TD 1 : INTERPRÉTER UN SCHÉMA CINÉMATIQUE

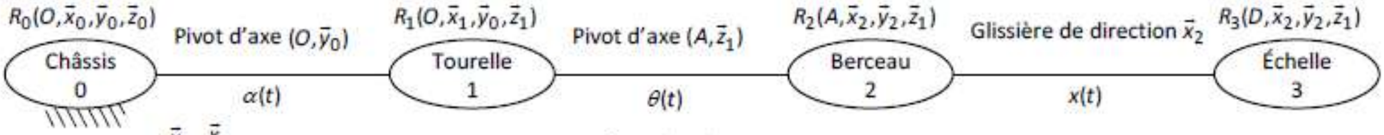
C 02

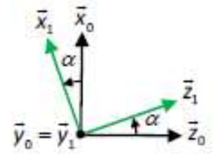
CORRIGE

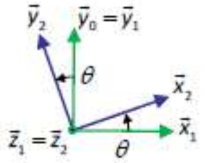
Exercice 1.1 : ÉCHELLE E.P.A.S.

Q1 : Repasser en couleur chaque ensemble indéformable sur le schéma cinématique, puis compléter le graphe des liaisons en partant du châssis 0 : les nœuds sont les solides, les arrêtes représentent les liaisons. Compléter avec les liaisons, les paramètres et les repères liés

Q2 : Compléter les figures de changement de base.







Q3 : Identifier les points fixes de chaque ensemble.

Solides :	(0)	(1)	(2)	(3)
Points fixes :	O	O, A, B	A, C	D

Q4 : Tracer les trajectoires $T_{C/1}$ et $T_{D/2}$. Quelle est la trajectoire $T_{D/1}$ si x est constant ?

Trajectoire $T_{C/1}$: segment de cercle de centre *A*

Trajectoire $T_{D/2}$: segment de droite $(D,\vec{x}_2)$ → le mouvement de 3/2 est une translation à trajectoire rectiligne.

Si *x* est constant, *D* est un point fixe de (2). Sa trajectoire dans (1) est un segment de cercle centré sur *A*.

Q5 : Déterminer un vecteur position de *D* dans (1).

A étant un point fixe du repère lié à (1), un vecteur position de *D* dans (1) est : $\overrightarrow{AD}=x(t)\,\vec{x}_2$.

O étant l'origine du repère lié à (1), un vecteur position de *D* dans (1) est aussi : $\overrightarrow{OD}=-R\,\vec{x}_1+b\,\vec{y}_0+x(t)\,\vec{x}_2$.

Q6 : Déterminer un vecteur position de *D* dans (0).

Le point *O* est l'origine du repère lié à (0) : $\overrightarrow{OD}=-R\,\vec{x}_1+b\,\vec{y}_0+x(t)\,\vec{x}_2$.

Q7 : Par changement de base, déterminer les coordonnées de *D* dans le repère R_0, coordonnées dites opérationnelles.

Il s'agit d'exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OD}$ dans la base B_0. Par les figures de changement de base :

$$\vec{x}_1=\cos\alpha\,\vec{x}_0-\sin\alpha\,\vec{z}_0$$

$$\vec{x}_2=\cos\theta\,\vec{x}_1+\sin\theta\,\vec{y}_0=\cos\theta\cos\alpha\,\vec{x}_0-\cos\theta\sin\alpha\,\vec{z}_0+\sin\theta\,\vec{y}_0$$

D'où : $\overrightarrow{OD}=-R\,(\cos\alpha\,\vec{x}_0-\sin\alpha\,\vec{z}_0)+b\,\vec{y}_0+x(\cos\theta\cos\alpha\,\vec{x}_0+\sin\theta\,\vec{y}_0-\cos\theta\sin\alpha\,\vec{z}_0)$

$$=(-R\cos\alpha+x\cos\theta\cos\alpha)\vec{x}_0+(b+x\sin\theta)\vec{y}_0+(R\sin\alpha-x\cos\theta\sin\alpha)\vec{z}_0$$

On factorise les termes par vecteur dans l'ordre x, y, z

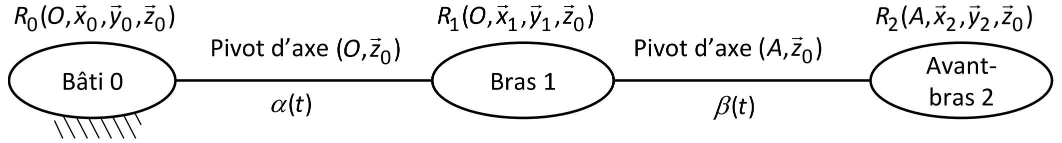
Relation homogène.

Exercice 1.2 : **ROBOT ERICC 3**

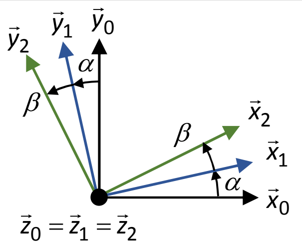
Q1 : Repasser en couleur chaque ensemble indéformable sur le schéma cinématique, puis identifier les points fixes de chaque solide.

Solides	(0)	(1)	(2)
Q1 : points fixes	O	O,A	A,B

Q2 : Compléter le graphe des liaisons du modèle (avec repères liés, liaisons et paramètres) en partant du bâti et en simplifiant les bases (si $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ alors $\vec{x}_2$ n'apparait plus).



Q3 : Compléter la figure de changement de base.



Si 2 figures planes ont le même vecteur commun, il faut regrouper ces 2 figures sur la même figure.

Q4 : Définir un vecteur position de B dans R_0.

O origine du repère lié à (0), R_0. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = a\,\vec{x}_1 + b\,\vec{x}_2$

Q5 : Exprimer ce vecteur dans la base $B_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. En déduire les coordonnées X et Y, dites opérationnelles, de B dans le repère R_0 . Vérifier l'homogénéité du résultat

$\vec{x}_1 = \cos\alpha\,\vec{x}_0 + \sin\alpha\,\vec{y}_0$ et $\vec{x}_2 = \cos(\alpha+\beta)\,\vec{x}_0 + \sin(\alpha+\beta)\,\vec{y}_0$

D'où : $\overrightarrow{OB} = \left(a\cos\alpha + b\cos(\alpha+\beta)\right)\vec{x}_0 + \left(a\sin\alpha + b\sin(\alpha+\beta)\right)\vec{y}_0$

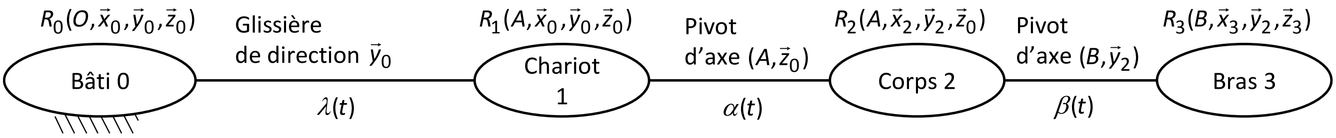
Par identification : $\begin{array}{l} X = a\cos\alpha + b\cos(\alpha+\beta) \\ Y = a\sin\alpha + b\sin(\alpha+\beta) \end{array}$

Exercice 1.3 : **ROBOT DE PEINTURE**

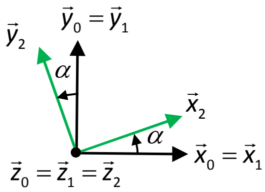
Q1 : Repasser en couleur chaque ensemble du schéma cinématique puis représenter le modèle sous la forme d'un graphe des liaisons (avec liaisons, paramètres, repères liés « simplifiés »).

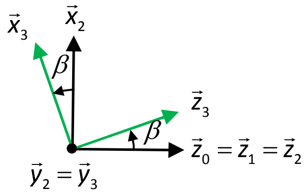
S_1 étant en translation par rapport à S_0, les bases liées peuvent être identiques. $\vec{z}_1$ (et donc $\vec{z}_0$) est commun à B_1 et B_2. $\vec{y}_2$ est commun à B_2 et B_3.

Ne pas hésiter à reporter ces informations sur le schéma du sujet !



Q2 : Construire les figures planes de changement de base.





Q3 : Définir un vecteur position de *P* dans (0).

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\lambda(t)\,\vec{y}_0+H\,\vec{z}_0+L\,\vec{z}_3$

Dépendent du temps : $\lambda(t)$ et $\vec{z}_3$ (dans B_0).

Q4 : Définir la trajectoire $T_{P/2}$.

P est un point fixe de (3). (3) a un mouvement de rotation d'axe $(B,\vec{y}_2)$ par rapport à (2).

La trajectoire $T_{P/2}$ est circulaire, cercle de centre *B*, de rayon *L*, incluse dans le plan $(B,\vec{x}_2,\vec{z}_1)$.

Q5 : Dans quels ensembles, le point *B* est-il fixe ? Définir la trajectoire $T_{B/0}$.

B est sur l'axe de la liaison pivot entre (1) et (2), et sur l'axe de la liaison pivot entre (2) et (3).
B est donc fixe dans (1), (2) et (3).

