterminer $\|\overrightarrow{\Gamma_{M/0}}\|$ à cet instant à partir du graphe ci-dessous. À combien de g correspond-t-elle ? Qu'en pensez-vous ?

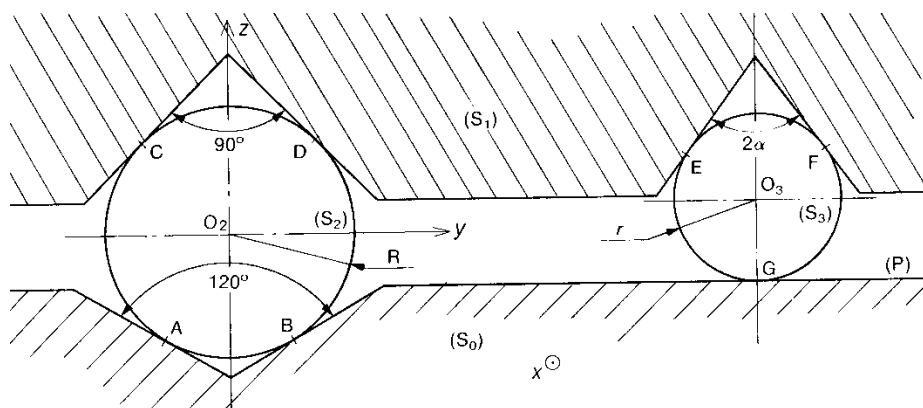


5.1 GUIDAGE EN TRANSLATION D'UNE TABLE DE SCANNER

L'étude suivante porte sur le guidage en translation d'une table de scanner médical S1 par rapport au bâti de la machine S0. Ce guidage est réalisé par deux séries de billes, S2 et S3, qui roulent dans des rainures en V.



La figure ci-dessous présente, en coupe, la réalisation technologique de ce guidage.



Les billes S2 de rayon R roulent sans glisser sur les plans d'une rainure en V d'angle égal à 90° usinée dans S1 et sur les plans d'une autre rainure en V d'angle égal à 120° usinée dans S0.

Les billes S3 de rayon r roulent sans glisser sur les plans d'une rainure en V d'angle égal à 2α usinée dans S1 et sur le plan (P) de S0.

On note $\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v \vec{x} \end{Bmatrix}_{\forall M}$ le torseur cinématique du mouvement du chariot S1 par rapport au bâti S0.

On pose $\overline{\Omega_{2/0}} = \omega_{20} \vec{y}$ et $\overline{\Omega_{3/0}} = \omega_{30} \vec{y}$

Objectif : déterminer les conditions géométriques afin d'assurer le roulement sans glissement des billes.

- Q1 :** Exprimer les conditions de non glissement. En déduire les torseurs cinématiques $\{V_{2/0}\}$, $\{V_{2/1}\}$, $\{V_{3/0}\}$ et $\{V_{3/1}\}$, le mouvement de 2/0 et de 2/1.
- Q2 :** Par composition des vitesses, déterminer $\overline{V_{C \in 2/0}}$ en fonction de v , puis $\overline{V_{E \in 3/0}}$ en fonction de v .
- Déterminer $\overline{V_{C \in 2/0}}$ en fonction de ω_{20} , puis $\overline{V_{E \in 3/0}}$ en fonction de ω_{30} .
- En déduire une relation entre ω_{20} et v , puis une relation entre ω_{30} et v .
- Q3 :** En déduire les torseurs cinématiques des mouvements de 2/0 et 3/0 en fonction de v et des caractéristiques géométriques.
- Q4 :** Déterminer les vecteurs vitesses des centres des billes dans leur mouvement par rapport au bâti S0 : $\overline{V_{O_2 \in 2/0}}$ et $\overline{V_{O_3 \in 3/0}}$.
- Q5 :** Déterminer α pour que ces vecteurs vitesse soient identiques.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE

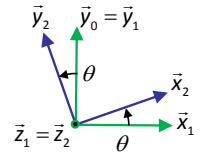
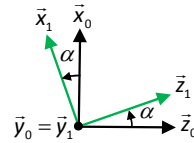
TD1

Échelle E.P.A.S.