(1) étant en liaison glissière avec (0), la trajectoire de *B* dans (0) est rectiligne, segment de droite inclus dans la droite $(B,\vec{y}_1)$.

TD 2 : CONTRAINDRE UNE TRAJECTOIRE C 02

CORRIGE

Exercice 2.1 : ÉCHELLE E.P.A.S.

Q1 : Par projection (produit scalaire) déterminer *X*, *Y* et *Z* en fonction des paramètres de position α, θ, *x* et des dimensions.

- Sur $\vec{x}_0$: $X = \overrightarrow{OD} \cdot \vec{x}_0 = \left(-R\,\vec{x}_1 + b\,\vec{y}_0 + x\,\vec{x}_2\right) \cdot \vec{x}_0 = -R\,\underbrace{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0}_{\cos\alpha} + b\,\underbrace{\vec{y}_0 \cdot \vec{x}_0}_{0} + x\,\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_0$

avec $\vec{x}_2 = \cos\theta\,\vec{x}_1 + \sin\theta\,\vec{y}_0$, d'où : $\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_0 = \cos\theta\,\underbrace{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0}_{\cos\alpha} + \sin\theta\,\underbrace{\vec{y}_0 \cdot \vec{x}_0}_{0} = \cos\theta\cos\alpha$

soit : $X = -R\cos\alpha + x\cos\theta\cos\alpha = \cos\alpha\,(x\cos\theta - R)$

- Sur $\vec{y}_0$: $Y = \overrightarrow{OD} \cdot \underbrace{\vec{y}_0}_{=\vec{y}_1} = -R\,\underbrace{\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1}_{0} + b + x\,\underbrace{\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1}_{\sin\theta} = b + x\sin\theta$

- Sur $\vec{z}_0$: $Z = \overrightarrow{OD} \cdot \vec{z}_0 = -R\,\underbrace{\vec{x}_1 \cdot \vec{z}_0}_{-\sin\alpha} + 0 + x\,\vec{x}_2 \cdot \vec{z}_0$

avec $\vec{x}_2 \cdot \vec{z}_0 = \cos\theta\,\underbrace{\vec{x}_1 \cdot \vec{z}_0}_{-\sin\alpha} + \sin\theta\,\underbrace{\vec{y}_0 \cdot \vec{z}_0}_{0} = -\cos\theta\sin\alpha$

soit : $Z = R\sin\alpha - x\sin\alpha\cos\theta = -\sin\alpha(x\cos\theta - R)$

On obtient le système : $\begin{cases} X = \cos\alpha\,(x\cos\theta - R) \\ Y = b + x\sin\theta \\ Z = -\sin\alpha(x\cos\theta - R) \end{cases}$

Q2 : La nacelle étant en position, déterminer les conditions entre les paramètres de position pour que la trajectoire de l'extrémité de la nacelle soit rectiligne verticale. Si nécessaire, on exprimera les paramètres en fonction de $\theta(t)$. On pourra noter avec un indice 0, les valeurs initiales des coordonnées et des paramètres de position.

On veut : $\begin{cases} X(t) = C^{ste} = X_0 \\ Z(t) = C^{ste} = Z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_0 = \cos\alpha\,(x\cos\theta - R) \\ Z_0 = -\sin\alpha(x\cos\theta - R) \end{cases}$

Par division des 2 équations on obtient : $\tan\alpha = -\dfrac{Z_0}{X_0} = C^{ste}$, soit $\alpha(t) = \alpha_0$.

La tourelle ne doit pas bouger par rapport au châssis.

Si $\alpha_0 \neq \pi/2\,[\pi]$, la première condition donne aussi : $x(t) = \dfrac{1}{\cos\theta(t)}\left(\dfrac{X_0}{\cos\alpha_0} + R\right)$

D'où les conditions : $\begin{cases} \theta(t) \\ \alpha(t) = \alpha_0 \\ x(t) = \dfrac{1}{\cos\theta}\left(\dfrac{X_0}{\cos\alpha_0} + R\right) \end{cases}$

Q3 : Pour une variation d'élévation $\Delta\theta$, déterminer la variation de longueur de l'échelle Δx à imposer pour obtenir une trajectoire rectiligne verticale.

L'expression reliant x à θ s'écrit aussi : $x(t)\cos\theta(t)=\dfrac{X_0}{\cos\alpha_0}+R=C^{ste}$.

Par dérivation on obtient : $\dot{x}\cos\theta - x\dot{\theta}\sin\theta = 0$.

Soit : $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\cos\theta - x\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}\sin\theta \approx 0 \Rightarrow \Delta x\cos\theta - x\Delta\theta\sin\theta \approx 0$

Si Δt suffisamment petit, on prend : $\boxed{\Delta x = x\tan\theta\,\Delta\theta}$

Q4 : La nacelle étant en position, déterminer les conditions sur les paramètres de position pour que la trajectoire de l'extrémité de la nacelle soit rectiligne horizontale suivant $\vec{z}_0$. Dans un but de résolution, on exprimera $\theta(t)$ en fonction de $\alpha(t)$, puis $x(t)$ en fonction de $\theta(t)$. On pourra, en résultat intermédiaire, exprimer $x\cos\theta$ et $x\sin\theta$.

On veut : $\begin{cases} X(t)=C^{ste}=X_0 \\ Y(t)=C^{ste}=Y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_0=\cos\alpha\,(x\cos\theta-R) \\ Y_0=b+x\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cos\theta=R+\dfrac{X_0}{\cos\alpha} & (i) \\ x\sin\theta=Y_0-b & (ii) \end{cases}$

Par division des 2 équations (ii)/(i) on obtient : $\tan\theta=\dfrac{Y_0-b}{R+\dfrac{X_0}{\cos\alpha}}$.

De plus : $(ii)\Rightarrow x(t)=\dfrac{Y_0-b}{\sin\theta}$

D'où les conditions : $\begin{cases} \alpha(t) \\ \tan\theta(t)=\dfrac{Y_0-b}{R+\dfrac{X_0}{\cos\alpha}} \\ x(t)=\dfrac{Y_0-b}{\sin\theta} \end{cases}$

Exercice 2.2 : **ROBOT ERICC**

Q1 : Traduire cette contrainte sur les paramètres.

La distance du point B à l'origine O est $\left\|\overrightarrow{OB}\right\|$. La condition s'écrit : $\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\le R$.

avec $\left\|\overrightarrow{OB}\right\|=\sqrt{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}}=\sqrt{(a\cdot\vec{x}_1+b\cdot\vec{x}_2)^2}=\sqrt{a^2\underbrace{\vec{x}_1\cdot\vec{x}_1}_{1}+b^2\underbrace{\vec{x}_2\cdot\vec{x}_2}_{1}+2ab\underbrace{\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2}_{\cos\beta}}=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\beta}$

La contrainte s'écrit, $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\beta}\le R$, ou plutôt : $\boxed{a^2+b^2+2ab\cos\beta\le R^2}$ ou $\cos\beta\le\dfrac{R^2-a^2-b^2}{2ab}$.

Q2 : Déterminer la condition pour que B soit sur un cercle de rayon r et de centre C tel que $\overrightarrow{OC}=d\,\vec{x}_0$. On suppose r et d suffisamment petits.

La condition s'écrit : $\left\|\overrightarrow{CB}\right\|=r$ avec $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}=-d\,\vec{x}_0+a\,\vec{x}_1+b\,\vec{x}_2$

$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\|=\sqrt{\overrightarrow{CB}^2}=\sqrt{(-d\,\vec{x}_0+a\,\vec{x}_1+b\,\vec{x}_2)^2}=\sqrt{d^2\underbrace{\vec{x}_0\cdot\vec{x}_0}_{1}+a^2\underbrace{\vec{x}_1\cdot\vec{x}_1}_{1}+b^2\underbrace{\vec{x}_2\cdot\vec{x}_2}_{1}-2da\underbrace{\vec{x}_0\cdot\vec{x}_1}_{\cos\alpha}-2\mathrm{db}\underbrace{\vec{x}_0\cdot\vec{x}_2}_{\cos(\alpha+\beta)}+2ab\underbrace{\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2}_{\cos\beta}}$$

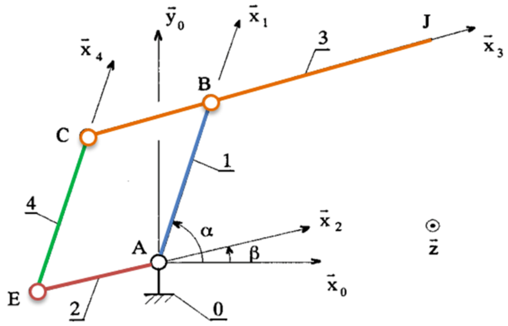
$$=\sqrt{d^2+a^2+b^2-2da\cos\alpha-2\mathrm{db}\cos(\alpha+\beta)+2ab\cos\beta}$$

D'où la condition : $d^2+a^2+b^2-2da\cos\alpha-2\mathrm{db}\cos(\alpha+\beta)+2ab\cos\beta=r^2$

Exercice 2.3 : **ROBOT DE MANUTENTION / TRANSLATION CIRCULAIRE**

Q1 : Mettre le schéma cinématique en couleur et Identifier les points fixes des ensembles 0, 1, 2, 3 et 4.