Q6 : $\vec{OD} = -R \vec{x}_1 + b \vec{y}_0 + x(t) \vec{x}_2$

Q7 : $\vec{x}_2 = \cos \theta \cos \alpha \vec{x}_0 - \cos \theta \sin \alpha \vec{z}_0 + \sin \theta \vec{y}_0$

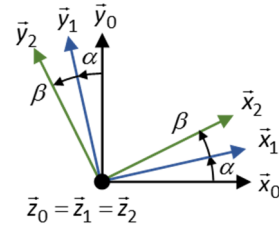
$\vec{OD} = (-R \cos \alpha + x \cos \theta \cos \alpha) \vec{x}_0 + (b + x \sin \theta) \vec{y}_0 + (R \sin \alpha - x \cos \theta \sin \alpha) \vec{z}_0$



Robot Ericc

Q4 : $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = a \vec{x}_1 + b \vec{x}_2$

Q5 : $\vec{OB} = (a \cos \alpha + b \cos(\alpha + \beta)) \vec{x}_0 + (a \sin \alpha + b \sin(\alpha + \beta)) \vec{y}_0$



Robot de peinture

Q3 : $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BP} = \lambda(t) \vec{y}_0 + H \vec{z}_0 + L \vec{z}_3$

TD2

Echelle E.P.A.S.

Q1 :
$$\begin{cases} X = \cos \alpha (x \cos \theta - R) \\ Y = b + x \sin \theta \\ Z = -\sin \alpha (x \cos \theta - R) \end{cases}$$

Q2 : $x(t) = \frac{1}{\cos \theta(t)} \left(\frac{X_0}{\cos \alpha_0} + R \right)$ Q3 : $\Delta x = x \tan \theta \Delta \theta$

Q4 :
$$\begin{cases} \alpha(t) \\ \tan \theta(t) = \frac{Y_0 - b}{R + \frac{X_0}{\cos \alpha}} \\ x(t) = \frac{Y_0 - b}{\sin \theta} \end{cases}$$

Robot Ericc

Q1 : $a^2 + b^2 + 2ab \cos \beta \leq R^2$

Q2 : $\|\vec{CB}\| = r \Rightarrow d^2 + a^2 + b^2 - 2da \cos \alpha - 2db \cos(\alpha + \beta) + 2ab \cos \beta = r^2$

Robot de manutention

Q2 : $R_3(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est un repère lié à (3).

Q6 : $\vec{AJ} = L \vec{x}_1 + H \vec{x}_2$

Q7 : $L \cos \alpha + H \cos \beta = d$

TD3

Centrifugeuse

Q2 : $\vec{x}_0 \wedge \vec{x}_2 = \cos \beta \sin \alpha \vec{z}_0 + \sin \beta \vec{y}_0$ $\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_2 = \cos \beta \vec{x}_0 - \sin \beta \cos \alpha \vec{z}_0$

Q4 : $\vec{a}_{G/0} = -\dot{\alpha}^2 (b \cos \beta + a) \vec{x}_1 + \ddot{\alpha} (b \cos \beta + a) \vec{y}_1$ Q5 : $\dot{\alpha} = 52 \text{ tr} \cdot \text{mn}^{-1}$

Unité de découpe de savons

Q2 : $\vec{v}_{P/0} = \dot{\mu}(t) \vec{z}_0 + L \dot{\alpha} \vec{z}_1$ Q3 : $\vec{v}_{P/0} \cdot \vec{y}_0 = V_s$, soit $-L \dot{\alpha} \sin \alpha = V_s$

Robot de peinture

Q2 : $\vec{OP} = \lambda(t) \vec{y}_0 + H \vec{z}_0 + L \vec{z}_3$ et $\vec{v}_{P/0} = \dot{\lambda} \vec{y}_0 + L(\dot{\alpha} \sin \beta \vec{y}_2 + \dot{\beta} \vec{x}_3)$ Q3 : $-L \dot{\beta} \sin \beta = 0$

Q4 : $-L \dot{\alpha} \sin \beta \sin \alpha + L \dot{\beta} \cos \beta \cos \alpha = V$ et $\dot{\lambda} + L \dot{\alpha} \sin \beta \cos \alpha + L \dot{\beta} \cos \beta \sin \alpha = 0$