Solide	0	1	2	3	4
Points fixes	*A*	*A, B*	*A, E*	*B, C, J*	*E, C*



Q2 : ABCE étant un parallélogramme, qu'en déduire sur les bases liées à 1, 2, 3 et 4. En déduire un repère lié « simplifié » pour le solide 3.

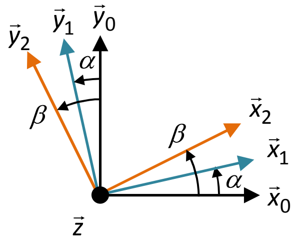
Le vecteur $\vec{z}$ est commun à toutes les bases.

Le segment EA reste parallèle au segment CB, d'où $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$ et $B_3 = B_2$.

Le segment AB reste parallèle au segment EC, d'où $\vec{x}_1 = \vec{x}_4$ et $B_4 = B_1$.

Il n'y a finalement que 3 bases différentes : B_0, B_1 et B_2.

Un repère lié à 3 est : $R_3(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$



Q3 : Réaliser la ou les figures de changement de base.

Les 3 bases ont un même vecteur commun.

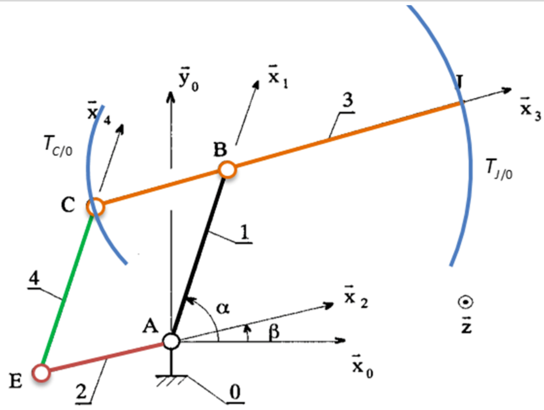
Elles sont positionnées sur une même figure.

Q4 : Lorsque le moteur M1 est à l'arrêt, α est constant. Déterminer, dans ces conditions, le mouvement de 3/0 paramétré par β ainsi que les trajectoires $T_{J/0}$ et $T_{C/0}$.

Si α est contant, la position de l'origine *B* de R_3 est fixe.

Si β varie, la base liée à 3 tourne par rapport à B_0. Le mouvement de 3/0 est une rotation d'axe $(B, \vec{z})$ paramétré par l'angle β.

Les trajectoires de *J* et *C* sont des cercles de centre *B* passant respectivement par *J* et *C*.



Q5 : Lorsque le moteur M2 est à l'arrêt, β est constant. Déterminer, dans ces conditions, le mouvement de 3/0 paramétré par α ainsi que les trajectoires $T_{J/0}$ et $T_{C/0}$.

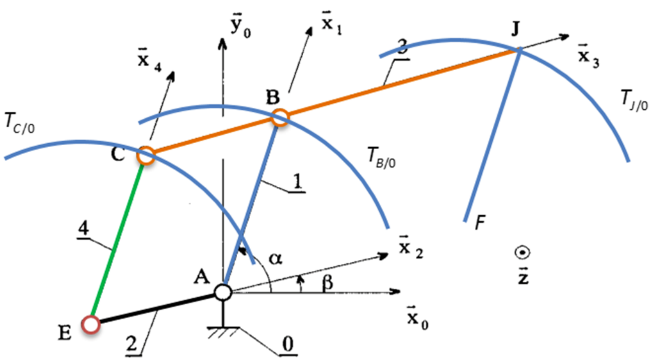
Si β est contant, la position de la base B_2 liée à 3 est fixe.

Si α varie, l'origine *B* de R_3 décrit un cercle de centre *A*.

Le mouvement de 3/0 est donc une translation à trajectoire circulaire paramétré par l'angle α et de rayon *AB*.

La trajectoire de C est un cercle de centre E.

La trajectoire de J est un cercle de centre F tel que $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AB}$.



Q6 : Déterminer un vecteur position de J dans (0).

En utilisant les éléments paramétrés par les angles : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = L\,\vec{x}_1 + H\,\vec{x}_2$

Q7 : Déterminer les conditions sur α et β pour que le point J suive une trajectoire verticale à une distance d du point A.

La condition s'écrit : $\overrightarrow{AJ} \cdot \vec{x}_0 = d$

Soit : $(L\,\vec{x}_1 + H\,\vec{x}_2) \cdot \vec{x}_0 = d \Leftrightarrow L\,\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0 + H\,\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_0 = d$

$\Leftrightarrow L\cos\alpha + H\cos\beta = d$

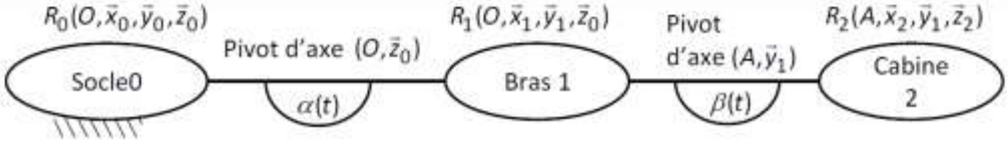
TD 3 : CONTRAINDRE UNE VITESSE OU UNE ACCÉLÉRATION

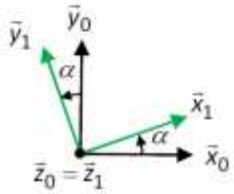
C 02

CORRIGE

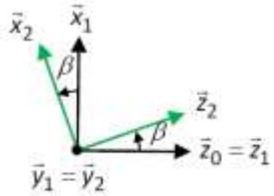
Exercice 3.1 : **CENTRIFUGEUSE**

Q1 : Après réalisation des figures d'analyses (représentation du modèle en graphe, figures planes de changement de base, définition des vecteurs vitesse angulaire).





$\vec{\Omega}_{1/0}=\dot{\alpha}\,\vec{z}_0$



$\vec{\Omega}_{2/1}=\dot{\beta}\,\vec{y}_1$

Q2 : Déterminer les produits vectoriels suivants : $\vec{x}_1\wedge\vec{x}_0$, $\vec{x}_0\wedge\vec{y}_2$, $\vec{x}_1\wedge\vec{z}_0$, $\vec{z}_2\wedge\vec{z}_0$, $\vec{x}_2\wedge\vec{z}_0$, $\vec{x}_0\wedge\vec{x}_2$ et $\vec{y}_0\wedge\vec{z}_2$.

$\vec{x}_1\wedge\vec{x}_0=-\sin\alpha\,\vec{z}_1$

$\vec{x}_0\wedge\vec{y}_2=\vec{x}_0\wedge\vec{y}_1=\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\,\vec{z}_1=\cos\alpha\,\vec{z}_1$

$\vec{x}_1\wedge\vec{z}_0=-\vec{y}_1$

$\vec{z}_2\wedge\vec{z}_0=-\sin\beta\,\vec{y}_1$

$\vec{x}_2\wedge\vec{z}_0=-\sin(\frac{\pi}{2}+\beta)\,\vec{y}_1=-\cos\beta\,\vec{y}_1$

On ne réalise JAMAIS de changement de base pour réaliser un produit vectoriel de 2 vecteurs situés dans la même figure de changement de base : Le résultat est obtenu en travaillant sur la figure.

$\vec{x}_0\wedge\vec{x}_2=\vec{x}_0\wedge(\cos\beta\,\vec{x}_1-\sin\beta\,\vec{z}_0)=\cos\beta\,\vec{x}_0\wedge\vec{x}_1-\sin\beta\,\vec{x}_0\wedge\vec{z}_0=\cos\beta\sin\alpha\,\vec{z}_0+\sin\beta\,\vec{y}_0$

On peut aussi faire le changement de base de $\vec{x}_0$, mais on choisira de se « rapprocher » de la base de référence du système et donc d'exprimer $\vec{x}_2$ dans la base 1.

$\vec{y}_0\wedge\vec{z}_2=\vec{y}_0\wedge(\cos\beta\,\vec{z}_0+\sin\beta\,\vec{x}_1)=\cos\beta\,\vec{y}_0\wedge\vec{z}_0+\sin\beta\,\vec{y}_0\wedge\vec{x}_1=\cos\beta\,\vec{x}_0-\sin\beta\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\,\vec{z}_0=\cos\beta\,\vec{x}_0-\sin\beta\cos\alpha\,\vec{z}_0$

Q3 : Déterminer $\vec{V}_{G/0}$. Vérifier l'homogénéité.

$$\vec{V}_{G/0}=\left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_0=\left[\frac{d}{dt}(a\,\vec{x}_1+b\,\vec{x}_2)\right]_0=a\left[\frac{d\,\vec{x}_1}{dt}\right]_0+b\left[\frac{d\,\vec{x}_2}{dt}\right]_0$$

avec $\left[\frac{d\,\vec{x}_1}{dt}\right]_0=\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{x}_1=\dot{\alpha}\,\vec{z}_0\wedge\vec{x}_1=\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$

et $\left[\frac{d\,\vec{x}_2}{dt}\right]_0=\vec{\Omega}_{2/0}\wedge\vec{x}_2=(\dot{\alpha}\,\vec{z}_0+\dot{\beta}\,\vec{y}_1)\wedge\vec{x}_2=\dot{\alpha}\underbrace{\vec{z}_0\wedge\vec{x}_2}_{\sin(\beta+\pi/2)\,\vec{y}_1}+\dot{\beta}\underbrace{\vec{y}_1\wedge\vec{x}_2}_{-\vec{z}_2}=\dot{\alpha}\cos\beta\vec{y}_1-\dot{\beta}\,\vec{z}_2$

En regroupant les termes par vecteur unitaire (dans l'ordre direct et bases croissantes) :

Donc $\boxed{\vec{V}_{G/0}=\dot{\alpha}(b\cos\beta+a)\,\vec{y}_1-\dot{\beta}\,b\,\vec{z}_2}$.

ATTENTION à ne pas oublier les « longueurs »

Dans cette relation, les termes additionnés sont homogènes à des m/s. Les vecteurs unitaires sont sans unité.

Q4 : Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}_{G/0}$ dans le cas où β est constant.

Si b est constant, $\vec{\Omega}_{2/1}=\vec{0}$ et $\vec{V}_{G/0}=\dot{\alpha}(b\cos\beta+a)\,\vec{y}_1$

$$\vec{a}_{G/0}=\left.\frac{d\vec{V}_{G/0}}{dt}\right|_0=\left.\frac{d}{dt}\big(\dot{\alpha}(b\cos\beta+a)\,\vec{y}_1\big)\right|_0$$

avec $\left.\dfrac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_0=\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{y}_1=\dot{\alpha}\,\vec{z}_0\wedge\vec{y}_1=-\dot{\alpha}\,\vec{x}_1$

On obtient : $\vec{a}_{G/0}=\ddot{\alpha}(b\cos\beta+a)\,\vec{y}_1-\dot{\alpha}^2(b\cos\beta+a)\,\vec{x}_1=\boxed{-\dot{\alpha}^2(b\cos\beta+a)\,\vec{x}_1+\ddot{\alpha}(b\cos\beta+a)\,\vec{y}_1}$

Q5 : Calculer la vitesse angulaire en tour par minute du bras (1) pour une accélération équivalente à 9 g.

Pour β=90° et $\dot{\alpha}$ = Constante : $\vec{a}_{G/0}=-a\,\dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1$. La condition s'écrit, en supposant $\dot{\alpha}>0$:

$a\,\dot{\alpha}^2=9\cdot g$, soit $\dot{\alpha}=\sqrt{\dfrac{9\cdot g}{a}}=5{,}4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}=0{,}86\,\mathrm{tr\cdot s^{-1}}=52\,\mathrm{tr\cdot mn^{-1}}$.

Exercice 3.2 : **UNITÉ DE DÉCOUPE DE SAVONS**

Q1 : Préciser le mouvement de 3/0.

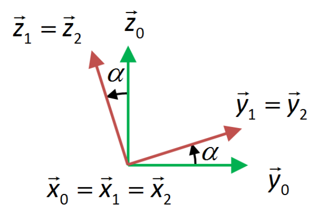
Compte tenu de la structure ABCD en parallélogramme, BC garde toujours la **même orientation** par rapport à AD donc par rapport à 0. Le mouvement de 3/0 est une translation à trajectoire circulaire de rayon AB et paramétrée par $\alpha(t)$.

Q2 : Déterminer l'expression littérale de $\vec{V}_{P/0}$. Vérifier l'homogénéité du résultat ($\mathrm{m\cdot s^{-1}}$).

$$\vec{V}_{P/0}=\left.\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right|_0=\left.\frac{d}{dt}(L\,\vec{y}_1+b\,\vec{y}_0+\mu(t)\,\vec{z}_0)\right|_0=L\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_0+\dot{\mu}\,\vec{z}_0$$

avec $\left.\dfrac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_0=\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{y}_1=\dot{\alpha}\,\vec{x}_0\wedge\vec{y}_1=\dot{\alpha}\,\vec{z}_1$

d'où : $\vec{V}_{P/0}=\dot{\mu}(t)\,\vec{z}_0+L\dot{\alpha}\,\vec{z}_1$, homogène à une vitesse.



Q3 : Sous quelle condition la coupe du savon sera droite ? Exprimer la condition sur la vitesse de $P/0$ et en déduire une condition sur α.

La coupe est droite si la lame avance suivant $\vec{y}_0$ à la même vitesse que le savon, soit si $\vec{V}_{P/0}\cdot\vec{y}_0=V_s$

Et $\vec{V}_{P/0}\cdot\vec{y}_0=V_s\Leftrightarrow(\dot{\mu}(t)\,\vec{z}_0+L\dot{\alpha}\,\vec{z}_1)\cdot\vec{y}_0=V_s\Leftrightarrow\dot{\mu}(t)\underbrace{\vec{z}_0\cdot\vec{y}_0}_{=0}+L\dot{\alpha}\underbrace{\vec{z}_1\cdot\vec{y}_0}_{-\sin\alpha}=V_s$

$\Leftrightarrow\boxed{-L\dot{\alpha}\sin\alpha=V_s}$

Q4 : Déterminer $\alpha(t)$, sachant qu'à l'instant initial t=0 où la lame 4 entre ne contact avec le savon, $\alpha(0)=90°$.

On intègre la relation précédente : $V_s\,t+cte=L\cos\alpha$

Avec $\alpha(0)=90°$, on obtient $cte=0$

Donc $V_s\,t=L\cos\alpha$ soit comme $\alpha\in[0,\pi/2]$, $\boxed{\alpha=\arccos\left(\dfrac{V_s\,t}{L}\right)}$

Exercice 3.3 : **ROBOT DE PEINTURE**

Q1 : Exprimer les vecteurs vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{1/0}$, $\vec{\Omega}_{2/1}$ et $\vec{\Omega}_{3/2}$. En déduire $\vec{\Omega}_{2/0}$ et $\vec{\Omega}_{3/0}$.

Le mouvement 1/0 étant une translation : $\vec{\Omega}_{1/0}=\vec{0}$.

$\vec{\Omega}_{2/1}=\dot{\alpha}\,\vec{z}_0$ et $\vec{\Omega}_{3/2}=\dot{\beta}\,\vec{y}_2$.

De plus, par composition du vecteur rotation : $\vec{\Omega}_{2/0}=\vec{\Omega}_{2/1}+\vec{\Omega}_{1/0}=\dot{\alpha}\,\vec{z}_0+\vec{0}=\dot{\alpha}\,\vec{z}_0$

et $\vec{\Omega}_{3/0}=\vec{\Omega}_{3/2}+\vec{\Omega}_{2/0}=\dot{\beta}\,\vec{y}_2+\dot{\alpha}\,\vec{z}_0=\dot{\alpha}\,\vec{z}_0+\dot{\beta}\,\vec{y}_2$ (vecteur ordonné suivant les bases croissantes).

Q2 : Déterminer $\vec{V}_{P/0}$.

$$\vec{V}_{P/0}=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_0=\left[\frac{d}{dt}(\lambda(t)\,\vec{y}_0+H\,\vec{z}_0+L\,\vec{z}_3)\right]_0$$

Dans cette expression, *H* et *L* sont des constantes. Les vecteurs $\vec{y}_0$ et $\vec{z}_0$ sont, par définition, constants dans la base 0.

D'où : $\vec{V}_{P/0}=\underbrace{\frac{d\lambda(t)}{dt}}_{\dot{\lambda}(t)}\vec{y}_0+L\left[\frac{d\,\vec{z}_3}{dt}\right]_0$ avec $\left[\frac{d\,\vec{z}_3}{dt}\right]_0=\vec{\Omega}_{3/0}\wedge\vec{z}_3=(\dot{\alpha}\,\vec{z}_0+\dot{\beta}\,\vec{y}_2)\wedge\vec{z}_3=\dot{\alpha}\underbrace{\vec{z}_0\wedge\vec{z}_3}_{\sin\beta\,\vec{y}_2}+\dot{\beta}\underbrace{\vec{y}_2\wedge\vec{z}_3}_{\vec{x}_3}=\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2+\dot{\beta}\,\vec{x}_3$

On obtient : $\boxed{\vec{V}_{P/0}=\dot{\lambda}\,\vec{y}_0+L(\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2+\dot{\beta}\,\vec{x}_3)}$

Q3 : Exprimer la relation vectorielle associée à la condition « P se déplace à une vitesse *V* suivant $\vec{x}_0$ ». Par projection sur $\vec{z}_0$, en déduire $\dot{\beta}$.

L'expression vectorielle associée à la condition s'écrit : $\vec{V}_{P/0}=V\,\vec{x}_0$ soit $\dot{\lambda}\,\vec{y}_0+L\left(\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2+\dot{\beta}\,\vec{x}_3\right)=V\,\vec{x}_0$.

La projection sur $\vec{z}_0$ donne : $\left(\dot{\lambda}\,\vec{y}_0+L\left(\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2+\dot{\beta}\,\vec{x}_3\right)\right)\cdot\vec{z}_0=V\underbrace{\vec{x}_0\cdot\vec{z}_0}_{0}$.