TD4

Maquette en soufflerie

$$Q4 : \{V_{3/0}\}_E = \begin{cases} (\dot{\beta} + \dot{\alpha}) \vec{i}_0 \\ \dot{\lambda} \vec{k}_{01} - \dot{\alpha} l_2 \vec{j}_2 \end{cases}$$

$$Q7 : \begin{cases} \dot{\alpha} + \dot{\beta} = 0 \\ -\dot{\alpha} l_2 \cos \alpha = V \\ \dot{\lambda} - \dot{\alpha} l_2 \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$Q9 : \vec{V}_{F \in 3/0} = \dot{\lambda} \vec{k}_{01} - l_2 \dot{\alpha} \vec{j}_2 - l_3 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{j}_3$$

$$Q10 : \begin{cases} \dot{\alpha} + \dot{\beta} = \omega_{imp} \\ l_2 \dot{\alpha} \cos \alpha - l_3 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos(\alpha + \beta) = V \\ \dot{\lambda} - l_2 \dot{\alpha} \sin \alpha - l_3 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \sin(\alpha + \beta) = 0 \end{cases}$$

$$Q11 : \forall M, \{V_{1/0}\}_M = \begin{cases} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \vec{k}_{01} \end{cases}, \{V_{2/0}\}_A = \begin{cases} \dot{\alpha} \vec{i}_0 \\ \dot{\lambda} \vec{k}_{01} \end{cases}$$

Robot soudeur

$$Q5 : \{V_{4/0}\}_{O_2} = \begin{cases} \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{x}_1 \\ \dot{\lambda} \vec{z}_3 - L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + L_1 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 \end{cases}$$

$$Q7 : \begin{cases} \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 = 0 \\ -L_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \dot{\lambda} \sin(\theta_2 + \theta_3) = V \\ L_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \dot{\lambda} \cos(\theta_2 + \theta_3) = 0 \end{cases}$$

$$Q9 : \vec{V}_{O_4 \in 4/0} = (-L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 - L_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \dot{\lambda} \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \theta_3)) \vec{x}_1 + L_1 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\lambda} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{y}_3 + (\dot{\lambda} + L_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)) \vec{z}_3$$

$$Q10 : \left. \frac{d \vec{y}_2}{dt} \right|_0 = -\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 \quad \left. \frac{d \vec{y}_3}{dt} \right|_0 = -\dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \vec{x}_1 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{z}_3 \quad \left. \frac{d \vec{z}_3}{dt} \right|_0 = \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \vec{x}_1 - (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{y}_3$$

TD5

Système de distribution d'un moteur 4 temps

$$Q1 : \overrightarrow{V_{I \in 1/2}} = \overrightarrow{V_{I \in 1/0}} - \overrightarrow{V_{I \in 2/0}}$$

$$Q2 : \overrightarrow{OI} = e \vec{x}_1 + R \vec{y}_0$$

$$Q4 : \overrightarrow{V_{I \in 1/2}} = -R \dot{\theta} \vec{x}_0 + e \dot{\theta} \vec{y}_1 - \dot{\lambda} \vec{y}_0$$

$$Q5 : \overrightarrow{V_{I \in 1/2}} \cdot \vec{y}_0 = 0$$

$$Q6 : \overrightarrow{V_{I \in 1/2}} = -\dot{\theta} (R + e \sin \theta) \vec{x}_0$$

Banc de tests de pneumatiques

$$Q2 : \overrightarrow{V_{I \in 2/1}} = (r \dot{\beta} + d(\dot{\alpha} - \dot{\theta})) \vec{v}$$

Exercices supplémentaires

Centre d'usage 5 axes

$$Q5 : \overline{O_0M} = b \overline{x_0} + y \overline{y_0} + a \overline{z_0} + x_M \overline{x_3} + y_M \overline{y_3} + (c + z_M) \overline{z_2}$$

$$Q8 : \overline{O_0P} = x \overline{x_0} + e \overline{y_0} + (d + z + f) \overline{z_0}$$

$$Q9 : x = b + x_M \cos \beta - y_M \sin \beta$$

$$e = y + x_M \sin \beta \cos \alpha + y_M \cos \beta \cos \alpha - (c + z_M) \sin \alpha$$

$$d + z + f = a + x_M \sin \beta \sin \alpha + y_M \cos \beta \sin \alpha + (c + z_M) \cos \alpha$$