Soit : $\dot{\lambda}\underbrace{\vec{y}_0\cdot\vec{z}_0}_{0}+L\left(\dot{\alpha}\sin\beta\underbrace{\vec{y}_2\cdot\vec{z}_0}_{0}+\dot{\beta}\underbrace{\vec{x}_3\cdot\vec{z}_0}_{-\sin\beta}\right)=0\Leftrightarrow\boxed{-L\dot{\beta}\sin\beta=0}$

Cette équation nous donne $\dot{\beta}=0$, et donc $\beta=\beta_0$.

Q4 : Projeter la contrainte vectorielle de la question précédente sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$ pour obtenir les 2 autres contraintes scalaires.

Sur $\vec{x}_0$: $\left(\dot{\lambda}\,\vec{y}_0+L\left(\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2+\dot{\beta}\,\vec{x}_3\right)\right)\cdot\vec{x}_0=V\underbrace{\vec{x}_0\cdot\vec{x}_0}_{1}\Leftrightarrow\dot{\lambda}\underbrace{\vec{y}_0\cdot\vec{x}_0}_{0}+L\left(\dot{\alpha}\sin\beta\underbrace{\vec{y}_2\cdot\vec{x}_0}_{-\sin\alpha}+\dot{\beta}\underbrace{\vec{x}_3\cdot\vec{x}_0}_{\cos\beta\cos\alpha}\right)=V$

$$\Leftrightarrow\boxed{-L\dot{\alpha}\sin\beta\sin\alpha+L\dot{\beta}\cos\beta\cos\alpha=V}$$

Sur $\vec{y}_0$: $\left(\dot{\lambda}\,\vec{y}_0+L\left(\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2+\dot{\beta}\,\vec{x}_3\right)\right)\cdot\vec{y}_0=V\underbrace{\vec{x}_0\cdot\vec{y}_0}_{0}\Leftrightarrow\dot{\lambda}\underbrace{\vec{y}_0\cdot\vec{y}_0}_{1}+L\left(\dot{\alpha}\sin\beta\underbrace{\vec{y}_2\cdot\vec{y}_0}_{\cos\alpha}+\dot{\beta}\underbrace{\vec{x}_3\cdot\vec{y}_0}_{\cos\beta\sin\alpha}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\boxed{\dot{\lambda}+L\dot{\alpha}\sin\beta\cos\alpha+L\dot{\beta}\cos\beta\sin\alpha=0}$$

Q5 : Exprimer alors $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de *L*, *V*, α et β_0.

Avec (cf. Q3) $\dot{\beta}=0$ et $\beta=\beta_0$ les équations de la question 4 deviennent :

$$\begin{cases}\dot{\alpha}=\dfrac{-V}{L\sin\beta_0\sin\alpha}\\ \dot{\lambda}=-L\dot{\alpha}\sin\beta_0\cos\alpha\end{cases}\Rightarrow\dot{\lambda}=-L\frac{-V}{L\sin\beta_0\sin\alpha}\sin\beta_0\cos\alpha\Rightarrow\dot{\lambda}=\frac{V}{\tan\alpha}$$

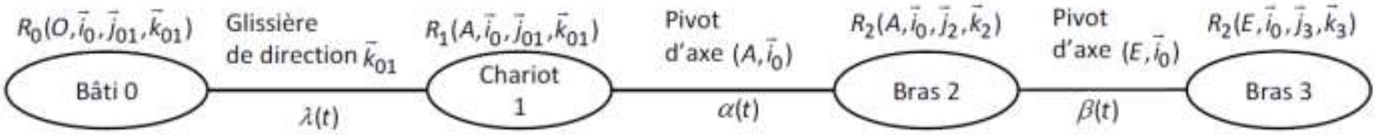
TD 4 : IMPOSER UN MOUVEMENT – TORSEUR CINÉMATIQUE

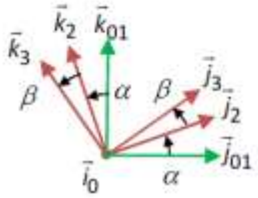
C 02

CORRIGE

Exercice 4.1 : MAQUETTE EN SOUFLERIE

Q1 : Compléter le graphe des liaisons (repères liés, liaisons, paramètres de position) et la figure de changement de base (vecteurs et vecteurs vitesse angulaire).





avec $\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\alpha}\,\vec{i}_0$ et $\vec{\Omega}_{3/2} = \dot{\beta}\,\vec{i}_0$

Applications : déterminer des torseurs cinématiques

Q2 : Écrire les torseurs cinématiques $\{V_{1/0}\}$, $\{V_{2/1}\}$ et $\{V_{3/2}\}$.

$\{V_{1/0}\}$: mouvement de translation imposé par une liaison glissière de direction $\vec{k}_{01}$, $\forall M, \{V_{1/0}\} = {}_M\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} \end{Bmatrix}$

$\{V_{2/1}\}$: mouvement de rotation imposé par une liaison pivot d'axe $(A,\vec{i}_0)$, $\forall M \in (A,\vec{i}_0), \{V_{2/1}\} = {}_M\begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\,\vec{i}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

$\{V_{2/1}\}$: mouvement de rotation imposé par une liaison pivot d'axe $(E,\vec{i}_0)$, $\forall M \in (E,\vec{i}_0), \{V_{3/2}\} = {}_M\begin{Bmatrix} \dot{\beta}\,\vec{i}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Q3 : Écrire le torseur cinématique $\{V_{2/0}\}$.

Mouvement combiné paramétré par α et λ.

Vecteur vitesse angulaire : $\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}\,\vec{i}_0 + \vec{0} = \dot{\alpha}\,\vec{i}_0$

Les points fixes de (2) sont A et E. Le vecteur position de A possède moins de terme.

$$\vec{V}_{A\in 2/0} = \vec{V}_{A/0} = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_0 = \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01}$$

car A fixe dans (2), d'ou : $\{V_{2/0}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\,\vec{i}_0 \\ \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} \end{Bmatrix}$

Torseur cinématique de l'ensemble à contrôler

Q4 : Déterminer le torseur cinématique du missile par rapport au bâti $\{V_{3/0}\}$.

Le torseur cinématique est défini par le vecteur vitesse angulaire et un vecteur vitesse.

1) Déterminer le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{3/0}$

Par composition du vecteur vitesse angulaire : $\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\beta}\,\vec{i}_0 + \dot{\alpha}\,\vec{i}_0 + \vec{0} = (\dot{\beta} + \dot{\alpha})\vec{i}_0$ homogène à du rad/s.

2) Choisir un point fixe dans (3) le plus « proche » de l'ensemble de référence (0), correspondant au vecteur position le plus simple à exprimer.

Points fixes de 3 : *G*, *F* et *E*. Choix : *E*, sa position ne dépendant que de λ et α .

3) Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}_{E\in 3/0}$

$\vec{V}_{E\in 3/0} = \vec{V}_{E/0}$ car *E* est fixe dans (3)

D'où : $\vec{V}_{E\in 3/0} = \left.\dfrac{d}{dt}(\lambda\,\vec{k}_{01} + l_2\,\vec{k}_2)\right|_0 = \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} + l_2 \left.\dfrac{d\,\vec{k}_2}{dt}\right|_0$ avec $\left.\dfrac{d\,\vec{k}_2}{dt}\right|_0 = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{k}_2 = \dot{\alpha}\,\vec{i}_0 \wedge \vec{k}_2 = -\dot{\alpha}\,\vec{j}_2$

Soit : $\vec{V}_{E\in 3/0} = \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} - l_2\,\dot{\alpha}\,\vec{j}_2$ homogène à du m/s.

4) Exprimer le torseur : $\left\{V_{3/0}\right\} = {}_E\begin{cases}(\dot{\beta}+\dot{\alpha})\vec{i}_0 \\ \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} - \dot{\alpha}\,l_2\,\vec{j}_2\end{cases}$

1er mouvement de chute

Q5 : Quel est le mouvement du missile 3 par rapport à 0. En déduire $\left\{V_{3/0}\right\}_{imposé}$ pour ce mouvement.

La description correspond à une translation à trajectoire rectiligne de direction $\vec{j}_{01}$ et vitesse *V* (négative) :

$$\forall M, \left\{V_{3/0}\right\}_{impose} = {}_M\begin{cases}\vec{0} \\ V\,\vec{j}_{01}\end{cases}$$

Q6 : Déterminer les 2 relations vectorielles reliant les paramètres de position et leurs dérivées avec les paramètres du mouvement imposé.

On souhaite que : $\left\{V_{3/0}\right\} = \left\{V_{3/0}\right\}_{impose}$, soit ${}_E\begin{cases}(\dot{\beta}+\dot{\alpha})\vec{i}_0 \\ \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} - \dot{\alpha}\,l_2\,\vec{j}_2\end{cases} = {}_E\begin{cases}\vec{0} \\ V\,\vec{j}_{01}\end{cases}$

D'où les deux équations :

- pour les vecteurs rotation : $(\dot{\beta}+\dot{\alpha})\vec{i}_0 = \vec{0}$;
- pour les vitesses en *E* : $\dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} - l_2\,\dot{\alpha}\,\vec{j}_2 = V\,\vec{j}_{01}$.

Q7 : En déduire 3 relations scalaires non triviales entre les paramètres de position, leurs dérivées et les paramètres du mouvement imposé.

Pour l'équation sur le vecteur vitesse angulaire, seule la projection sur $\vec{i}_0$ est non triviale (différente de 0=0) : $\dot{\beta} + \dot{\alpha} = 0$

Pour l'équation sur le vecteur vitesse, la projection sur $\vec{i}_0$ est triviale,

sur $\vec{j}_{01}$: $(\dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} - l_2\,\dot{\alpha}\,\vec{j}_2)\cdot\vec{j}_{01} = V\,\vec{j}_{01}\cdot\vec{j}_{01} \Leftrightarrow \dot{\lambda}\,\underbrace{\vec{k}_{01}\cdot\vec{j}_{01}}_{0} - l_2\,\dot{\alpha}\,\underbrace{\vec{j}_2\cdot\vec{j}_{01}}_{\cos\alpha} = V \Leftrightarrow -l_2\,\dot{\alpha}\cos\alpha = V$

sur $\vec{k}_{01}$: $(\dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} - l_2\,\dot{\alpha}\,\vec{j}_2)\cdot\vec{k}_{01} = V\,\vec{j}_{01}\cdot\vec{k}_{01} \Leftrightarrow \dot{\lambda}\,\underbrace{\vec{k}_{01}\cdot\vec{k}_{01}}_{1} - l_2\,\dot{\alpha}\,\underbrace{\vec{j}_2\cdot\vec{k}_{01}}_{\sin\alpha} = 0 \Leftrightarrow \dot{\lambda} - l_2\,\dot{\alpha}\sin\alpha = 0$

Afin d'obtenir une trajectoire simulant le largage d'un missile, il est donc nécessaire que les paramètres de position et leur dérivée vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases}\dot{\alpha} + \dot{\beta} = 0 \\ -\dot{\alpha}\,l_2\cos\alpha = V \\ \dot{\lambda} - \dot{\alpha}\,l_2\sin\alpha = 0\end{cases}$$

Q8 : Intégrer ces résultats afin d'obtenir un système de 3 équations sur les paramètres de position. On notera *A*, *B* et *C* les constantes d'intégration.

Ces équations s'intègrent pour donner le système : $\begin{cases}\beta = -\alpha + A \\ \sin\alpha = \dfrac{V\,t + B}{-l_2} \\ \lambda = -l_2\cos\alpha + C\end{cases}$,

avec *A*, *B* et *C* des constantes dépendant de la position à l'instant *t*=0.

2nd mouvement de chute

Q9 : Exprimer $\{V_{3/0}\}$ en F en utilisant la relation de Varignon.

Il s'agit de déterminer $\vec{V}_{F\in3/0}$: $\vec{V}_{F\in3/0} = \vec{V}_{E\in3/0} + \overrightarrow{FE} \wedge \vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} - l_2\,\dot{\alpha}\,\vec{j}_2 - l_3\,\vec{k}_3 \wedge (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{i}_0$

$$= \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} - l_2\,\dot{\alpha}\,\vec{j}_2 - l_3\,(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\underbrace{\vec{k}_3 \wedge \vec{i}_0}_{\vec{j}_3}$$

$$= \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} - l_2\,\dot{\alpha}\,\vec{j}_2 - l_3\,(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{j}_3$$

Q10 : Déterminer 3 relations scalaires non triviales entre les paramètres de position, leurs dérivées et les paramètres du 2nd mouvement imposé.

Relation sur le vecteur rotation :

$(\dot{\beta}+\dot{\alpha})\vec{i}_0 = \omega_{imp}\,\vec{i}_0$ donnant, en projection sur $\vec{i}_0$: $\dot{\beta}+\dot{\alpha} = \omega_{imp}$

Relation sur le vecteur vitesse en F :

$$\dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} - l_2\,\dot{\alpha}\,\vec{j}_2 - l_3\,(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{j}_3 = V\,\vec{j}_{01}$$

sur $\vec{j}_{01}$: $(\dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} - l_2\,\dot{\alpha}\,\vec{j}_2 - l_3(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{j}_3)\cdot\vec{j}_{01} = V\,\vec{j}_{01}\cdot\vec{j}_{01} \Leftrightarrow \dot{\lambda}\,\underbrace{\vec{k}_{01}\cdot\vec{j}_{01}}_{0} - l_2\,\dot{\alpha}\,\underbrace{\vec{j}_2\cdot\vec{j}_{01}}_{\cos\alpha} - l_3(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\underbrace{\vec{j}_3\cdot\vec{j}_{01}}_{\cos(\alpha+\beta)} = V$

$$\Leftrightarrow -l_2\,\dot{\alpha}\cos\alpha - l_3(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos(\alpha+\beta) = V$$

sur $\vec{k}_{01}$: $(\dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} - l_2\,\dot{\alpha}\,\vec{j}_2 - l_3(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{j}_3)\cdot\vec{k}_{01} = V\,\vec{j}_{01}\cdot\vec{k}_{01} \Leftrightarrow \dot{\lambda}\,\underbrace{\vec{k}_{01}\cdot\vec{k}_{01}}_{1} - l_2\,\dot{\alpha}\,\underbrace{\vec{j}_2\cdot\vec{k}_{01}}_{\sin\alpha} - l_3(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\underbrace{\vec{j}_3\cdot\vec{k}_{01}}_{\sin(\alpha+\beta)} = 0$

$$\Leftrightarrow \dot{\lambda} - l_2\,\dot{\alpha}\sin\alpha - l_3(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\sin(\alpha+\beta) = 0$$

d'où le système d'équations : $\begin{cases} \dot{\alpha}+\dot{\beta} = \omega_{imp} \\ l_2\,\dot{\alpha}\cos\alpha - l_3(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos(\alpha+\beta) = V \\ \dot{\lambda} - l_2\,\dot{\alpha}\sin\alpha - l_3(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\sin(\alpha+\beta) = 0 \end{cases}$.

Ces relations s'intègrent aisément.

Question complémentaire : réutiliser un résultat

Q11 : Déterminer successivement les torseurs cinématiques $\{V_{1/0}\}$, $\{V_{2/0}\}$ et $\{V_{3/0}\}$, exprimés respectivement en A, A et E en utilisant , à chaque fois, le torseur déterminé précédemment.

$\{V_{1/0}\}$: 1/0 est un mouvement de translation : $\vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0}$

point fixe de (1) : A, d'où $\vec{V}_{A\in1/0} = \vec{V}_{A/0} = \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01}$

On obtient $\forall M, \{V_{1/0}\} = {}_M\begin{cases} \vec{0} \\ \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} \end{cases}$

$\{V_{2/0}\}$: $\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}\,\vec{i}_0$

A point de l'axe de rotation entre 2 et 1 : $\vec{V}_{A\in2/0} = \vec{V}_{A\in1/0} = \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01}$

d'où $\{V_{2/0}\} = {}_A\begin{cases} \dot{\alpha}\,\vec{i}_0 \\ \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} \end{cases}$

$\{V_{3/0}\}$: $\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\beta}\,\vec{i}_0 + \dot{\alpha}\,\vec{i}_0 = (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{i}_0$

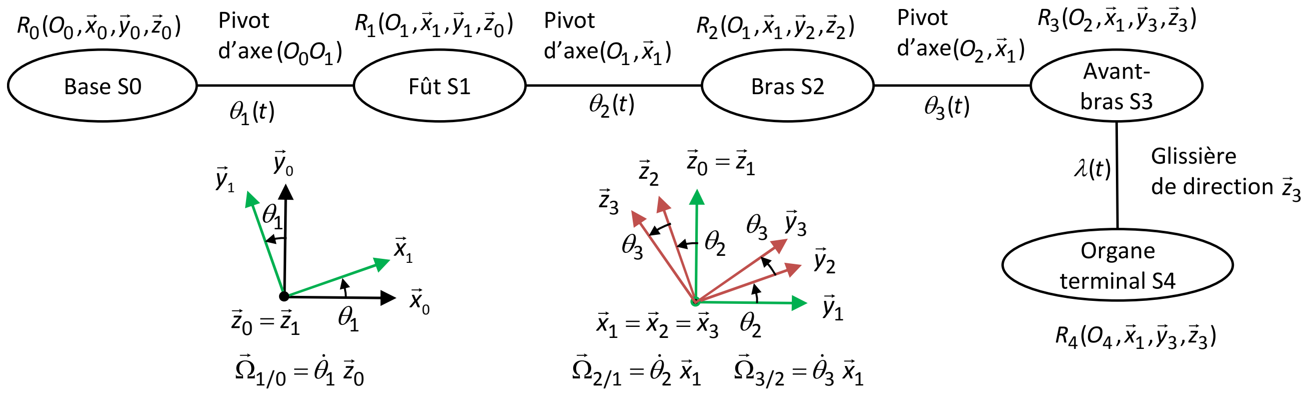
E point de l'axe de rotation entre 3 et 2 : $\vec{V}_{E\in3/0} = \vec{V}_{E\in2/0}$

Par la relation de Varignon : $\vec{V}_{E\in2/0} = \vec{V}_{A\in2/0} + \overrightarrow{EA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} - l_2\,\vec{k}_2 \wedge \dot{\alpha}\,\vec{i}_0 = \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} - l_2\,\dot{\alpha}\,\underbrace{\vec{k}_2 \wedge \vec{i}_0}_{\vec{j}_2} = \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} - l_2\,\dot{\alpha}\,\vec{j}_2$

d'où : $\{V_{3/0}\} = {}_E\begin{cases} (\dot{\beta}+\dot{\alpha})\vec{i}_0 \\ -\dot{\alpha}\,l_2\,\vec{j}_2 + \dot{\lambda}\,\vec{k}_{01} \end{cases}$.