Centrifugeuse de laboratoire

$$Q2 : \overline{O_1A_3} = h \overline{z_1} + R \overline{x_2} + \ell \overline{x_3}$$

$$Q3 : \overline{x_1} \wedge \overline{x_3} = \cos \alpha \sin \beta \overline{y_2} + \sin \alpha \overline{z_3}$$

$$\overline{y_1} \wedge \overline{z_3} = \cos \beta \overline{x_1} - \sin \beta \cos \alpha \overline{z_1}$$

$$Q4 : \left. \frac{d \overline{x_3}}{dt} \right|_1 = \dot{\alpha} \cos \beta \overline{y_2} - \dot{\beta} \overline{z_3}$$

$$\overline{V}_{A3/1} = R \dot{\alpha} \overline{x_2} + \ell \dot{\alpha} \cos \beta \overline{y_2} - \ell \dot{\beta} \overline{z_3}$$

Magic arms

$$Q2 : \overline{O_1M} = -a \overline{y_1} + b \overline{z_0} - c \overline{y_2} - R \overline{z_3}$$

$$\left. \frac{d \overline{y_2}}{dt} \right|_0 = -(\dot{\theta} + \dot{\psi}) \overline{x_2}$$

$$\left. \frac{d \overline{z_3}}{dt} \right|_0 = \dot{\alpha} \overline{x_3} + (\dot{\theta} + \dot{\psi}) \sin \alpha \overline{y_2}$$

$$\overline{V}_{M/0} = a \dot{\psi} \overline{x_1} + c(\dot{\theta} + \dot{\psi}) \overline{x_2} - R(\dot{\theta} + \dot{\psi}) \sin \alpha \overline{y_2} - R \dot{\alpha} \overline{x_3}$$

$$\overline{\Gamma}_{M/0} = a \ddot{\psi} \overline{x_1} + a \dot{\psi}^2 \overline{y_1}$$

$$+ \left(c(\ddot{\theta} + \ddot{\psi}) + R(\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \sin \alpha \right) \overline{x_2} + \left(c(\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 - R(\ddot{\theta} + \ddot{\psi}) \sin \alpha - 2R(\dot{\theta} + \dot{\psi}) \dot{\alpha} \cos \alpha \right) \overline{y_2} - R \ddot{\alpha} \overline{x_3} + R \dot{\alpha}^2 \overline{z_3}$$

$$Q4 : \overline{V}_{M/0} = \begin{bmatrix} 10,0 \text{ m.s}^{-1} \\ -0,93 \text{ m.s}^{-1} \\ 1,09 \text{ m.s}^{-1} \end{bmatrix}_{B3} \Rightarrow \|\overline{V}_{M/0}\| = 10,1 \text{ m.s}^{-1}$$

$$Q6 : \|\overline{V}_{M/0}\| = 36 \text{ km/h}$$

$$Q7 : \|\overline{\Gamma}_{M/0}\| = 1,2 \text{ g}$$

Guidage en translation d'une table de scanner

$$Q1 : \overline{V}_{A \in 2/0} = \overline{V}_{B \in 2/0} = \overline{V}_{C \in 2/1} = \overline{V}_{D \in 2/1} = \overline{V}_{E \in 3/1} = \overline{V}_{F \in 3/1} = \overline{V}_{G \in 3/0} = \vec{0}, \forall M \in (A, \vec{y}), \{V_{2/0}\}_M = \begin{cases} \omega_{20} \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases} \dots$$

$$Q2 : \overline{V}_{C \in 2/0} = \frac{R(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \omega_{20}}{2} \vec{x}, \overline{V}_{E \in 3/0} = r(\sin \alpha + 1) \omega_{30} \vec{x}, \dots \overline{V}_{C \in 2/0} = v \vec{x}$$

$$Q3 : \{V_{2/0}\}_A = \begin{cases} \frac{2v}{R(\sqrt{2} + \sqrt{3})} \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases}, \{V_{3/0}\}_G = \begin{cases} \frac{v}{r(\sin \alpha + 1)} \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$Q4 : \overline{V}_{O2 \in 2/0} = \frac{v\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \vec{x} \text{ et } \overline{V}_{O3 \in 3/0} = \frac{v}{\sin \alpha + 1} \vec{x}$$

$$Q5 : \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 54,7^\circ$$