Exercice 4.2 : **ROBOT SOUDEUR**

Q1 : Mettre en couleur le schéma et réaliser le graphe des liaisons (repères liés, liaisons, paramètres de position, figures de changement de base, vecteurs vitesse angulaire).



Applications : déterminer des torseurs cinématiques

Q2 : Écrire les torseurs cinématiques $\{V_{1/0}\}$, $\{V_{2/1}\}$, $\{V_{3/2}\}$ et $\{V_{4/3}\}$.

$\{V_{1/0}\}$: mouvement de rotation imposé par une liaison pivot d'axe (O_0O_1), $\forall M\in(O_O,\vec{z}_0)$, $\{V_{1/0}\}=\left\{\begin{matrix}\dot{\theta}_1\,\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_M$

$\{V_{2/1}\}$: mouvement de rotation imposé par une liaison pivot d'axe $(O_1,\vec{x}_1)$, $\forall M\in(O_1,\vec{x}_1)$, $\{V_{2/1}\}=\left\{\begin{matrix}\dot{\theta}_2\,\vec{x}_1\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_M$

$\{V_{3/2}\}$: mouvement de rotation imposé par une liaison pivot d'axe $(O_2,\vec{x}_1)$, $\forall M\in(O_2,\vec{x}_1)$, $\{V_{3/2}\}=\left\{\begin{matrix}\dot{\theta}_3\,\vec{x}_1\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_M$

$\{V_{4/3}\}$: mouvement de translation imposé par une liaison glissière de direction $\vec{z}_3$, $\forall M,\{V_{4/3}\}=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \dot{\lambda}\,\vec{z}_3\end{matrix}\right\}_M$

Q3 : Écrire le torseur cinématique $\{V_{2/0}\}$.

Mouvement combiné, paramétré par θ_1 et θ_2.

Vecteur vitesse de rotation : $\vec{\Omega}_{2/0}=\vec{\Omega}_{2/1}+\vec{\Omega}_{1/0}=\dot{\theta}_1\,\vec{z}_0+\dot{\theta}_2\,\vec{x}_1$

Points fixes de (2) : O_1 et O_2. Le torseur sera exprimé en O_1.

$\underbrace{\vec{V}_{O_1\in 2/0}}_{=\vec{0}}=\vec{V}_{O_2/0}$ car O_1 fixe dans (2). D'où : $\{V_{2/0}\}=\left\{\begin{matrix}\dot{\theta}_1\,\vec{z}_0+\dot{\theta}_2\,\vec{x}_1\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{O_2}$.

Le mouvement est une rotation autour d'un axe passant par O_1. La direction dépend de $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

Détermination des lois de pilotage

Q4 : Déterminer le torseur cinématique de 3/0 en fonction des paramètres de position et de leurs dérivées.

Vecteur vitesse angulaire : $\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_1\,\vec{z}_0 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{x}_1$

Les points fixes de (3) sont O_2 et O_3. Le point le plus proche de la référence (0) est O_2.

d'où $\vec{V}_{O_2\in 3/0} = \vec{V}_{O_2/0} = \left.\dfrac{d\,\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_0 = \left.\dfrac{d}{dt}(L_1\,\vec{y}_2)\right|_0 = L_1 \left.\dfrac{d\,\vec{y}_2}{dt}\right|_0$

avec : $\left.\dfrac{d\,\vec{y}_2}{dt}\right|_0 = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\theta}_1\,\vec{z}_0 + \dot{\theta}_2\,\vec{x}_1) \wedge \vec{y}_2 = \dot{\theta}_1 \underbrace{\vec{z}_0 \wedge \vec{y}_2}_{-\cos\theta_2\,\vec{x}_1} + \dot{\theta}_2 \underbrace{\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2}_{\vec{z}_2}$

$= -\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\,\vec{x}_1 + \dot{\theta}_2\,\vec{z}_2$

En replaçant on obtient : $\vec{V}_{O_2\in 3/0} = -L_1\,\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\,\vec{x}_1 + L_1\dot{\theta}_2\,\vec{z}_2$, relation homogène.

D'où : $\{V_{3/0}\} = \underset{O_2}{\begin{cases} \dot{\theta}_1\,\vec{z}_0 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{x}_1 \\ -L_1\,\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\,\vec{x}_1 + L_1\,\dot{\theta}_2\,\vec{z}_2 \end{cases}}$

Q5 : En admettant la relation de composition des vitesses $\vec{V}_{O_2\in 4/0} = \vec{V}_{O_2\in 4/3} + \vec{V}_{O_2\in 3/0}$, exprimer le torseur cinématique de 4/0 en O_2 à partir des résultats précédents.

Vecteur vitesse angulaire : $\vec{\Omega}_{4/0} = \vec{\Omega}_{4/3} + \vec{\Omega}_{3/0}$

(4) est en mouvement de translation à trajectoire rectiligne par rapport à (3) d'où $\vec{\Omega}_{4/3} = \vec{0}$:

$\vec{\Omega}_{4/0} = \underbrace{\vec{\Omega}_{4/3}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\theta}_1\,\vec{z}_0 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{x}_1$

Vecteur vitesse en E : $\vec{V}_{O_2\in 4/0} = \underbrace{\vec{V}_{O_2\in 4/3}}_{\text{à déterminer}} + \underbrace{\vec{V}_{O_2\in 3/0}}_{\text{connue}}$

(4) est en mouvement de translation à trajectoire rectiligne par rapport à (3), de direction $\vec{z}_3$ et paramétré par λ, d'où :

$\forall M, \vec{V}_{M\in 4/3} = \vec{V}_{O_4\in 4/3} = \dot{\lambda}\,\vec{z}_3$. En particulier : $\vec{V}_{O_2\in 4/3} = \dot{\lambda}\,\vec{z}_3$.

(On redémontre ce résultat ainsi : $\vec{V}_{O_2\in 4/3} = \vec{V}_{O_4\in 4/3} = \vec{V}_{O_4/3} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_3O_4}}{dt}\right]_3 = \dot{\lambda}\,\vec{z}_3$ car O_4 fixe dans (4).)

On obtient le résultat : $\{V_{4/0}\} = \underset{O_2}{\begin{cases} \dot{\theta}_1\,\vec{z}_0 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{x}_1 \\ \dot{\lambda}\,\vec{z}_3 - L_1\,\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\,\vec{x}_1 + L_1\,\dot{\theta}_2\,\vec{z}_2 \end{cases}}$

Q6 : Définir le torseur $\{V_{4/0}\}_s$ du mouvement imposé.

Le mouvement souhaité est un mouvement de translation de direction $\vec{y}_0$: $\forall M, \{V_{4/0}\}_s = \underset{M}{\begin{cases} \vec{0} \\ V\,\vec{y}_0 \end{cases}}$.

Q7 : En tenant compte de la condition $\theta_1 = 0$, déterminer les relations vectorielles, puis scalaires (non triviales), que doivent vérifier les paramètres de mouvement et leurs dérivées.

On suppose que $\theta_1 = 0$ d'où : $\{V_{4/0}\} = \underset{O_2}{\begin{cases} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{x}_1 \\ \dot{\lambda}\,\vec{z}_3 + L_1\,\dot{\theta}_2\,\vec{z}_2 \end{cases}}$

L'égalité entre les torseurs cinématiques s'écrit : $\{V_{4/0}\} = \{V_{4/0}\}_s$

On en déduit deux relations vectorielles :

- égalité des vecteurs rotation : $(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{x}_1 = \vec{0}$, soit en projection sur $\vec{x}_1$: $\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 = 0$

- égalité des vecteurs vitesse en un même point, O_2 ici : $\dot{\lambda}\,\vec{z}_3 + L_1\,\dot{\theta}_2\,\vec{z}_2 = V\,\vec{y}_0$

en projection sur $\vec{y}_0$: $\dot{\lambda}\,\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_0 + L_1\,\dot{\theta}_2\,\vec{z}_2 \cdot \vec{y}_0 = V \Leftrightarrow -L_1\,\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - \dot{\lambda}\sin(\theta_2 + \theta_3) = V$

en projection sur $\vec{z}_0$: $\dot{\lambda}\,\vec{z}_3 \cdot \vec{z}_0 + L_1\,\dot{\theta}_2\,\vec{z}_2 \cdot \vec{z}_0 = V\,\underbrace{\vec{y}_0 \cdot \vec{z}_0}_{0} \Leftrightarrow L_1\,\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + \dot{\lambda}\cos(\theta_2 + \theta_3) = 0$

On obtient les 3 équations : $\begin{cases} \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 = 0 \\ -L_1\,\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - \dot{\lambda}\sin(\theta_2 + \theta_3) = V \\ L_1\,\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + \dot{\lambda}\cos(\theta_2 + \theta_3) = 0 \end{cases}$

Chaque relation vectorielle peut donner 3 équations scalaires indépendantes par projection sur une base. Une égalité de torseur donne, au maximum, 6 équations scalaires. Ici, il y a seulement 3 équations non triviales (différentes de 0=0).

Questions complémentaires

Réutiliser des résultats

Q8 : Déterminer les torseurs cinématiques $\{V_{1/0}\}$, $\{V_{2/0}\}$ et $\{V_{3/0}\}$ des différents solides par rapport au bâti (0), en commençant par $\{V_{1/0}\}$ exprimé en O_1 et en utilisant les résultats précédents à chaque fois.

Pour définir les torseurs cinématiques et ainsi caractériser les mouvements des solides en fonction du paramétrage, il faut, pour chaque mouvement étudié, déterminer le vecteur rotation et un vecteur vitesse en un point particulier.

Ici, les points particuliers (points d'expression des torseurs) ne sont pas imposés. Il faut prendre un point fixe le plus proche possible de la pièce de référence du paramétrage.

$\{V_{1/0}\}$: mouvement de rotation d'axe $(O_1, \vec{z}_0)$ paramétré par θ_1 , $\{V_{1/0}\} = {}_{O_1}\begin{cases} \dot{\theta}_1\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$

$\{V_{2/0}\}$: $\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_1\,\vec{z}_0 + \dot{\theta}_2\,\vec{x}_1$

Vitesse déterminée en O_1 , point de l'axe de rotation de 2/1, fixe dans (2) et (1) : $\vec{V}_{O_1 \in 2/0} = \vec{V}_{O_1/0} = \vec{V}_{O_1 \in 1/0} = \vec{0}$

d'où : $\{V_{2/0}\} = {}_{O_1}\begin{cases} \dot{\theta}_1\,\vec{z}_0 + \dot{\theta}_2\,\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$. mouvement combinant 2 rotation autour du point O_1 .

$\{V_{3/0}\}$: $\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\theta}_1\,\vec{z}_0 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{x}_1$

Vitesse déterminée en O_2 , point de l'axe de rotation de 3/2, fixe dans (3) et (2) :

$\vec{V}_{O_2 \in 3/0} = \vec{V}_{O_2/0} = \vec{V}_{O_2 \in 2/0}$ avec $\vec{V}_{O_2 \in 2/0} = \vec{V}_{O_1 \in 2/0} + \overrightarrow{O_2O_1} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} = -L_1\,\vec{y}_2 \wedge (\dot{\theta}_1\,\vec{z}_0 + \dot{\theta}_2\,\vec{x}_1)$

$$= -L_1\,\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\,\vec{x}_1 + L_1\,\dot{\theta}_2\,\vec{z}_2$$

d'où : $\{V_{3/0}\} = {}_{O_2}\begin{cases} \dot{\theta}_1\,\vec{z}_0 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{x}_1 \\ -L_1\,\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\,\vec{x}_1 + L_1\,\dot{\theta}_2\,\vec{z}_2 \end{cases}$

Q9 : Sachant que $\vec{V}_{O_2\in 4/0} = \dot{\lambda}\,\vec{z}_3 - L_1\,\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\,\vec{x}_1 + L_1\,\dot{\theta}_2\,\vec{z}_2$, déterminer $\vec{V}_{O_4\in 4/0}$.

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{O_4\in 4/0} &= \vec{V}_{O_2\in 4/0} + \overrightarrow{O_4O_2} \wedge \vec{\Omega}_{4/0} \\
&= \dot{\lambda}\,\vec{z}_3 - L_1\,\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\,\vec{x}_1 + L_1\,\dot{\theta}_2\,\vec{z}_2 - (L_2\,\vec{y}_3 + \lambda\,\vec{z}_3) \wedge (\dot{\theta}_1\,\vec{z}_0 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{x}_1) \\
&= \dot{\lambda}\,\vec{z}_3 - L_1\,\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\,\vec{x}_1 + L_1\,\dot{\theta}_2\,\vec{z}_2 - L_2\left(\dot{\theta}_1 \underbrace{\vec{y}_3 \wedge \vec{z}_0}_{\cos(\theta_2+\theta_3)\,\vec{x}_1} + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\underbrace{\vec{y}_3 \wedge \vec{x}_1}_{-\vec{z}_3}\right) - \lambda\left(\dot{\theta}_1 \underbrace{\vec{z}_3 \wedge \vec{z}_0}_{-\sin(\theta_2+\theta_3)\,\vec{x}_1} + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\underbrace{\vec{z}_3 \wedge \vec{x}_1}_{\vec{y}_3}\right) \\
&= \dot{\lambda}\,\vec{z}_3 - L_1\,\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\,\vec{x}_1 + L_1\,\dot{\theta}_2\,\vec{z}_2 - L_2(\dot{\theta}_1 \cos(\theta_2+\theta_3)\,\vec{x}_1 - (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{z}_3) + \lambda(\dot{\theta}_1 \sin(\theta_2+\theta_3)\,\vec{x}_1 - (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{y}_3)
\end{aligned}$$

Soit, en factorisant par les vecteurs unitaires dans l'ordre direct et bases croissantes :

$$\vec{V}_{O_4\in 4/0} = \left(-L_1\,\dot{\theta}_1 \cos\theta_2 - L_2\,\dot{\theta}_1 \cos(\theta_2+\theta_3) + \lambda\,\dot{\theta}_1 \sin(\theta_2+\theta_3)\right)\vec{x}_1 + L_1\,\dot{\theta}_2\,\vec{z}_2 - \lambda(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{y}_3 + \left(\dot{\lambda} + L_2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\right)\vec{z}_3$$

Calculer un vecteur vitesse

Q10 : Sans utiliser les résultats précédents, déterminer directement $\vec{V}_{O_4\in 4/0}$.

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{O_4\in 4/0} &= \vec{V}_{O_4/0} = \left.\frac{d\,\overrightarrow{O_1O_4}}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d}{dt}(L_1\,\vec{y}_2 + L_2\,\vec{y}_3 + \lambda\,\vec{z}_3)\right|_0 \quad \text{car } O_4 \text{ fixe dans (4)} \\
&= L_1\left.\frac{d\,\vec{y}_2}{dt}\right|_0 + L_2\left.\frac{d\,\vec{y}_3}{dt}\right|_0 + \dot{\lambda}\,\vec{z}_3 + \lambda\left.\frac{d\,\vec{z}_3}{dt}\right|_0
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\,\vec{y}_2}{dt}\right|_0 &= \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\theta}_1\,\vec{z}_0 + \dot{\theta}_2\,\vec{x}_1) \wedge \vec{y}_2 = \dot{\theta}_1 \underbrace{\vec{z}_0 \wedge \vec{y}_2}_{-\cos\theta_2\,\vec{x}_1} + \dot{\theta}_2 \underbrace{\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2}_{\vec{z}_2} \\
&= -\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\,\vec{x}_1 + \dot{\theta}_2\,\vec{z}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\,\vec{y}_3}{dt}\right|_0 &= \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\theta}_1\,\vec{z}_0 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{x}_1) \wedge \vec{y}_3 = \dot{\theta}_1 \underbrace{\vec{z}_0 \wedge \vec{y}_2}_{-\cos(\theta_2+\theta_3)\,\vec{x}_1} + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\underbrace{\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_3}_{\vec{z}_3} \\
&= -\dot{\theta}_1 \cos(\theta_2+\theta_3)\,\vec{x}_1 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{z}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\,\vec{z}_3}{dt}\right|_0 &= \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{z}_3 = \dot{\theta}_1 \underbrace{\vec{z}_0 \wedge \vec{z}_3}_{\sin(\theta_2+\theta_3)\,\vec{x}_1} + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\underbrace{\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_3}_{-\vec{y}_3} \\
&= \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2+\theta_3)\,\vec{x}_1 - (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{y}_3
\end{aligned}$$

En replaçant, on obtient :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{O_4\in 4/0} = {} & L_1\,(-\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\,\vec{x}_1 + \dot{\theta}_2\,\vec{z}_2) \\
& + L_2\,(-\dot{\theta}_1 \cos(\theta_2+\theta_3)\,\vec{x}_1 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{z}_3) \\
& + \dot{\lambda}\,\vec{z}_3 + \lambda\,(\dot{\theta}_1 \sin(\theta_2+\theta_3)\,\vec{x}_1 - (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{y}_3)
\end{aligned}$$

$$\vec{V}_{O_4\in 4/0} = \left(-L_1\,\dot{\theta}_1 \cos\theta_2 - L_2\,\dot{\theta}_1 \cos(\theta_2+\theta_3) + \lambda\,\dot{\theta}_1 \sin(\theta_2+\theta_3)\right)\vec{x}_1 + L_1\,\dot{\theta}_2\,\vec{z}_2 - \lambda(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\,\vec{y}_3 + \left(\dot{\lambda} + L_2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\right)\vec{z}_3$$